

## سیستم بس ذره‌ای کوآنتومی با جرم مؤثر متغیر در حضور برهم‌کنش نوسانگر

## هماهنگ‌نسی و میدان الکتریکی وابسته به زمان

هادی سبحانی\*، حسن حسن آبادی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دریافت: ۱۳۹۴/۰۸/۲۷ ویرایش نهایی: ۱۳۹۵/۰۴/۳۰ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۰۸

## چکیده

در این مقاله یک سیستم کوآنتومی بس ذره‌ای در نظر گرفته شده است. سپس به آن سیستم دو برهم‌کنش وابسته به زمان نوسانگر هماهنگ و میدان الکتریکی اضافه می‌گردد. نوع تغییرات آنها به صورت کاملاً عمومی فرض شده است. سپس با استفاده از روش‌های جبری، تحول زمانی این سیستم بس ذره‌ای کوآنتومی بررسی می‌گردد. برای مطالعه این تحول زمانی از روش‌های ناوردای پویای لوییس و رزنفلد و عملگر تحول زمانی استفاده شده است. ناوردهای مناسب ساخته شده و ویژه توابع آنها به دست آورده شده‌اند. همچنین عملگرهای مناسب تحول زمانی ساخته شده‌اند. در انتها مقایسه بین جواب‌ها با در نظر گرفتن حالتی خاص ارائه شده است.

**کلیدواژه‌گان:** سیستم بس ذره‌ای کوآنتومی، برهم‌کنش نوسانگر هماهنگ وابسته به زمان، میدان الکتریکی وابسته به زمان، معادله شرودینگر، ناوردای پویای لوییس و رزنفلد، عملگر تحول زمانی

## مقدمه

قابل توجهی در اپتیک کوآنتومی [۱۴-۱۲]، تله‌های پائول [۱۵-۱۶] و نظریه میدان‌های کوآنتومی [۱۷-۱۸] دارند. روشی که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد موسوم به روش ناوردای پویا لوییس-رزنفلد می‌باشد. این روش که در سال ۱۹۶۹ توسط لوییس و رزنفلد بنیان‌گذاری شد به بررسی سیستم‌های کوآنتومی می‌پردازد که در آنها برهم‌کنش وابسته به زمان وجود دارد، این روش توسط فیزیکدانان متعددی مورد استفاده قرار گرفته است که در ادامه به آنها اشاره می‌شود.

لوییس و رزنفلد ضمن معرفی روش ناوردای پویا، یک نوسانگر هماهنگ که دارای بسامد زاویه‌ای وابسته به زمان است و همچنین ذره‌ای که در میدان مغناطیسی وابسته به زمان قرار داد را بررسی کردند [۲۰]. با استفاده از روشی مشابه با مآماخ و همکاران، نوسانگر هماهنگ وابسته به

یکی از مهمترین و در عین حال جذاب‌ترین سیستم‌های کوآنتومی، سیستم‌های کوآنتومی محبوس شده با جرم متغیر است، به خصوص نوسانگرهای هماهنگ با جرم وابسته به زمان [۲-۱]. در این زمینه مطالعات زیادی انجام شده و به رشته تحریر در آمده که در مراجع [۱۱-۳] به نمونه‌هایی از این مطالعات اشاره شده است. وابستگی جرم سیستم به زمان را می‌توان این گونه برداشت کرد که در این سیستم تبادل انرژی به محیط صورت می‌گیرد، چه به صورت افزایشی و چه به صورت کاهش [۸]. این چنین مدل‌سازی همچنین اجازه می‌دهد که برهم‌کنش الکترون‌ها و یک محیط پویا مثل محیطی با دما یا فشار و یا انرژی متغیر را با آن تشریح کرد [۱۰]. از طرف دیگر، سیستم‌هایی که در آنها برهم‌کنش‌های وابسته به زمان حضور دارد، کاربردهای

\* نویسنده مسئول: hadisobhani8637@gmail.com

### سیستم بس ذره در حضور برهم کنش‌ها

سیستمی بس ذره‌ای را در نظر بگیرید که بر آن یک برهم کنش محبوس کننده و همچنین میدان الکتریکی که با زمان می‌تواند تغییر کند، اعمال می‌شود. همچنین ذرات سیستم نیز بدون برهم کنش نیستند و باهم در حال برهم کنش می‌باشند. هامیلتونی این سیستم در حالت کلی به صورت زیر است [۱۹]

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{p_i^2}{m(t)} + \tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{r}_i \right) + \sum_{i \neq j} u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{r} \quad ۱$$

که در آن  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{f}(t) / q$  می‌باشد. برای سهولت فرض می‌کنیم که عامل تانسوری برهم کنش محبوس کننده قطری باشد. یعنی

$$\tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{r}_i = m(t) [\omega_x^2(t) x_i^2 + \omega_y^2(t) y_i^2 + \omega_z^2(t) z_i^2] \quad ۲$$

همچنین برهم کنش نسبی ذرات به صورت

$$u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} k(t) |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 \quad ۳$$

