

## فرمول لیفشیتز با استفاده از روش بازبهنجارش جعبه

مریم میرعلائی، رضا معظمی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه قم، قم، ایران

دریافت: 1396/11/16 بازنگری نهائی: 1397/02/25 پذیرش: 1397/03/20

### چکیده

در این مقاله فرمول لیفشیتز برای انرژی کازیمیر بین دو دی‌الکتریک در دمای صفر مطلق با استفاده از روش بازبهنجارش جعبه به دست می‌آید. هر چند که برای محاسبه نیروی کازیمیر در این مورد در منابع مختلف اثبات‌های متعددی ارائه شده است از جمله اثبات خود لیفشیتز، اما ما تاکنون اثبات بدون ابهام و بسیار دقیق برای انرژی ندیده‌ایم. از آنجا که خود انرژی در بعضی موارد، مانند محاسبه آنتروپی یا ظرفیت گرمایی مهم می‌شود، ما اینجا از تعریف صحیح و دقیق انرژی کازیمیر استفاده می‌کنیم و برای اولین بار، کلیه بینهایت‌ها را به صورت سیستماتیک و نه دستی، بدون ابهام حذف خواهیم نمود. این اثبات همچنین قدرت و دقت روش بازبهنجارش جعبه را نشان می‌دهد.

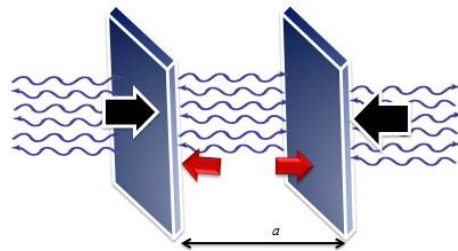
**کلیدواژگان:** انرژی کازیمیر، فرمول لیفشیتز، خلأ کوانتومی، میدان الکترو مغناطیسی، بازبهنجارش جعبه

$$F_{Cas} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240} \frac{1}{a^4} \quad 1$$

### مقدمه

که در آن  $c$  و  $\hbar$  به ترتیب سرعت نور و ثابت پلانک است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این نیرو برای این پیکربندی متناسب با عکس توان چهارم فاصله بین دو صفحه می‌باشد. این پدیده یک اثر کاملاً کوانتومی است که به دلیل اُفت و خیزهای انرژی خلأ کوانتومی به وجود می‌آید. به بیان دیگر انرژی خلأ در حضور و عدم حضور صفحات یکسان نمی‌باشد، طوری که اختلاف این دو انرژی به فاصله بین صفحات بستگی دارد. مشتق این اختلاف نسبت به فاصله  $a$  به ما نیرو می‌دهد. در واقع این اختلاف انرژی، برابر با کاری است که باید صورت پذیرد تا دو صفحه از بی‌نهایت آورده به فاصله  $a$  از یکدیگر قرار داده شوند. این نیرو به علت قدرت جاذبه بالا در فواصل میکرومتری و زیر میکرومتری، در

اثر کازیمیر در سال 1948 میلادی توسط هندریک کازیمیر<sup>1</sup>، فیزیکدان هلندی، معرفی شد [1]. کازیمیر وجود نیروی جاذبه‌ای را بین دو صفحه کاملاً رسانا، بدون بار خالص الکتریکی، موازی و صاف که در دمای صفر مطلق و در فاصله میکرومتری  $a$  در خلأ کوانتومی قرار داده شده‌اند، پیش‌بینی کرد.



شکل 1. نیروی کازیمیر بین دو صفحه رسانا.

