سیستم بس‌ذره‌ای کوآنتومی با جرم مؤثر متغیر در حضور برهم‌کنش نوسانگر هماهنگ نسبی و میدان الکتریکی وابسته به زمان

هادی سبحانی*، حسن حسن آبادی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دریافت: ۱۳۹٤/۰۸/۲۷ ویرایش نهائی: ۱۳۹٥/۰٤/۳۰ پذیرش: ۱۳۹٦/۰۳/۰۸

چکیده

در این مقاله یک سیستم کوآنتومی بس‌ذره‌ای در نظر گرفته شده است. سپس به آن سیستم دو برهم‌کنش وابسته به زمان نوسانگر هماهنگ و میدان الکتریکی اضافه می‌گردد. نوع تغییرات آنها به‌صورت کاملاً عمومی فرض شده است. سپس با استفاده از روش‌های جبری، تحول زمانی این سیستم بس‌ذره‌ای کوآنتومی بررسی می‌گردد. برای مطالعهٔ این تحول زمانی از روش‌های ناوردای پویای لوییس و رزنفلد و عملگر تحول زمانی استفاده شده است. ناورداهای مناسب ساخته شده و ویژه توابع آنها به‌دست آورده شده‌اند. همچنین عملگرهای مناسب تحول زمانی ساخته شده‌اند. در انتها مقایسه بین جواب‌ها با در نظر گرفتن حالتی خاص ارائه شده است.

کلیدواژگان: سیستم بس‌ذره‌ای کوآنتومی، برهم‌کنش نوسانگر هماهنگ وابسته به زمان، میدان الکتریکی وابسته به زمان، معادلهٔ شرودینگر، ناوردای پویای لوییس و رزنفلد، عملگر تحول زمانی

مقدمه

یکی از مهمترین و در عین حال جذاب‌ترین سیستم‌های کوآنتومی، سیستم‌های کوآنتومی محبوس شده با جرم متغیر است، به‌خصوص نوسانگرهای هماهنگ با جرم وابسته به زمان [۲-۱]. در این زمینه مطالعات زیادی انجام شده و به رشتهٔ تحریر در آمده که در مراجع [۱۱-۳] به نمونه‌هایی از این مطالعات اشاره شده است. وابستگی جرم سیستم به زمان را می‌توان این گونه برداشت کرد که در این سیستم تبادل انرژی به محیط صورت می‌گیرد، چه به‌صورت افزایشی و چه به‌صورت کاهشی [۸]. این چنین مدل‌سازی همچنین اجازه می‌دهد که برهم‌کنش الکترون‌ها و یک محیط پویا مثل محیطی با دما یا فشار و یا انرژی متغیر را با آن تشریح کرد [۱۰]. از طرف دیگر، سیستم‌هایی که در آنها برهم‌کنش‌های وابسته به زمان حضور دارد، کاربردهای قابل توجهی در اپتیک کوآنتومی [۱٤-۱۲]، تله‌های پائول [۱٦-۱٥] و نظریهٔ میدان‌های کوآنتومی [۱۸-۱۷] دارند.

روشی که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد موسوم به روش ناوردای پویا لوییس-رزنفلد می‌باشد. این روش که در سال ۱۹٦۹ توسط لوییس و رزنفلد بنیان گذاری شد به بررسی سیستم‌های کوآنتومی می‌پردازد که در آنها برهم‌کنش وابسته به زمان وجود دارد، این روش توسط فیزیکدانان متعددی مورد استفاده قرار گرفته است که در ادامه به آنها اشاره می‌شود.

لوییس و رزنفلد ضمن معرفی روش ناوردای پویا، یک نوسانگر هماهنگ که دارای بسامد زاویه‌ای وابسته به زمان است و همچنین ذره‌ای که در میدان مغاطیسی وابسته به زمان قرار داد را بررسی کردند [۲۰]. با استفاده از روشی مشابه با ماآماخ و همکاران، نوسانگر هماهنگ وابسته به

* نویسنده مسئول: hadisobhani8637@gmail.com

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کریتیو کامنز تخصیص ٤.٠ بین‌المللی می‌باشد.

زمانی را بررسی کردند که در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار داشت [۳]. پدروسا با در نظر گرفتن یک نوسانگر وابسته به زمان به‌کمک روش ناوردای پویا، تابع موج وابسته به زمان این نوسانگر را به‌دست آورد. سپس به بررسی حالت‌های همدوس چنین نوسانگری پرداخت [۵]. همچنین ما در کارهای اخیر خود سیستم‌های نسبیتی و غیر نسبیتی را در حضور برهم‌کنش وابسته به زمان با استفاده از همین روش مورد بررسی قرار داده‌ایم، که ازآن جمله سیستم‌های فرمیونی نسبیتی در فضای جابه‌جایی و ناجابه‌جایی تحت تأثیر برهم‌کنش وابسته به زمان [۲۱]، اثر راشبا در حضور برهم‌کنش وابسته به زمان [۲۳]، سیستم بوزونی نسبیتی که تحت تأثیر میدان الکتریکی وابسته به زمان قرار گرفته است [۲٤]، همچنین هسته‌هایی که ناپایدار هستند، با استفاده از برهم‌کنش وابسته به زمان و سود جستن از روش ناوردای پویا و هامیلتونی‌های بوهر [۲۵]و دیویدو–چبان [۲٦] ناپایداری آنها مدل‌سازی شدند.