باشد. با جای‌گذاری ۲ و ۳ در معادله ۱ داریم

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{p_i^2}{m(t)} + m(t) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2 \right) + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} k(t) |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{r}_i \quad ۴$$

که در این مقاله فرض ما بر این است که ذرات هم جرم هستند. بررسی تحول زمانی این چنین سیستمی که به طور صریح وابسته به زمانی است نیاز به معادله وابسته به زمان شرودینگر دارد

زمانی را بررسی کردند که در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار داشت [۳]. پدروسا با در نظر گرفتن یک نوسانگر وابسته به زمان به کمک روش ناوردای پویا، تابع موج وابسته به زمان این نوسانگر را به دست آورد. سپس به بررسی حالت‌های هم‌دوس چنین نوسانگری پرداخت [۵]. همچنین ما در کارهای اخیر خود سیستم‌های نسبیتی و غیر نسبیتی را در حضور برهم کنش وابسته به زمان با استفاده از همین روش مورد بررسی قرار داده‌ایم، که از آن جمله سیستم‌های فرمیونی نسبیتی در فضای جابه‌جایی و ناجابه‌جایی تحت تأثیر برهم کنش وابسته به زمان [۲۱]، اثر راشبا در حضور برهم کنش وابسته به زمان [۲۳]، سیستم بوزونی نسبیتی که تحت تأثیر میدان الکتریکی وابسته به زمان قرار گرفته است [۲۴]، همچنین هسته‌هایی که ناپایدار هستند، با استفاده از برهم کنش وابسته به زمان و سود جستن از روش ناوردای پویا و هامیلتونی‌های بوه‌ر [۲۵] [و دیویدو-چبان [۲۶] ناپایداری آنها مدل‌سازی شدند.

در این مقاله ما بر آن هستیم که یک سیستم بس ذره‌ای را در نظر بگیریم. سپس بر این سیستم یک برهم کنش محبوس کننده وابسته به زمان، همچنین برهم کنشی نسبی وابسته به زمان را هم لحاظ می‌کنیم. این در حالی است که ما علاوه بر این برهم کنش‌ها یک میدان الکتریکی وابسته به زمان هم بر این سیستم اعمال می‌کنیم. تحول زمانی این چنین سیستمی را به وسیله تئوری ناوردای پویا و عملگر تحول زمانی بررسی خواهیم کرد. ناوردای پویای مناسب و همچنین عملگر تحول زمانی مناسب این سیستم‌ها ساخته شده و جزئیات آن در ادامه خواهد آمد.

همیلتونی نیز تبدیل به  $N$  نوسانگر جدا از هم تبدیل می‌شود

$$H_{rel} = \sum_{i=2} \frac{(\mathbf{P}^{(i)})^2}{2\mu_i(t)} + \eta_i(t) (\mathbf{R}^{(i)})^2 \quad ۱۰$$

همیلتونی مرکز جرم و نسبی هر کدام به‌طور مستقل عمل می‌کنند و بایستی به‌صورت جدا از هم بررسی شوند. تابع موج نهایی این سیستم از حاصلضرب تابع موج مربوط به قسمت مرکز جرم و نسبی به‌دست می‌آید

$$\Psi_{total} = \Psi_{cm} \Psi_{rel}$$

بررسی مستقیم این سیستم‌ها با معادله ۵ کاری دشوار است ولی می‌توان با استفاده از واقعیات مکانیک کوانتومی به‌طور غیرمستقیم تحول زمانی این چنین سیستم‌هایی را بررسی کرد. این روش که ناوردای پویا لوویس-رنفلد نام دارد در قسمت بعدی تشریح شده و از آن برای بررسی تحول زمانی سیستم استفاده می‌شود.

**روش ناوردای پویا لوویس-رنفلد و بررسی**

### تحول زمانی سیستم بس‌ذره‌ای

در سال ۱۹۶۹ لوویس و رنفلد روشی را بنیان‌گذاری کردند [۲۰] که در آن با استفاده از ماهیت مکانیک کوانتومی به بررسی تحول زمانی سیستم‌هایی که به‌طور صریح وابسته به زمان هستند و این وابستگی زمانی غیر قابل تقریب زدن و یا حذف کردن باشد، پرداختند. این تئوری با معرفی عملگر هرمیتی ناوردای پویا با تحول زمانی زیر شروع می‌شود

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad ۱۱$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad ۵$$

قبل از آن‌که به بررسی تحول زمانی سیستم مورد نظر پردازیم بایستی به فرم ساده‌تری از همیلتونی دسترسی پیدا کنیم که کار را برای ما آسان‌تر کند. لذا مختصات ژاکوبی این سیستم بس‌ذره‌ای را معرفی می‌کنیم [۱۹]

$$\mathbf{R}^{(1)} \equiv \mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{r}_i, \quad \hat{\mathbf{P}}^{(1)} \equiv \hat{\mathbf{P}} = \sum_i \hat{\mathbf{p}}_i \quad ۶$$

$$X^{(2)} = x_1 - x_2,$$

$$X^{(3)} = x_1 + x_2 - 2x_3,$$

.