طبق محاسبه وی مقدار این نیرو در واحد سطح برابر با

\*نویسنده مسئول: r.moazzemi@qom.ac.ir  
Hendrik Casimir

منظور از  $E_0(a)$  انرژی بین صفحات باشد، انرژی خلأ مربوط به بین صفحات از انرژی کل خلأ بدون صفحه کسر می‌شود که این معنی فیزیکی خاصی ندارد. لذا طبیعی است که انتظار داشته باشیم جواب ایشان بی‌نهایت باشد. در بعضی منابع اثر این اشتباه در تعریف با سایر اشتباهات محاسباتی از بین رفته و در نهایت به فرمول اصلی رسیده‌اند. در برخی منابع دیگر برای برطرف کردن بی‌نهایت‌های مسأله روش‌های پیچیده دیگری مانند روش پراکندگی مُدها [۶،۷] ارائه نموده‌اند. این روش‌ها علاوه بر اختلاف و تفاوتی که با روش معمولی و سرراست کم کردن انرژی‌ها دارند خود نیز دچار ابهام هستند که در ادامه توضیح خواهیم داد. در محاسبه انرژی کازیمیر همواره با تفاضل دو انرژی بی‌نهایت برخورد داریم، که طبیعتاً جواب آن از نظر ریاضی مبهم می‌باشد:

$$E_{Cas} = \frac{\hbar}{2} \sum \omega - \frac{\hbar}{2} \sum \omega_0 \quad 3$$

که در آن  $\omega$  (ها)  $\omega_0$  (ها) مدهای میدان کوانتومی مورد نظر در (عدم) حضور صفحات می‌باشند. برای استخراج جواب فیزیکی از تفاضل دو بی‌نهایت باید بسیار محتاط و دقیق عمل نمود. باید دقت کرد هنگامی که صفحات وجود دارند ما از شرایط مرزی غیربدهی (دیریکله، نیومن و ...) برای به‌دست آوردن انرژی خلأ، استفاده می‌کنیم، اما برای خلأ بدون صفحه معمولاً از شرایط مرزی دوره‌ای استفاده می‌شود. این اختلاف خود ممکن است باعث ابهام در جواب نهایی مسأله شود. به‌عنوان مثال فرمول مرسوم که در مقالات از آن استفاده می‌شود به‌شکل

$$E_{Cas}(a) = E_0(a) - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{a}{L} E_0(L)$$

طراحی سیستم‌های میکرو مکانیکی قابل توجه خواهد بود [2]. اولین آزمایش در سال 1958 میلادی توسط مارکوس اسپارنای<sup>2</sup> به ثبت رسید [3]. هرچند که وی بر مشکلات آزمایشگاهی فایق آمد اما نتیجه آزمایش او همراه خطای 100 درصدی بود، با این وجود نظریه کازیمیر را رد نکرد. بعد از ایشان آزمایشات متعددی برای اثبات اثر کازیمیر انجام شد اما به دلیل خطای بالا مورد اهمیت قرار نگرفتند. در سال 1996 میلادی عمر محی الدین<sup>3</sup> موفق به آزمایشی شد که 99 درصد موافق نظریه پیش بینی شده کازیمیر بود [4].

البته باید توجه داشت که رسانای کامل در طبیعت وجود ندارد. به‌همین علت لیفشیتز<sup>4</sup> در سال 1956 میلادی نیروی کازیمیر را برای دو صفحه دی‌الکتریک ضخیم به‌دست آورد [5]. البته خود او جزئیات محاسبه را در مقاله نیاورده و تنها روش به‌دست آوردن فرمول را بیان کرده است.

بسیاری از نویسندگان سعی کرده‌اند که فرمول وی را به‌روش‌های مختلف به‌دست آورند، به‌عنوان نمونه منابع [6-13] را ببینید. اما در هیچ یک از این منابع، ما روش سیستماتیک و خودسازگاری جهت استخراج این فرمول نیافتیم. به‌عنوان مثال در بعضی منابع نویسندگان از تعریف انرژی کازیمیر به‌صورت

$$E_{Cas}(a) = E_0(a) - \lim_{a \rightarrow \infty} E_0(a) \quad 2$$

استفاده نموده‌اند [8-26]، که اگر منظور از  $E_0(a)$  انرژی بین صفحات باشد، این تعریف با تعریف اصلی آن که تفاضل انرژی نقطه صفر کل خلأ با حضور و عدم حضور صفحات است سازگار نمی‌باشد. در معادله 2 اگر