در این مقاله ما بر آن هستیم که یک سیستم بس‌ذره‌ای را در نظر بگیریم. سپس بر این سیستم یک برهم‌کنش محبوس کنندهٔ وابسته به زمان، همچنین برهم‌کنشی نسبی وابسته به زمان را هم لحاظ می‌کنیم. این در حالی است که ما علاوه بر این برهم‌کنش‌ها یک میدان الکتریکی وابسته به زمان هم بر این سیستم اعمال می‌کنیم. تحول زمانی این چنین سیستمی را به‌وسیلهٔ تئوری ناوردای پویا و عملگر تحول زمانی بررسی خواهیم کرد. ناوردای پویای مناسب و همچنین عملگر تحول زمانی مناسب این سیستم‌ها ساخته شده و جزئیات آن در ادامه خواهد آمد.

سیستم بس‌ذره در حضور برهم‌کنش‌ها

سیستمی بس‌ذره‌ای را در نظر بگیرید که بر آن یک برهم‌کنش محبوس کننده و همچنین میدان الکتریکی که با زمان می‌تواند تغییر کند، اعمال می‌شود. همچنین ذرات سیستم نیز بدون برهم‌کنش نیستند و باهم در حال برهم‌کنش می‌باشند. هامیلتونی این سیستم در حالت کلی به‌صورت زیر است [۱۹]

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{p_i^2}{m(t)} + \tilde{\mathbf{r}}_i.\mathbf{K}(t).\mathbf{r}_i \right) + \sum_{i\neq j} u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \mathbf{f}(t).\mathbf{r} \qquad ۱$$

که در آن $\mathbf{E}(t) = \mathbf{f}(t)/q$ می‌باشد. برای سهولت فرض می‌کنیم که عامل تانسوری برهم‌کنش محبوس کننده قطری باشد. یعنی

$$\tilde{\mathbf{r}}_i.\mathbf{K}(t).\mathbf{r}_i = m(t)[\omega_x^2(t)x_i^2 + \omega_y^2(t)y_i^2 + \omega_z^2(t)z_i^2] \qquad ۲$$

همچنین برهم‌کنش نسبی ذرات به‌صورت

$$u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2}k(t)\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|^2 \qquad ۳$$

باشد. با جای‌گذاری ۲ و ۳ در معادلهٔ۱ داریم

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{p_i^2}{m(t)} + m(t)\left(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{r}_i\right)^2 \right) + \sum_{i\neq j}\frac{1}{2}k(t)\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|^2 + \mathbf{f}(t).\mathbf{r}_i \qquad ٤$$

که در این مقاله فرض ما بر این است که ذرات هم جرم هستند. بررسی تحول زمانی این چنین سیستمی که به‌طور صریح وابسته به زمانی است نیاز به معادله وابسته به زمان شرودینگر دارد

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi$$ ۵

قبل از آنکه به بررسی تحول زمانی سیستم مورد نظر بپردازیم بایستی به فرم ساده‌تری از هامیلتونی دسترسی پیدا کنیم که کار را برای ما آسان‌تر کند. لذا مختصات ژاکوبی این سیستم بس‌ذره‌ای را معرفی می‌کنیم [۱۹]

$$\mathbf{R}^{(1)}\equiv\mathbf{R}=\frac{1}{N}\sum_i\mathbf{r}_i,\ \ \hat{\mathbf{P}}^{(1)}\equiv\hat{\mathbf{P}}=\sum_i\hat{\mathbf{p}}_i$$ ۶

$$\begin{aligned}&X^{(2)}=x_1-x_2,\\&X^{(3)}=x_1+x_2-2x_3,\\&.\\&.\\&.\\&X^{(N)}=x_1+x_2+\ldots+x_{N-1}-(N-1)x_N\end{aligned}$$ ۷

بدیهی است که برای دیگر مختصات نیز به‌طور مشابه‌ای کار را انجام می‌دهیم یعنی $Z^{(2)},...,Z^{(N)}$، $Y^{(2)},...,Y^{(N)}$ و $P^{(2)},...,P^{(N)}$ مشابه۷ تعریف می‌شوند. با اعمال این تغییرات شکل نهایی هامیلتونی به‌صورت

$$H=H_{cm}+H_{rel}$$ ۸

قابل تفکیک خواهد بود. نکته جالب توجه این است که اثر میدان الکتریکی فقط بر قسمت مرکز جرم وارد می‌شود

۹

$$\begin{aligned}H_{cm}=&\frac{\mathbf{P}^2}{2M(t)}+\frac{M(t)}{2}[\omega_X^2(t)X^2+\omega_Y^2(t)Y^2\\&+\omega_Z^2(t)Z^2]-\mathbf{F}(t).\mathbf{R}\end{aligned}$$

در معادلهٔ فوق مجموع جرم‌ها و مؤلفه‌های میدان الکتریکی متغیر با حروف بزرگ نمایش داده شده است. قسمت نسبی هامیلتونی نیز تبدیل به N نوسانگر جدا از هم تبدیل می‌شود

$$H_{rel}=\sum_{i=2}\frac{\left(\mathbf{P}^{(i)}\right)^2}{2\mu_i(t)}+\eta_i(t)\left(\mathbf{R}^{(i)}\right)^2$$ ۱۰