.

.

$$X^{(N)} = x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} - (N-1)x_N$$

بدیهی است که برای دیگر مختصات نیز به‌طور مشابهی کار را انجام می‌دهیم یعنی  $Z^{(2)}, \dots, Z^{(N)}$ ،  $Y^{(2)}, \dots, Y^{(N)}$  و  $P^{(2)}, \dots, P^{(N)}$  مشابه ۷ تعریف می‌شوند. با اعمال این تغییرات شکل نهایی همیلتونی به‌صورت

$$H = H_{cm} + H_{rel} \quad ۸$$

قابل تفکیک خواهد بود. نکته جالب توجه این است که اثر میدان الکتریکی فقط بر قسمت مرکز جرم وارد می‌شود

۹

$$H_{cm} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M(t)} + \frac{M(t)}{2} [\omega_X^2(t) X^2 + \omega_Y^2(t) Y^2 + \omega_Z^2(t) Z^2] - \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{R}$$

در معادله فوق مجموع جرم‌ها و مؤلفه‌های میدان الکتریکی متغیر با حروف بزرگ نمایش داده شده است. قسمت نسبی

با انجام مختصر اعمال ریاضی و اثر دادن معادله ۱۱ بر روی یک کت دلخواه داریم

$$i\hbar \frac{\partial(I|\Psi\rangle)}{\partial t} = H(I|\Psi\rangle) \quad 12$$

معادله فوق این مطلب را می‌رساند که با اثر این عملگر بر روی کت حالت نیز در معادله تحول زمانی صدق می‌کند. برای اینکه از چگونگی این عملکرد اطلاع یابیم بایستی کت حالت را بر اساس ویژه کت‌های این عملگر بنویسیم:

$$I(t)|\lambda, \kappa\rangle = \lambda|\lambda, \kappa\rangle \quad 13$$

در اینجا  $\lambda$  ویژه مقدار عملگر ناوردای پویا و  $\kappa$  نماد هر عدد کوآتومی دیگر است. در این حالت کت حالت سیستم را می‌توان بر اساس ویژه کت‌های عملگر ناوردای پویا این چنین نوشت

$$|\Psi\rangle = \sum_{\lambda, \kappa} c_{\lambda, \kappa} e^{i\alpha_{\lambda, \kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle \quad 14$$

که محاسبه قسمت فازی زمانی اجباری نیست. این فاز از رابطه ۱۵ قابل محاسبه است.

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda, \kappa}(t)}{dt} = \langle \lambda, \kappa | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \lambda, \kappa \rangle \quad 15$$

نکته حائز اهمیت در مورد استفاده از این روش این است که ناوردای پویا برای یکی سیستم به صورت منحصر به فرد و یکتا تعریف نمی‌شود. به عبارت دیگر هر عملگری را که شرایط حاکم (هرمیتی بودن و رابطه تحول زمانی ۱۱) بر ناوردای پویا را داشته باشد می‌تواند، مبنای استفاده از این روش قرار گیرد. ما در این مقاله برای پیدا کردن ناوردای پویا ابتدا آن را به صورت کاملاً خام و با الهام از عوامل تأثیر گذار در هامیلتونی پیشنهاد می‌دهیم. خام بودن ناوردای پویا

بدین معنی است که در شکل اولیه، این عملگر دارای ضرایبی می‌باشد که نا معلوم است و این ضرایب با استفاده از شرایط حاکم بر ناوردای پویا تعیین می‌شود. پس از معلوم شدن ناوردای پویای مناسب برای مسئله، اقدام به یافتن ویژه توابع آن می‌کنیم تا بتوانیم تابع موج را بر اساس ویژه توابع این عملگر بنویسیم.

در ابتدا قسمت نسبی را مورد بحث قرار می‌دهیم. چون نوسانگرها مستقل از هم هستند لذا ناوردای پویا برای قسمت نسبی از مجموع ناوردهای پویای هر قسمت، همچنین تابع موج نهایی قسمت نسبی، از حاصلضرب تابع موج هر نوسانگر به دست می‌آید

$$I_{rel-tot} = \sum_{i=2}^N I^{(i)}, \quad \Psi_{rel} = \prod_{i=2}^N \Psi^{(i)} \quad 16$$

پس ما در اینجا یک نوسانگر وابسته به زمان را در حالت کلی مورد بحث قرار می‌دهیم. یک نوسانگر وابسته به زمان را در نظر بگیرد. هامیلتونی این نوسانگر به صورت

$$H(q, t) = \frac{P_q^2}{2\mu(t)} + \frac{\mu(t)\omega^2(t)q^2}{2} \quad 17$$

می‌باشد. ناوردای پویا را بدین گونه پیشنهاد می‌دهیم

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \xi_1(t)P_q^2 + \xi_2(t)\{q, P_q\} \\ + \xi_3(t)q^2 \end{array} \right] \quad 18$$