<sup>4</sup>E. Lifshitz<sup>2</sup>M.J. Sparnaary<sup>3</sup>A.R. Mohiddeen

## بازبهنجارش جعبه

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، برای کم کردن صحیح بی‌نهایت‌ها از یکدیگر (بهنجارش) در دو حالت حضور و عدم حضور صفحات ما کل دستگاه را در هر حالت در یک جعبه قرار می‌دهیم و انرژی کل این دو پیکربندی را از یکدیگر کم می‌کنیم. در حالت اول دو

صفحه موازی در فاصله  $a$  از یکدیگر، در نقاط  $\pm \frac{a}{2}$ ، درون جعبه‌ای با ابعاد  $L \times S$ ، در خلأ قرار داده شده‌اند (شکل 2).  $S$  مساحت دیواره‌های جعبه (یا صفحات) و  $L$  فاصله آنها از هم می‌باشد. در پیکربندی دوم دو صفحه را در فاصله  $b$  از یکدیگر درون جعبه مشابه‌ای قرار می‌دهیم که البته در نهایت برای شرط عدم حضور صفحات  $b$  را به بی‌نهایت میل خواهیم داد (شکل 3). در این بهنجارش انرژی کازیمیر به‌صورت زیر تعریف می‌شود [29-32]:

$$E_{\text{Cas}}(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} [E(a, L) - E(b, L)] \quad 4$$

که در آن  $E(a, L)$  و  $E(b, L)$  به ترتیب انرژی کل پیکربندهای اول و دوم می‌باشند، که اگر  $E(a)$  را مقدار انتظاری انرژی خلأ بین دو صفحه به فاصله  $a$  در نظر بگیریم به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

5

$$E(a, L) = E(a) + 2E\left(\frac{L-a}{2}\right)$$

$$E(b, L) = E(b) + 2E\left(\frac{L-b}{2}\right)$$

باید دقت شود که در این مسئله صفحات را به‌اندازه کافی ضخیم در نظر می‌گیریم که میدان‌ها به‌خوبی در آن افت کرده و میدان‌های بیرون نتوانند به‌داخل نفوذ کنند، همچنین در معادله 5 چون در نهایت  $L$  را به بی‌نهایت میل می‌دهیم ضخامت صفحه‌ها را در معادله وارد نکرده‌ایم (یعنی مثلاً  $L+d$  ننوشتیم). با توجه به‌اینکه هم جنس بودن صفحات منجر به این می‌شود که

است، که هرچند در بسیاری از موارد این فرمول به جواب صحیح می‌انجامد اما در این مسئله به‌دلایلی که ذکر شد هنوز مبهم باقی می‌ماند.

در این مقاله ما قصد داریم با یک روش سیستماتیک و خودسازگار از تعریف اصلی و دقیق انرژی کازیمیر فرمول لیفشیتز را استخراج نماییم. روش ما حذف بی‌نهایت‌ها با بازبهنجارش جعبه می‌باشد [29-32] ایده اساسی ما اینجا این است که با قرار دادن کل سیستم در یک جعبه، در هر دو حالت از یک نوع شرایط مرزی استفاده شود و انتظار داریم که در این صورت بی‌نهایت‌ها به‌صورت سیستماتیک و نه دستی از مسئله حذف شوند. خواهیم دید که بهنجارش جعبه این کار را برای ما انجام می‌دهد. ما ابتدا در بخش بعد انرژی کازیمیر را با روش بازبهنجارش جعبه توضیح می‌دهیم، و در ادامه خواهیم دید که این انرژی به جمع مدها وابسته است. لذا با استفاده از توابع مولد مدها که در پیوست به‌دست می‌آید به اثبات رابطه انرژی لیفشیتز با استفاده از بازبهنجارش جعبه خواهیم پرداخت. لازم به‌ذکر است هر چند فرمول لیفشیتز هم برای دمای صفر و هم برای دمای غیر صفر بیان شده، مسئله‌ای که ما در اینجا به بررسی آن می‌پردازیم در دمای صفر مطلق است، لذا از نظریه میدان کوانتومی استاندارد در دمای صفر استفاده می‌شود و کمینه انرژی کل محاسبه خواهد شد.