هامیتونی مرکز جرم و نسبی هر کدام به‌طور مستقل عمل می‌کنند و بایستی به‌صورت جدا از هم بررسی شوند. تابع موج نهایی این سیستم از حاصلضرب تابع موج مربوط به قسمت مرکز جرم و نسبی به‌دست می‌آید

$$\Psi_{total=}\Psi_{cm}\Psi_{rel}\ .$$

بررسی مستقیم این سیستم‌ها با معادلهٔ۵ کاری دشوار است ولی می‌توان با استفاده از واقعیات مکانیک کوآنتومی به‌طور غیرمستقیم تحول زمانی این چنین سیستم‌هایی را بررسی کرد. این روش که ناوردای پویا لوویس–رزنفلد نام دارد در قسمت بعدی تشریح شده و از آن برای بررسی تحول زمانی سیستم استفاده می‌شود.

روش ناوردای پویا لوویس–رزنفلد و بررسی تحول زمانی سیستم بس‌ذره‌ای

در سال ۱۹۶۹ لوویس و رزنفلد روشی را بنیان گذاری کردند [۲۰] که در آن با استفاده از ماهیت مکانیک کوآنتومی به بررسی تحول زمانی سیستم‌هایی که به‌طور صریح وابسته به زمان هستند و این وابستگی زمانی غیر قابل تقریب زدن و یا حذف کردن باشد، پرداختند. این تئوری با معرفی عملگر هرمیتی ناوردای پویا با تحول زمانی زیر شروع می‌شود

$$\frac{dI(t)}{dt}=\frac{\partial I(t)}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}[I(t),H(t)]=0$$ ۱۱

با انجام مختصر اعمال ریاضی و اثر دادن معادلۀ۱۱ بر روی یک کت دلخواه داریم

$$i\hbar\frac{\partial(I|\Psi\rangle)}{\partial t}=H(I|\Psi\rangle) \qquad ۱۲$$

معادلۀ فوق این مطلب را می‌رساند که با اثر این عملگر بر روی کت حالت نیز در معادلۀ تحول زمانی صدق می‌کند. برای اینکه از چگونگی این عملکرد اطلاع یابیم بایستی کت حالت را بر اساس ویژه کت‌های این عملگر بنویسیم:

$$I(t)|\lambda,\kappa\rangle=\lambda|\lambda,\kappa\rangle \qquad ۱۳$$

در اینجا λ ویژه مقدار عملگر ناوردای پویا و κ نماد هر عدد کوآنتومی دیگر است. در این حالت کت حالت سیستم را می‌توان بر اساس ویژه کت‌های عملگر ناوردای پویا این چنین نوشت

$$|\Psi\rangle=\sum_{\lambda,\kappa}c_{\lambda,\kappa}e^{i\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}|\lambda,\kappa;t\rangle \qquad ۱٤$$

که محاسبۀ قسمت فازی زمانی اجباری نیست. این فاز از رابطۀ۱۵ قابل محاسبه است.

$$\hbar\frac{d\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}{dt}=\langle\lambda,\kappa|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)|\lambda,\kappa\rangle \qquad ۱۵$$

نکتۀ حائز اهمیت در مورد استفاده از این روش این است که ناوردای پویا برای یکی سیستم به‌صورت منحصر به‌فرد و یکتا تعریف نمی‌شود. به‌عبارت دیگر هر عملگری را که شرایط حاکم (هرمیتی بودن و رابطۀ تحول زمانی۱۱) بر ناوردای پویا را داشته باشد می‌تواند، مبنای استفاده از این روش قرار گیرد. ما در این مقاله برای پیدا کردن ناوردای پویا ابتدا آن را به‌صورت کاملاً خام و با الهام از عوامل تأثیر گذار در هامیلتونی پیشنهاد می‌دهیم. خام بودن ناوردای پویا بدین معنی است که در شکل اولیه، این عملگر دارای ضرایبی می‌باشد که نا معلوم است و این ضرایب با استفاده از شرایط حاکم بر ناوردای پویا تعیین می‌شود. پس از معلوم شدن ناوردای پویای مناسب برای مسئله، اقدام به یافتن ویژه توابع آن می‌کنیم تا بتوانیم تابع موج را بر اساس ویژه توابع این عملگر بنویسیم.