که ضرایب توابعی حقیقی از زمان هستند. این ضرایب با استفاده از معادله ۱۱ به دست می‌آیند. با انجام این محاسبات داریم

پس در نهایت شکل ناوردای پویا به صورت زیر خواهد شد

$$I(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho^2(t) P_q^2 \\ \left( \frac{1}{\rho^2(t)} + \mu^2(t) \dot{\rho}^2(t) \right) q^2 \\ -\rho(t) \dot{\rho}(t) \mu(t) \{q, P_q\} \end{bmatrix}. \quad 20$$

به عنوان نتیجه این قسمت، به راحتی می‌توان دید که اگر جرم مستقل از زمان در نظر گرفته شود، نتیجه همانند نتیجه‌ای می‌شود که لویس و رزنفلد به دست آورده بودند. قبل از محاسبه ویژه توابع عملگر ناوردای پویا از تبدیل یکانی

$$U_q = \exp\left(\frac{i\mu(t)\dot{\rho}(t)}{2\hbar\rho(t)} q^2\right) \quad 21$$

بهره می‌بریم. این تبدیل عملگر ناوردای پویا را به فرم ساده‌تری تبدیل می‌کند. با استفاده از  $I'_q = U_q I_q U_q^\dagger$  داریم

$$I'_q(t) = \frac{1}{2} \left[ \rho^2(t) P_q^2 + \frac{q^2}{\rho^2(t)} \right] \quad 22$$

همچنین برای ویژه توابع، که با استفاده از تبدیل یکانی داریم  $\Phi_q = U_q \Phi'_q$ . پس معادله ویژه مقدرای ناوردای پویا در نهایت می‌شود

$$I'_q \Phi'_q = \lambda_q \Phi'_q \quad 23$$

که صورت دیفرانسیلی آن به صورت

$$\frac{d^2 \Phi'_q}{d\xi^2} + \frac{1}{\hbar^2} (2\lambda_q - \xi^2) \Phi'_q = 0 \quad 24$$

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= -2 \frac{\xi_3(t)}{\mu(t)}, \\ \xi_2(t) &= 2 \xi_3(t) \mu(t) \omega^2(t), \\ \xi_3(t) &= m(t) \omega^2(t) \xi_1(t) - \frac{\xi_2(t)}{m(t)}. \end{aligned} \quad 19$$

دستگاه معادلات جفت شده فوق را می‌توان با استفاده از تعریف یک تابع واسط حل کرد. بدین معنی که ابتدا ضرایب را بر حسب تابع واسطی به دست می‌آوریم و در انتها قیدی برای این تابع واسط پیدا می‌کنیم. این تابع واسط را به صورت  $\xi_1(t) = \rho^2(t)$  تعریف می‌کنیم. با قرار دادن در اولین رابطه از دستگاه معادلات ۱۹ ضریب نامعین دیگری مشخص می‌شود

$$\xi_3(t) = -\rho(t) \dot{\rho}(t) \mu(t),$$

با قرار دادن  $\xi_3(t)$  در سومین معادله از دستگاه معادلات ۱۹ داریم

$$\xi_2(t) = \rho(t) \left( \begin{array}{l} \mu^2(t) \omega^2(t) + \\ \rho(t) \dot{\mu}(t) \mu(t) + \\ \mu^2(t) \ddot{\rho}(t) \end{array} \right) + \mu^2(t) \dot{\rho}^2(t).$$

اگر  $\xi_2(t)$  را در دومین معادله از دستگاه معادلات ۱۹ قرار دهیم، می‌توان قیدی برای تابع واسط به دست آورد که برابر است با

$$\ddot{\rho}(t) + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \dot{\rho}(t) + \omega^2(t) \rho(t) = \frac{1}{\mu^2(t) \rho^3(t)}.$$

همچنین با سود جستن از رابطه قیدی حاکم بر تابع واسط می‌توان  $\xi_2(t)$  را باز نویسی کنیم

$$\xi_2(t) = \frac{1}{\rho^2(t)} + \mu^2(t) \dot{\rho}^2(t).$$

$$H_X = \hbar\omega_X(t) \left( \mathfrak{N}_X + \frac{1}{2} \right)$$

۲۹

$$- \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}} (a_X + a_X^\dagger) f_X(t)$$

برای بررسی تحول زمانی معادله ۲۹، ناوردای پویا را بدین صورت پیشنهاد می‌دهیم [۲۱]

$$I_{cm}(t) = \theta(t)\mathfrak{N}_X + \mathcal{G}(t)(a_X + a_X^\dagger) + v(t)(a_X^\dagger - a_X) + \delta(t) \quad ۳۰$$

با استفاده از معادله ۱۱ داریم

$$g(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}} f(t),$$

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \dot{\theta}(t)\mathfrak{N}_X + \dot{\mathcal{G}}(t)(a_X + a_X^\dagger) + \dot{v}(t)(a_X^\dagger - a_X) + \dot{\delta}(t),$$

$$[I(t), H(t)] = 2v(t)g(t) - (a_X^\dagger - a_X)(\theta(t)g(t) - \hbar\omega_X(t)(\mathcal{G}(t) + v(t))).$$