## بررسی فرمول لیفشیتز بین دو صفحه دی الکتریک

در این بخش برای به‌دست آوردن فرمول لیفشیتز ابتدا روش بازبهنجارش جعبه را بیان می‌کنیم سپس برای به‌دست آوردن مدها با استفاده از حل معادلات ماکسول شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

انرژی-تکانه استفاده می‌کنیم (روش دیگر، محاسبه مستقیم فشار با استفاده از مؤلفه  $T^{zz}$  می‌باشد)، یعنی

$$E_0 = \langle H \rangle_0 = \langle 0 | T^{00} | 0 \rangle \\ = \langle 0 | \int d^3x T^{00} | 0 \rangle$$

7

که در آن

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \partial_\mu A_\sigma} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathbf{L} \quad 8$$

تانسور چگالی انرژی تکانه می‌باشد و لاگرانژین میدان الکترومغناطیس به صورت

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad 9$$

است، که در آن  $F_{\mu\nu}$  تانسور اندازه میدان می‌باشد که به شکل زیر است

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad 10$$

میدان کوانتومی برداری  $A_\mu$  همان میدان یک فوتون، میدان الکترومغناطیس، می‌باشد. شکل این میدان بعد از کوانتس دوم به صورت

$$A_\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1,2} \left( \frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\mathbf{k}}^s} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \boldsymbol{\varepsilon}_s^\mu(\mathbf{k}) \left[ a_s(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_s^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right] \quad 11$$

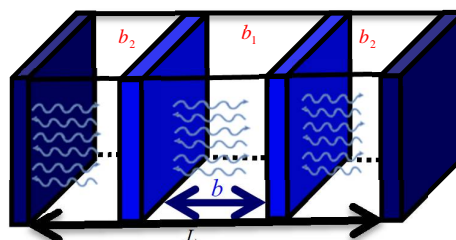
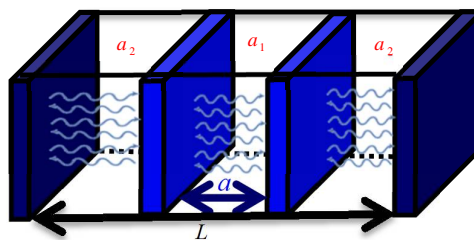
است، که در آن  $s$  شمارنده دو نوع قطبش فوتون است و  $a_s(\mathbf{k})$  و  $a_s^\dagger(\mathbf{k})$  به ترتیب عملگرهای خلق و فنا ی یک فوتون با تکانه  $\mathbf{k}$ ، انرژی  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}^s$  و قطبش  $\boldsymbol{\varepsilon}_s^\mu(\mathbf{k})$  می‌باشند. با استفاده از این میدان و معادله 8 خواهیم داشت

$$T^{00} = \sum_{s\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}^s \left[ a_s^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \quad 12$$

در نتیجه مقدار انتظاری انرژی خلأ، معادله 7، به صورت

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_{s\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^s \quad 13$$

شرایط مرزی یکسانی روی آنها اعمال شود، مزیت این روش در این است که اگر صفحات و دیواره‌های جعبه را مشابه در نظر بگیریم، در هر دو پیکربندی انرژی‌ها با روش‌های شبیه هم به دست می‌آید و انتظار ما این است که جواب نهایی بعد از تفاضل، متناهی و فاقد بی‌نهایت‌های اضافی باشد.



شکل 5. در شکل بالا (پایین) دو صفحه به فاصله  $a$  ( $b$ ) از یکدیگر درون جعبه با ابعاد  $L \times S$  قرار دارند. برای انرژی کازیمیر لازم است تفاضل انرژی کل این دو پیکربندی را به دست آوریم سپس  $L$  و  $b$  را به ترتیب به بی‌نهایت میل دهیم.