در ابتدا قسمت نسبی را مورد بحث قرار می‌دهیم. چون نوسانگرها مستقل از هم هستند لذا ناوردای پویا برای قسمت نسبی از مجموع ناورداهای پویای هر قسمت، همچنین تابع موج نهایی قسمت نسبی، از حاصلضرب تابع موج هرنوسانگر به‌دست می‌آید

$$I_{rel-tot}=\sum_{i=2}^{N}I^{(i)},\quad \Psi_{rel}=\prod_{i=2}^{N}\Psi^{(i)} \qquad ۱٦$$

پس ما در اینجا یک نوسانگر وابسته به زمان را در حالت کلی مورد بحث قرار می‌دهیم. یک نوسانگر وابسته به زمان را در نظر بگیرید. هامیلتونی این نوسانگر به‌صورت

$$H(q,t)=\frac{P_q^2}{2\mu(t)}+\frac{\mu(t)\omega^2(t)q^2}{2} \qquad ۱۷$$

می‌باشد. ناوردای پویا را بدین گونه پیشنهاد می‌دهیم

$$I(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\xi_1(t)P_q^2+\xi_2(t)\{q,P_q\}\\+\xi_3(t)q^2\end{bmatrix} \qquad ۱۸$$

که ضرایب توابعی حقیقی از زمان هستند. این ضرایب با استفاده از معادلۀ۱۱ به‌دست می‌آیند. با انجام این محاسبات داریم

$$\dot{\xi}_1(t)=-2\frac{\xi_3(t)}{\mu(t)},\quad \dot{\xi}_2(t)=2\xi_3(t)\mu(t)\omega^2(t),\quad \dot{\xi}_3(t)=m(t)\omega^2(t)\xi_1(t)-\frac{\xi_2(t)}{m(t)}. \tag{۱۹}$$

دستگاه معادلات جفت شدهٔ فوق را می‌توان با استفاده از تعریف یک تابع واسط حل کرد. بدین معنی که ابتدا ضرایب را برحسب تابع واسطی به‌دست می‌آوریم و در انتها قیدی برای این تابع واسط پیدا می‌کنیم. این تابع واسط را به‌صورت $\xi_1(t)=\rho^2(t)$ تعریف می‌کنیم. با قرار دادن در اولین رابطه از دستگاه معادلات۱۹ ضریب نامعین دیگری مشخص می‌شود

$$\xi_3(t)=-\rho(t)\dot{\rho}(t)\mu(t),$$

با قرار دادن $\xi_3(t)$ در سومین معادله از دستگاه معادلات۱۹ داریم

$$\xi_2(t)=\rho(t)\begin{pmatrix}\mu^2(t)\omega^2(t)+\\ \rho(t)\dot{\mu}(t)\mu(t)+\\ \mu^2(t)\ddot{\rho}(t)\end{pmatrix}+\mu^2(t)\dot{\rho}^2(t).$$

اگر $\xi_2(t)$ را در دومین معادله از دستگاه معادلات۱۹ قرار دهیم، می‌توان قیدی برای تابع واسط به‌دست آورد که برابر است با

$$\ddot{\rho}(t)+\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\dot{\rho}(t)+\omega^2(t)\rho(t)=\frac{1}{\mu^2(t)\rho^3(t)}.$$

همچنین با سود جستن از رابطهٔ قیدی حاکم بر تابع واسط می‌توان $\xi_2(t)$ را باز نویسی کنیم

$$\xi_2(t)=\frac{1}{\rho^2(t)}+\mu^2(t)\dot{\rho}^2(t).$$

پس در نهایت شکل ناوردای پویا به‌صورت زیر خواهد شد

$$I(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\rho^2(t)P_q^2\\ +\left(\frac{1}{\rho^2(t)}+\mu^2(t)\dot{\rho}^2(t)\right)q^2\\ -\rho(t)\dot{\rho}(t)\mu(t)\{q,P_q\}\end{bmatrix}. \tag{۲۰}$$

به‌عنوان نتیجه این قسمت، به‌راحتی می‌توان دید که اگر جرم مستقل از زمان در نظر گرفته شود، نتیجه همانند نتیجه‌ای می‌شود که لوییس و رزنفلد به‌دست آورده بودند. قبل از محاسبهٔ ویژه توابع عملگر ناوردای پویا از تبدیل یکانی

$$U_q=\exp\left(\frac{i\mu(t)\dot{\rho}(t)}{2\hbar\rho(t)}q^2\right) \tag{۲۱}$$

بهره می‌بریم. این تبدیل عملگر ناوردای پویا را به فرم ساده‌تری تبدیل می‌کند. با استفاده از $I_q'=U_qI_qU_q^\dagger$ داریم

$$I_q'(t)=\frac{1}{2}\left[\rho^2(t)P_q^2+\frac{q^2}{\rho^2(t)}\right] \tag{۲۲}$$

همچنین برای ویژه توابع، که با استفاده از تبدیل یکانی داریم $\Phi_q=U_q\Phi_q'$. پس معادلهٔ ویژه مقداری ناوردای پویا در نهایت می‌شود

$$I_q'\Phi_q'=\lambda_q\Phi_q' \tag{۲۳}$$

که صورت دیفرانسیلی آن به‌صورت

$$\frac{d^2\Phi_q'}{d\xi^2}+\frac{1}{\hbar^2}\left(2\lambda_q-\xi^2\right)\Phi_q'=0 \tag{۲۴}$$

است که در آن $\xi = \dfrac{q}{\rho}$. این معادله دارای جواب زیر است:

۲۵

$$\Phi'_{q,n}(q) = \left(\frac{q}{\rho_R}\right)\exp\left[\tfrac{-1}{2\hbar}(\tfrac{q}{\rho})^2\right] L_n^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{\hbar}(\tfrac{q}{\rho})^2\right],$$
$$\lambda_{n,q} = \hbar(n+\tfrac{1}{2}).$$