با جای‌گذاری روابط فوق در معادله ۱۱ داریم

$$\mathfrak{N}(\dot{\theta}(t)) + (a_X^\dagger - a_X) \begin{pmatrix} \dot{v}(t) - \hbar\omega_X(t)(v(t) + \mathcal{G}(t)) \\ -\theta(t)g(t) \end{pmatrix} + (a_X + a_X^\dagger)(\dot{\mathcal{G}}(t) + \dot{\delta}(t) + 2v(t)g(t)) = 0.$$

رابطه فوق دلالت بر این دارد که

۳۱

$\theta = \text{Constant}$ ,

$\mathcal{G} = \text{Constant}$ ,

$$v(t) = \text{Re} \left[ \frac{1}{e^{i\int \omega_X(t) dt}} \left( -i \int e^{i\int \omega_X(t) dt} \left( \mathcal{G}\omega_X(t) + \frac{\theta g(t)}{\hbar} \right) dt \right) \right] + \text{Constant},$$

$$\delta(t) = -2 \int g(t)v(t) dt + \text{Constant}.$$

است که در آن  $\xi = \frac{q}{\rho}$ . این معادله دارای جواب زیر

است:

۲۵

$$\Phi'_{q,n}(q) = \left( \frac{q}{\rho_R} \right) \exp \left[ \frac{-1}{2\hbar} \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 \right] L_n^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\hbar} \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 \right],$$

$$\lambda_{n,q} = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

و با استفاده از رابطه ۱۵ داریم:

$$\alpha_{n,q}(t) = - \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{\mu(t)\rho^2(t)} \quad ۲۶$$

با قراردادن این اطلاعات در معادله ۱۴ تابع موج نهایی این قسمت به دست می‌آید. می‌توان دید که این محاسبات با در نظر گرفتن

$$\frac{\mu_i(t)\omega^2(t)}{2} \rightarrow \eta_i(t) \quad ۲۷$$

قسمت نسبی هامیلتونی را پوشش می‌دهد. با استفاده از عملگرهای خلق و فناى زیر:

$$a_X^\dagger = \sqrt{\frac{M(t)\omega_X(t)}{2\hbar}} \left( X - i \frac{P_X}{M(t)\omega_X(t)} \right),$$

$$a_X = \sqrt{\frac{M(t)\omega_X(t)}{2\hbar}} \left( X + i \frac{P_X}{M(t)\omega_X(t)} \right),$$

$$\mathfrak{N}_X = a_X^\dagger a_X,$$

۲۸

$$[\mathfrak{N}_X, a_X] = -a_X,$$

$$[\mathfrak{N}_X, a_X^\dagger] = a_X^\dagger,$$

$$[a_X, a_X^\dagger] = 1.$$

می‌خواهیم هامیلتونی مرکز جرم را در یک بعد ساده‌تر

بنویسیم

$$i\hbar \frac{\partial U(0,t)}{\partial t} = HU(0,t) \quad ۳۴$$

خاصیت یکانی بودن این عملگر اجازه می‌دهد که رابطه ۳۴ را به صورت [۲۲]

$$i\hbar \frac{\partial U(0,t)}{\partial t} U^{-1}(0,t) = H \quad ۳۵$$

بنویسیم. نکته مهم این است که چون مؤلفه‌های مکان مستقل از هم هستند، همانند تابع موج، عملگر تحول زمانی کل از حاصل ضرب عملگر تحول زمانی مربوط به هر مؤلفه به دست می‌آید. خوب است که با این روش نیز به بررسی تحول زمانی قسمت‌های نسبی و مرکز جرم هامیلتونی پردازیم. در ابتدا می‌خواهیم عملگر تحول زمانی مربوط به قسمت نسبی را به دست آوریم. همانند قسمت قبل چون قسمت نسبی به صورت مجموعه‌ای از نوسانگرهای وابسته به زمان درآمده بود، لذا این عملگر را در حالت کلی به دست می‌آوریم. با استفاده از عملگرهای خلق و فنا هامیلتونی ۱۷ را بازنویسی می‌کنیم

$$H = \hbar\omega(t)\left(\mathcal{N}_{rel} + \frac{1}{2}\right) \quad ۳۶$$

نحوه پیشنهاد دادن شکل عملگر تحول زمانی همانند قسمت ناوردای پویا کاملاً حدسی می‌باشد به گونه‌ای که در معادله ۳۵ بتواند صدق کند. با پیشنهاد دادن عملگر تحول زمانی به صورت

$$U_{t-rel} = \exp(A(t)\mathcal{N}_{rel} + B(t)) \quad ۳۷$$

و استفاده از رابطه ۳۵ داریم

این نکته را در اینجا یادآوری می‌کنیم که بایستی عملگر ناوردای پویا هرمیتی باشد، به همین دلیل تنها قسمت حقیقی جواب برای  $v(t)$  که از حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به دست می‌آید، قابل قبول است زیرا باعث می‌شود که این عملگر هرمیتی بماند.