و با استفاده از رابطهٔ ۱۵ داریم:

$$\alpha_{n,q}(t) = -(n+\tfrac{1}{2})\int_0^t \frac{dt'}{\mu(t)\rho^2(t)} \qquad ۲۶$$

با قراردادن این اطلاعات در معادلهٔ ۱٤ تابع موج نهایی این قسمت به‌دست می‌آید. می‌توان دید که این محاسبات با در نظر گرفتن

$$\frac{\mu_i(t)\omega^2(t)}{2} \rightarrow \eta_i(t) \qquad ۲۷$$

قسمت نسبی هامیلتونی را پوشش می‌دهد. با استفاده از عملگرهای خلق و فنای زیر:

$$a_X^\dagger = \sqrt{\frac{M(t)\omega_X(t)}{2\hbar}}\left(X - i\frac{P_X}{M(t)\omega_X(t)}\right),$$
$$a_X = \sqrt{\frac{M(t)\omega_X(t)}{2\hbar}}\left(X + i\frac{P_X}{M(t)\omega_X(t)}\right),$$
$$\aleph_X = a_X^\dagger a_X,$$

۲۸

$$\left[\aleph_X, a_X\right] = -a_X,$$
$$\left[\aleph_X, a_X^\dagger\right] = a_X^\dagger,$$
$$\left[a_X, a_X^\dagger\right] = 1.$$

می‌خواهیم هامیلتونی مرکز جرم را در یک بعد ساده‌تر بنویسیم

$$H_X = \hbar\omega_X(t)\left(\aleph_X + \frac{1}{2}\right)$$
$$-\sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}}\left(a_X + a_X^\dagger\right) f_x(t) \qquad ۲۹$$

برای بررسی تحول زمانی معادلهٔ ۲۹، ناوردای پویا را بدین صورت پیشنهاد می‌دهیم [۲۱]

$$I_{cm}(t) = \theta(t)\aleph_X + \vartheta(t)(a_X + a_X^\dagger)$$
$$+\nu(t)(a_X^\dagger - a_X) + \delta(t) \qquad ۳۰$$

با استفاده از معادلهٔ ۱۱ داریم

$$g(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}} f(t),$$

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \dot\theta(t)\aleph_X + \dot\vartheta(t)(a_X + a_X^\dagger)$$
$$+\dot\nu(t)(a_X^\dagger - a_X) + \dot\delta(t),$$

$$\left[I(t), H(t)\right] = 2\nu(t)g(t)$$
$$-\left(a_X^\dagger - a_X\right)\left(\theta(t)g(t) - \hbar\omega_X(t)\left(\vartheta(t) + \nu(t)\right)\right).$$

با جای‌گذاری روابط فوق در معادلهٔ ۱۱ داریم

$$\aleph\left(\dot\theta(t)\right)$$
$$+\left(a_X^\dagger - a_X\right)\begin{pmatrix}\dot\nu(t) - \hbar\omega_X(t)\left(\nu(t) + \vartheta(t)\right)\\ -\theta(t)g(t)\end{pmatrix}$$
$$+\left(a_X + a_X^\dagger\right)\left(\dot\vartheta(t)\right) + \dot\delta(t) + 2\nu(t)g(t) = 0.$$

رابطهٔ فوق دلالت بر این دارد که

۳۱

$$\theta = \text{Constant},$$
$$\vartheta = \text{Constant},$$
$$\nu(t) = \text{Re}\left[\frac{1}{e^{i\int\omega_X(t)dt}}\left(-i\int e^{i\int\omega_X(t)dt}\left(\vartheta\omega_X(t) + \frac{\theta g(t)}{\hbar}\right)\right)\right] + \text{Constant},$$
$$\delta(t) = -2\int g(t)\nu(t) + \text{Constant}.$$

این نکته را در اینجا یادآوری می‌کنیم که بایستی عملگر ناوردای پویا هرمیتی باشد، به‌همین دلیل تنها قسمت حقیقی جواب برای $\nu(t)$ که از حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌دست می‌آید، قابل قبول است زیرا باعث می‌شود که این عملگر هرمیتی بماند.
ویژه تابع‌های ناوردای پویا را بر اساس ویژه حالت‌های نوسانگر می‌نویسیم

$$\left|\lambda,\kappa;t\right\rangle = \sum_n C_n \left|n\right\rangle$$

که در آن C_n مقداری ثابت است. با اثر دادن ۳۰ بر روی آن داریم

$$\begin{aligned}\left|\lambda,\kappa;t\right\rangle = \sum_n \ & C_n(\theta n\left|n\right\rangle + \vartheta(\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\ & +\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle) + \nu(t)(\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \\ & -\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle) + \delta(t)\left|n\right\rangle)\end{aligned} \quad ۳۲$$

با قراردادن۳۲ در ۱٤ تابع موج این قسمت نیز به‌دست خواهد آمد. برای مؤلفه‌های دیگر نیز مانند همین مؤلفه می‌باشد که تابع نهایی از حاصلضرب آنها به‌دست می‌آید.

عملگر تحول زمانی و تابع موج وابسته به زمان

تابع موج وابسته به زمان علاوه بر این که می‌تواند به‌صورت مستقیم از معادلهٔ وابسته به زمان شرودینگر محاسبه شود، از اثر کردن عملگر تحول زمانی بر یک تابع موج در لحظهٔ اولیه نیز می‌تواند به‌دست آید [۲۲]

$$\Psi(x,t) = U_t(0,t)\Psi(x,0) \quad ۳۳$$

که عملگر تحول زمانی $U_t(0,t)$ نیز معادلهٔ۵ را ارضا می‌نماید

$$i\hbar\frac{\partial U(0,t)}{\partial t} = HU(0,t) \quad ۳٤$$

خاصیت یکانی بودن این عملگر اجازه می‌دهد که رابطهٔ۳٤ را به‌صورت [۲۲]

$$i\hbar\frac{\partial U(0,t)}{\partial t}U^{-1}(0,t) = H \quad ۳۵$$

بنویسیم. نکتهٔ مهم این است که چون مؤلفه‌های مکان مستقل از هم هستند، همانند تابع موج، عملگر تحول زمانی کل از حاصل‌ضرب عملگر تحول زمانی مربوط به هر مؤلفه به‌دست می‌آید. خوب است که با این روش نیز به بررسی تحول زمانی قسمت‌های نسبی و مرکز جرم هامیلتونی بپردازیم. در ابتدا می‌خواهیم عملگر تحول زمانی مربوط به قسمت نسبی را به‌دست آوریم. همانند قسمت قبل چون قسمت نسبی به‌صورت مجموعه‌ای از نوسانگرهای وابسته به زمان درآمده بود، لذا این عملگر را در حالت کلی به‌دست می‌آوریم. با استفاده از عملگرهای خلق و فنا هامیلتونی۱۷ را بازنویسی می‌کنیم

$$H = \hbar\omega(t)(\aleph_{rel} + \frac{1}{2}) \quad ۳٦$$

نحوهٔ پیشنهاد دادن شکل عملگر تحول زمانی همانند قسمت ناوردای پویا کاملاً حدسی می‌باشد به گونه‌ای که در معادلهٔ۳۵ بتواند صدق کند. با پیشنهاد دادن عملگر تحول زمانی به‌صورت

$$U_{t-rel} = \exp(A(t)\aleph_{rel} + B(t)) \quad ۳۷$$

و استفاده از رابطهٔ۳۵ داریم

$$\frac{\partial U_{t-rel}}{\partial t} = \exp\left(A(t)\aleph_{rel} + B(t)\right) \to$$
$$\frac{\partial U_{t-rel}}{\partial t}U^{-1}_{t-rel} =$$
$$\exp\left(A(t)\aleph_{rel} + B(t)\right)\left(\dot{A}(t)\aleph_{rel} + \dot{B}(t)\right)\exp\left(-A(t)\aleph_{rel} - B(t)\right)$$
$$= \dot{A}(t)\aleph_{rel} + \dot{B}(t)$$

در رابطه اخیر از فرمول بیکر–هاسدروف استفاده شده است. با استفاده از رابطهٔ ۳۵ داریم

$$i\left(\dot{A}(t)\aleph_{rel} + \dot{B}(t)\right) = \omega(t)\left(\aleph_{rel} + \frac{1}{2}\right) \to$$
$$A(t) = -i\int \omega(t)dt + cte, \qquad ۳۸$$
$$B(t) = \frac{-i}{2}\int \omega(t)dt + cte.$$

همین کار را برای معادلهٔ ۲۹ می‌توان انجام داد، با این تفاوت که عملگر تحول زمانی به‌صورت

۳۹

$$U_{t-cm}(t) =$$
$$\exp[\gamma_1(t)a_X^{\dagger} + \gamma_2(t)a_X + \gamma_3(t)\aleph_{X,cm} + \gamma_4(t)]$$

پیشنهاد می‌شود. سپس با استفاده از رابطهٔ ۳۵ و فرمول بیکر–هاسدروف داریم

۴۰

$$i\hbar\frac{\partial U_{t-cm}(t)}{\partial t}U^{-1}_{t-cm}(t) =$$
$$i\hbar\begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1(t)a_X^{\dagger} \\ +\dot{\gamma}_2(t)e^{\gamma_1(t)a_X^{\dagger}}\left(a_X\right)e^{-\gamma_1(t)a_X^{\dagger}} \\ +\dot{\gamma}_3(t)e^{\gamma_1(t)a_X^{\dagger}+\gamma_2(t)a_X}\left(\aleph_{X,cm}\right)e^{-\gamma_2(t)a_X-\gamma_1(t)a_X^{\dagger}} \\ +\dot{\gamma}_4(t) \end{bmatrix}$$

این رابطه به این منتج می‌شود که

۴۱

$$i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1} =$$
$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t)a_X^{\dagger} + \dot{\gamma}_2(t)\left(a_x - \gamma_1(t)\right) \\ +\dot{\gamma}_3(t)\left(\aleph_{X,cm} - \gamma_1(t)a_X^{\dagger} + \gamma_2(t)\left(a_x - \gamma_1(t)\right)\right) + \dot{\gamma}_4(t) \end{pmatrix}$$
$$= \left(\dot{\gamma}_1(t) - \dot{\gamma}_3(t)\gamma_1(t)\right)a_X^{\dagger} + \left(\dot{\gamma}_2(t) + \dot{\gamma}_3(t)\gamma_2(t)\right)a_x$$
$$+ \left(\dot{\gamma}_3(t)\right)\aleph_{X,cm} + \left(\dot{\gamma}_4(t) - \dot{\gamma}_2(t)\gamma_1(t) - \dot{\gamma}_3(t)\gamma_2(t)\gamma_1(t)\right)$$
$$= \left(\hbar\omega_X(t)\right)\aleph_{X,cm} + \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}}f_X(t)(a_x + a_X^{\dagger}) + \frac{\hbar\omega_X(t)}{2}.$$