ویژه تابع‌های ناوردای پویا را بر اساس ویژه حالت‌های نوسانگر می‌نویسیم

$$|\lambda, \kappa; t\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$$

که در آن  $C_n$  مقداری ثابت است. با اثر دادن ۳۰ بر روی آن داریم

$$\begin{aligned} |\lambda, \kappa; t\rangle = & \sum_n C_n (\theta n |n\rangle + \vartheta(\sqrt{n} |n-1\rangle \\ & + \sqrt{n+1} |n+1\rangle) + v(t)(\sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ & - \sqrt{n} |n-1\rangle) + \delta(t) |n\rangle \end{aligned} \quad ۳۲$$

با قراردادن ۳۲ در ۱۴ تابع موج این قسمت نیز به دست خواهد آمد. برای مؤلفه‌های دیگر نیز مانند همین مؤلفه می‌باشد که تابع نهایی از حاصل ضرب آنها به دست می‌آید.

### عملگر تحول زمانی و تابع موج وابسته به زمان

تابع موج وابسته به زمان علاوه بر این که می‌تواند به صورت مستقیم از معادله وابسته به زمان شرودینگر محاسبه شود، از اثر کردن عملگر تحول زمانی بر یک تابع موج در لحظه اولیه نیز می‌تواند به دست آید [۲۲]

$$\Psi(x,t) = U_t(0,t)\Psi(x,0) \quad ۳۳$$

که عملگر تحول زمانی  $U_t(0,t)$  نیز معادله ۵ را ارضا می‌نماید

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} &= \\
 i\hbar &\left( \begin{aligned} &\dot{\gamma}_1(t)a_X^\dagger + \dot{\gamma}_2(t)(a_X - \gamma_1(t)) \\ &+ \dot{\gamma}_3(t)(\mathfrak{N}_{X,cm} - \gamma_1(t)a_X^\dagger + \gamma_2(t)(a_X - \gamma_1(t))) + \dot{\gamma}_4(t) \end{aligned} \right) \\
 &= (\dot{\gamma}_1(t) - \dot{\gamma}_3(t)\gamma_1(t))a_X^\dagger + (\dot{\gamma}_2(t) + \dot{\gamma}_3(t)\gamma_2(t))a_X \\
 &\quad + (\dot{\gamma}_3(t))\mathfrak{N}_{X,cm} + (\dot{\gamma}_4(t) - \dot{\gamma}_2(t)\gamma_1(t) - \dot{\gamma}_3(t)\gamma_2(t)\gamma_1(t)) \\
 &= (\hbar\omega_X(t))\mathfrak{N}_{X,cm} + \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}} f_X(t)(a_X + a_X^\dagger) + \frac{\hbar\omega_X(t)}{2}.
 \end{aligned}$$

با تساوی قرار دادن ضرایب در دو طرف تساوی به راحتی می‌توان ضرایب نامعلوم را به صورت زیر استخراج کرد. در روابط زیر برای سهولت، ثابت‌های انتگرال‌گیری صفر لحاظ شده است.

۴۲

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}} f_X(t), \\
 \gamma_1(t) &= \exp\left(-i \int \omega_X(t) dt\right) \left[ \frac{1}{i\hbar} \int g(t) \exp\left(i \int \omega_X(t) dt\right) dt \right], \\
 \gamma_2(t) &= \exp\left(i \int \omega_X(t) dt\right) \left[ \frac{1}{i\hbar} \int g(t) \exp\left(-i \int \omega_X(t) dt\right) dt \right], \\
 \gamma_3(t) &= -i \int \omega_X(t) dt, \\
 \gamma_4(t) &= -i \int \left( \frac{\gamma_1(t)g(t)}{\hbar} - \frac{\omega_X(t)}{2} \right) dt.
 \end{aligned}$$

با این پارامترها می‌توان به شکل صریح عملگر تحول زمانی دست یافت.

### مقایسه نتایج به دست آمده

برای مقایسه تابع موج‌های به دست آمده توسط روش‌های ناوردای پویا و عملگر تحول زمانی، با در نظر گرفتن حالتی خاص نشان می‌دهیم که هر دو روش منجر به نتایجی یکسان می‌شود. برای این کار فرض می‌کنیم که سیستم دارای برهم‌کنش یک بعدی است و  $f(t) = 0$  و  $M(t) = \omega(t) = \text{Constant}$ . در روش ناوردای پویا،

با این فرضیات، هامیلتونی‌ها به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ مستقل از زمان تبدیل می‌شوند

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{t-rel}}{\partial t} &= \exp(A(t)\mathfrak{N}_{rel} + B(t)) \rightarrow \\
 \frac{\partial U_{t-rel}}{\partial t} U_{t-rel}^{-1} &= \exp(A(t)\mathfrak{N}_{rel} + B(t)) (\dot{A}(t)\mathfrak{N}_{rel} + \dot{B}(t)) \exp(-A(t)\mathfrak{N}_{rel} - B(t)) \\
 &= \dot{A}(t)\mathfrak{N}_{rel} + \dot{B}(t)
 \end{aligned}$$