با تساوی قرار دادن ضرایب در دو طرف تساوی به‌راحتی می‌توان ضرایب نامعلوم را به‌صورت زیر استخراج کرد. در روابط زیر برای سهولت، ثابت‌های انتگرال‌گیری صفر لحاظ شده است.

۴۲

$$g(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}}f_x(t),$$
$$\gamma_1(t) = \exp\left(-i\int \omega_X(t)dt\right)\left[\frac{1}{i\hbar}\int g(t)\exp\left(i\int \omega_X(t)dt\right)dt\right],$$
$$\gamma_2(t) = \exp\left(i\int \omega_X(t)dt\right)\left[\frac{1}{i\hbar}\int g(t)\exp\left(-i\int \omega_X(t)dt\right)dt\right],$$
$$\gamma_3(t) = -i\int \omega_X(t)dt,$$
$$\gamma_4(t) = -i\int\left(\frac{\gamma_1(t)g(t)}{\hbar} - \frac{\omega_X(t)}{2}\right)dt.$$

با این پارامترها می‌توان به شکل صریح عملگر تحول زمانی دست یافت.

مقایسه نتایج به‌دست آمده

برای مقایسه تابع موج‌های به‌دست آمده توسط روش‌های ناوردای پویا و عملگر تحول زمانی، با در نظر گرفتن حالتی خاص نشان می‌دهیم که هر دو روش منجر به نتایجی یکسان می‌شود. برای این کار فرض می‌کنیم که سیستم دارای برهم‌کنش یک بعدی است و $f(t) = 0$ و $M(t) = \omega(t) = \text{Constant.}$ در روش ناوردای پویا، با این فرضیات، هامیلتونی‌ها به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ مستقل از زمان تبدیل می‌شوند

$$H_{cm}=\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+\frac{M\omega_X^2X^2}{2},$$
$$H_{rel}=\sum_{i=2}\frac{\left(\mathbf{P}^{(i)}\right)^2}{2\mu_i}+\eta_i\left(\mathbf{R}^{(i)}\right)^2. \quad ۴۳$$

به‌راحتی دیده می‌شود که هامیلتونی می‌تواند نقش ناوردای پویا بازی کند و معادلهٔ۱۱ توسط هامیلتونی ارضا می‌شود

$$\frac{\partial H_{cm}}{\partial t}=0,\left[H_{cm},H_{cm}\right]=0,$$
$$\frac{\partial H_{rel}}{\partial t}=0,\left[H_{rel},H_{rel}\right]=0. \quad ۴۴$$

پس تابع موج در آن حالت، تابع موج نوسانگر هماهنگ می‌باشد که می‌توان آن را برحسب توابع هرمیت نوشت. حال که هامیلتونی‌ها به هامیلتونی‌های نوسانگر هماهنگ مستقل از زمان تبدیل شدند، انتظار داریم که عملگرهای تحول با قرار دادن فرضیات انجام شده نیز به عملگر تحول زمانی نوسانگر هماهنگ مستقل از زمان تبدیل شود. با اعمال فرضیات حالت خاص در عملگرهای تحول زمانی داریم

$$\left.\begin{array}{l}A(t)=-i\omega t,\\ B(t)=\dfrac{-i\omega t}{2},\end{array}\right\}\rightarrow \quad ۴۵$$
$$U_{cm}=\exp\left(-i\omega t\left(\aleph_{cm}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

و همچنین برای قسمت نسبی نیز داریم

$$\left.\begin{array}{l}g(t)=0,\ \gamma_1(t)=0,\ \gamma_2(t)=0,\\ \gamma_3(t)=-i\omega t,\ \gamma_4(t)=-i\dfrac{\omega}{2},\end{array}\right\}\rightarrow \quad ۴۶$$
$$U_{rel}=\exp\left(-i\omega t\left(\aleph_{rel}+\frac{1}{2}\right)\right).$$

که در هر دو حالت به جواب‌های شناخته شده و مورد انتظار رسیدیم.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم بس‌ذره‌ای مورد بررسی قرار گرفت که علاوه بر اینکه تحت یک برهم‌کنش محبوس کننده وابسته به زمان قرار داشت، تحت میدان الکتریکی وابسته به زمان هم نیز بود. این در حالی است که ذرات این سیستم بین خود برهم‌کنشی دو به دو وابسته به زمان را حس می‌کردند. این چنین سیستمی از دو دیدگاه مورد بررسی تحول زمانی قرار گرفت و تابع موج وابسته به زمان آن به‌دست آمد. برای این منظور از روش‌های ناوردای پویا و عملگر تحول زمانی استفاده گردید. فرم صریح این عملگرها را به‌صورت دقیق به‌دست آوردیم. همچنین نتایج به‌دست آمده در حالتی خاص بررسی شدند و نشان داده شد که در این حالت جواب‌های به‌دست آمده با جواب‌های شناخته شده تطابق دارد.

سپاس‌گزاری

نویسندگان این مقاله از داورانی که صادقانه نظراتی را در جهت بهبود این مقاله ارائه کردند تشکر و قدردانی می کنند.

مرجع‌ها

[1] H. Dekker, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator, *Physics Reports* **80** (1981) 1-110.

[2] C.I. Um, K. Yeon, T.F. George, The quantum damped harmonic oscillator, *Physics Reports* **362** (2002) 63-192.

[3] M. Maamache, A. Bounames, N. Ferkous, Comment on “Wave functions of a time-

[13] G.S. Agarwal, S.A. Kumar, Exact quantum-statistical dynamics of an oscillator with time-dependent frequency and generation of nonclassical states, *Physical Review Letters* **67** (1991) 3665.

[14] H.P. Yuen, Two-photon coherent states of the radiation field, *Physical Review A* **13** (1976) 2226.

[15] W. Paul, Electromagnetic traps for charged and neutral particles, Review of Modern Physics, **62** (1990) 531.

[16] L.S. Brown, Quantum motion in a Paul trap, *Physical Review Letters* **66** (1991) 527

[17] S.A. Fulling, Aspects of Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[18] D.G. Vergel, E.J. Villasenor, The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory, *Annals of Physics* **324** (2009) 1360.

[19] Y.Q. Li, X.Y. Pan, V. Sahni, Wave function for time-dependent harmonically confined electrons in a time-dependent electric field, *The Journal of Chemical Physics* **139** (2013) 114301.

[20] H.R. Lewisand, W.B. Riesenfeld, An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field, *Journal of Mathematical Physics* **10** (1969) 1458.

[21] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Two-dimensional linear dependencies on the coordinate time-dependent interaction in relativistic non-commutative phase space, *Communications in Theoretical Physics* **64** (2015) 263-268.

[22] J. Wei, E. Norman, Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations, *Journal of Mathematical Physics* **4** (1963) 575.

dependent harmonic oscillator in a static magnetic field", *Physical Review A* **73** (2006) 016101.

[4] C.M.A. Dantas, I.A. Pedrosa, B. Baseia, Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential, *Physical Review A* **45** (1992) 1320.

[5] I.A. Pedrosa, Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency, *Physical Review A* **55** (1997) 3219.

[6] L.H. Yu, C.P. Sun, Evolution of the wave function in a dissipative system, *Physical Review A* **49** (1994) 592.

[7] J.Y. Ji, J.K. Kim, S.P. Kim, Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillatorm, *Physical Review A* **51** (1995) 4268.

[8] B. Remaud, E.S. Hernandez, Damping of wave packet motion in a general time-dependent quadratic field *Journal of Physics A: Mathematical and General* **13** (1980) 2013.

[9] I.A. Pedrosa, G.P. Serra, I. Guedes, Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation, *Physical Review A* **56** (1997) 4300.

[10] J.R. Choi, Exact quantum theory of noninteracting electrons with time-dependent effective mass in a time-dependent magnetic field, *Journal of Physics: Condensed Matter* **15** (2003) 823.

[11] G. Harari, Y. Ben-Aryeh, A. Mann, Propagator for the general time-dependent harmonic oscillator with application to an ion trap, *Physical Review A* **84** (2011) 062104.

[12] R.J. Glauber, Photon Correlations, *Physical Review Letters* 10 (1963) 84.

[23] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Rashba Effect in Presence of Time-Dependent Interaction *Communications in Theoretical Physics*, **65** (2015) 543.

[24] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Study of Time Evolution for Approximation of Two-Body Spinless Salpeter Equation in Presence of Time-Dependent Interaction, **2016** (2016) 3647392.

[25] L. Naderi, H. Hassanabadi, H. Sobhani, Bohr Hamiltonian with time-dependent potential, *International Journal of Modern Physics E* **25** (2016) 1650029.

[26] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Davydov–Chaban Hamiltonian in presence of time-dependent potential, *Physics Letters B* **760** (2016) 1–5.

A quantum many-body system with effective variable mass in the presence of time-dependent relative harmonic oscillator and electric field

Hadi Sobhani*, Hassan Hassanabadi

Physics Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Received: 18.11.2015 Final revised: 20.07.2016 Accepted: 29.05.2017

Abstract

In this article, a quantum many body system has been considered. Then two time-dependent interactions have been added to the system. Changing of the interactions have been assumed in general form. After that, by using algebraic method, time evolution of this many body system has been investigated. In order to study the time evolution, Lewis-Riesenfeld dynamical invariant and time evolution operator methods have been used. Appropriate dynamical invariants have been constructed and their Eigen values have been derived as well as appropriate time evolution operators have been constructed. At the end, a comparison has been done between the results considering a special case.

Keywords: Quantum many body system, time-dependent harmonic oscillator interaction, time-dependent electric field, Schrödinger equation, Lewis-Riesenfeld dynamical invariant, time evolution operator

*Corresponding Author: hadisobhani8637@gmail.com