در رابطه اخیر از فرمول بیکر-هاسدروف استفاده شده است. با استفاده از رابطه ۳۵ داریم

$$\begin{aligned}
 i(\dot{A}(t)\mathfrak{N}_{rel} + \dot{B}(t)) &= \omega(t) \left( \mathfrak{N}_{rel} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \\
 A(t) &= -i \int \omega(t) dt + cte, \quad 38 \\
 B(t) &= \frac{-i}{2} \int \omega(t) dt + cte.
 \end{aligned}$$

همین کار را برای معادله ۲۹ می‌توان انجام داد، با این تفاوت که عملگر تحول زمانی به صورت

۳۹

$$\begin{aligned}
 U_{t-cm}(t) &= \\
 &\exp[\gamma_1(t)a_X^\dagger + \gamma_2(t)a_X + \gamma_3(t)\mathfrak{N}_{X,cm} + \gamma_4(t)]
 \end{aligned}$$

پیشنهاد می‌شود. سپس با استفاده از رابطه ۳۵ و فرمول بیکر-هاسدروف داریم

۴۰

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial U_{t-cm}(t)}{\partial t} U_{t-cm}^{-1}(t) &= \\
 i\hbar &\left[ \begin{aligned} &\dot{\gamma}_1(t)a_X^\dagger \\ &+ \dot{\gamma}_2(t)e^{\gamma_1(t)a_X^\dagger} (a_X) e^{-\gamma_1(t)a_X^\dagger} \\ &+ \dot{\gamma}_3(t)e^{\gamma_1(t)a_X^\dagger + \gamma_2(t)a_X} (\mathfrak{N}_{X,cm}) e^{-\gamma_2(t)a_X - \gamma_1(t)a_X^\dagger} \\ &+ \dot{\gamma}_4(t) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

این رابطه به این منتج می‌شود که

۴۱



که در هر دو حالت به جواب‌های شناخته شده و مورد انتظار رسیدیم.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم بس‌ذره‌ای مورد بررسی قرار گرفت که علاوه بر اینکه تحت یک برهم‌کنش محبوس کننده وابسته به زمان قرار داشت، تحت میدان الکتریکی وابسته به زمان هم نیز بود. این در حالی است که ذرات این سیستم بین خود برهم‌کنشی دو به دو وابسته به زمان را حس می‌کردند. این چنین سیستمی از دو دیدگاه مورد بررسی تحول زمانی قرار گرفت و تابع موج وابسته به زمان آن به دست آمد. برای این منظور از روش‌های نوردای پویا و عملگر تحول زمانی استفاده گردید. فرم صریح این عملگرها را به صورت دقیق به دست آوردیم. همچنین نتایج به دست آمده در حالتی خاص بررسی شدند و نشان داده شد که در این حالت جواب‌های به دست آمده با جواب‌های شناخته شده تطابق دارد.

### سپاس‌گزاری

نویسندگان این مقاله از داورانی که صادقانه نظرانی را در جهت بهبود این مقاله ارائه کردند تشکر و قدردانی می‌کنند.

### مرجع‌ها

- [1] H. Dekker, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator, *Physics Reports* **80** (1981) 1-110.
- [2] C.I. Um, K. Yeon, T.F. George, The quantum damped harmonic oscillator, *Physics Reports* **362** (2002) 63-192.
- [3] M. Maamache, A. Bounames, N. Ferkous, Comment on "Wave functions of a time-

$$H_{cm} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{M\omega_X^2 X^2}{2}, \quad (43)$$

$$H_{rel} = \sum_{i=2} \frac{(\mathbf{P}^{(i)})^2}{2\mu_i} + \eta_i (\mathbf{R}^{(i)})^2.$$

به راحتی دیده می‌شود که هامیلتونی می‌تواند نقش نوردای پویا بازی کند و معادله ۱۱ توسط هامیلتونی ارضا می‌شود

$$\frac{\partial H_{cm}}{\partial t} = 0, [H_{cm}, H_{cm}] = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial H_{rel}}{\partial t} = 0, [H_{rel}, H_{rel}] = 0.$$

پس تابع موج در آن حالت، تابع موج نوسانگر هماهنگ می‌باشد که می‌توان آن را برحسب توابع هر میت نوشت. حال که هامیلتونی‌ها به هامیلتونی‌های نوسانگر هماهنگ مستقل از زمان تبدیل شدند، انتظار داریم که عملگرهای تحول با قرار دادن فرضیات انجام شده نیز به عملگر تحول زمانی نوسانگر هماهنگ مستقل از زمان تبدیل شود. با اعمال فرضیات حالت خاص در عملگرهای تحول زمانی داریم

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= -i\omega t, \\ B(t) &= \frac{-i\omega t}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (45)$$

$$U_{cm} = \exp\left(-i\omega t \left(\mathfrak{N}_{cm} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

و همچنین برای قسمت نسبی نیز داریم

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= 0, \gamma_1(t) = 0, \gamma_2(t) = 0, \\ \gamma_3(t) &= -i\omega t, \gamma_4(t) = -i\frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (46)$$

$$U_{rel} = \exp\left(-i\omega t \left(\mathfrak{N}_{rel} + \frac{1}{2}\right)\right).$$

- [13] G.S. Agarwal, S.A. Kumar, Exact quantum-statistical dynamics of an oscillator with time-dependent frequency and generation of nonclassical states, *Physical Review Letters* **67** (1991) 3665.
- [14] H.P. Yuen, Two-photon coherent states of the radiation field, *Physical Review A* **13** (1976) 2226.
- [15] W. Paul, Electromagnetic traps for charged and neutral particles, *Review of Modern Physics*, **62** (1990) 531.
- [16] L.S. Brown, Quantum motion in a Paul trap, *Physical Review Letters* **66** (1991) 527
- [17] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [18] D.G. Vergel, E.J. Villasenor, The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory, *Annals of Physics* **324** (2009) 1360.
- [19] Y.Q. Li, X.Y. Pan, V. Sahni, Wave function for time-dependent harmonically confined electrons in a time-dependent electric field, *The Journal of Chemical Physics* **139** (2013) 114301.
- [20] H.R. Lewisand, W.B. Riesenfeld, An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field, *Journal of Mathematical Physics* **10** (1969) 1458.
- [21] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Two-dimensional linear dependencies on the coordinate time-dependent interaction in relativistic non-commutative phase space, *Communications in Theoretical Physics* **64** (2015) 263-268.
- [22] J. Wei, E. Norman, Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations, *Journal of Mathematical Physics* **4** (1963) 575.
- dependent harmonic oscillator in a static magnetic field", *Physical Review A* **73** (2006) 016101.
- [4] C.M.A. Dantas, I.A. Pedrosa, B. Baseia, Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential, *Physical Review A* **45** (1992) 1320.
- [5] I.A. Pedrosa, Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency, *Physical Review A* **55** (1997) 3219.
- [6] L.H. Yu, C.P. Sun, Evolution of the wave function in a dissipative system, *Physical Review A* **49** (1994) 592.
- [7] J.Y. Ji, J.K. Kim, S.P. Kim, Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillation, *Physical Review A* **51** (1995) 4268.
- [8] B. Remaud, E.S. Hernandez, Damping of wave packet motion in a general time-dependent quadratic field *Journal of Physics A: Mathematical and General* **13** (1980) 2013.
- [9] I.A. Pedrosa, G.P. Serra, I. Guedes, Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation, *Physical Review A* **56** (1997) 4300.
- [10] J.R. Choi, Exact quantum theory of noninteracting electrons with time-dependent effective mass in a time-dependent magnetic field, *Journal of Physics: Condensed Matter* **15** (2003) 823.
- [11] G. Harari, Y. Ben-Aryeh, A. Mann, Propagator for the general time-dependent harmonic oscillator with application to an ion trap, *Physical Review A* **84** (2011) 062104.
- [12] R.J. Glauber, Photon Correlations, *Physical Review Letters* **10** (1963) 84.

[25] L. Naderi, H. Hassanabadi, H. Sobhani, Bohr Hamiltonian with time-dependent potential, *International Journal of Modern Physics E* **25** (2016) 1650029.

[26] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Davydov–Chaban Hamiltonian in presence of time-dependent potential, *Physics Letters B* **760** (2016) 1–5.

[23] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Rashba Effect in Presence of Time-Dependent Interaction *Communications in Theoretical Physics*, **65** (2015) 543.

[24] H. Sobhani, H. Hassanabadi, Study of Time Evolution for Approximation of Two-Body Spinless Salpeter Equation in Presence of Time-Dependent Interaction, **2016** (2016) 3647392.

# **A quantum many-body system with effective variable mass in the presence of time-dependent relative harmonic oscillator and electric field**

**Hadi Sobhani\*, Hassan Hassanabadi**

Physics Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Received: 18.11.2015    Final revised: 20.07.2016    Accepted: 29.05.2017

## **Abstract**

In this article, a quantum many body system has been considered. Then two time-dependent interactions have been added to the system. Changing of the interactions have been assumed in general form. After that, by using algebraic method, time evolution of this many body system has been investigated. In order to study the time evolution, Lewis-Riesenfeld dynamical invariant and time evolution operator methods have been used. Appropriate dynamical invariants have been constructed and their Eigen values have been derived as well as appropriate time evolution operators have been constructed. At the end, a comparison has been done between the results considering a special case.

**Keywords:** Quantum many body system, time-dependent harmonic oscillator interaction, time-dependent electric field, Schrödinger equation, Lewis-Riesenfeld dynamical invariant, time evolution operator

---

\*Corresponding Author: [hadisobhani8637@gmail.com](mailto:hadisobhani8637@gmail.com)