لازم به ذکر است برای اینکه در هنگام حدگیری هر دو صفحه به بی‌نهایت برده شوند ما صفحات را در  $\pm \frac{b}{2}$  و  $\pm \frac{a}{2}$  و دیواره‌های جعبه را در  $\pm \frac{L}{2}$  قرار داده‌ایم. همچنین باید دقت شود ابتدا حد  $L \rightarrow \infty$  و سپس حد  $b \rightarrow \infty$  گرفته خواهد شد. نیروی کازیمیر با مشتق گیری از رابطه 4 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_{\text{Cas}}(a) = -\frac{dE_{\text{Cas}}(a)}{da} \quad 6$$

مقدار انتظاری انرژی خلأ و توابع مولد مدها

همان‌طور که ذکر شد برای به دست آوردن نیروی کازیمیر از مشتق انرژی یعنی همان مؤلفه  $T^{00}$  تانسور

می‌باشند. ریشه‌های  $\Delta^{\text{TM,TE}}$  همان مُدهای مجاز می‌باشند. لذا انرژی خلاً میدان الکترومغناطیسی در حضور صفحات دی‌الکتریک واقع در فاصله  $\pm \frac{a}{2}$  در دمای صفر به صورت زیر می‌شود

$$E(a) = \frac{\hbar}{4\pi} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \times \sum_n (\omega_{\kappa_\perp, n}^{\text{TM}} + \omega_{\kappa_\perp, n}^{\text{TE}}) S \quad 18$$

برای محاسبه انرژی می‌توان جمع را طبق اصل آرگومان [34] به یک انتگرال پربندی در فضای مختلط  $\omega$  تبدیل نمود. اصل آرگومان برای یک تابع  $g(z)$  که در ناحیه پربندی تحلیلی می‌باشد، به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\sum_n g(a_n) - \sum_m g(b_m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) d \ln \Delta(z) \quad 19$$

که در آن  $a_n$  ها و  $b_m$  ها به ترتیب ریشه‌ها و قطب‌های تابع  $\Delta(z)$  می‌باشند و پربند بسته  $C$  کلیه ریشه‌ها و قطب‌ها را در بر می‌گیرد. در نتیجه معادله 18، به شکل زیر خواهد شد:

$$E(a) = \frac{\hbar}{4\pi} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \times \frac{1}{2\pi i} \oint_C \omega d \ln \Delta^{\text{TM,TE}}(\omega, \kappa_\perp) S \quad 20$$

در رابطه فوق پربند بسته  $C$  را مانند شکل 4 در نظر می‌گیریم. این پربند شامل یک نیم‌دایره به شعاع بی‌نهایت در نیمه راست صفحه مختلط  $\omega$ ،  $C_+$ ، و یک خط روی محور موهومی  $(-i\infty, +i\infty)$  به صورت

خواهد شد. در رابطه فوق برای هر یک از راستاهایی که شرط مرزی غیر بدیهی اعمال نشود می‌توان جمع را به انتگرال تبدیل نمود  $(\sum \rightarrow \int \frac{dk}{2\pi})$ . مثلاً اگر تنها در راستای  $z$  شرط مرزی غیر بدیهی داشته باشیم و در دو راستای عمود دیگر شرط مرزی بدیهی باشد، مانند دو صفحه موازی عمود بر محور  $z$  به فاصله  $a$ ،  $E_0$  به صورت زیر خواهد بود:

$$E(a) \equiv E_0 = \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \sum_n \omega_{\mathbf{k}, n} S \quad 14$$

برای به دست آوردن بسامدهای  $\omega$  در این مسأله، فرض می‌کنیم که دو صفحه دی‌الکتریک با ثابت گذردهی نسبی  $\varepsilon(\omega)$  به فاصله  $a$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند. با حل معادلات ماکسول و اعمال شرایط مرزی روی صفحات، توابع مولد مُدها را به دست خواهیم آورد. جزئیات این کار در پیوست آمده است. برای دو نوع قطبش TM و TE، مغناطیسی عرضی و الکتریکی عرضی، توابع مولد مُدها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta^{\text{TM}}(\omega, \kappa_\perp, a) = e^{-\kappa a} \left[ (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qa} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qa} \right] \quad 15$$

$$\Delta^{\text{TE}}(\omega, \kappa_\perp, a) = e^{-\kappa a} \left[ (q + \kappa)^2 e^{qa} - (q - \kappa)^2 e^{-qa} \right]$$

که در آن کمیت‌های  $K$  و  $q$  از رابطه پ.11 و پ.12 به صورت

$$\kappa_\perp = (\kappa_x, \kappa_y) \quad q^2 = \kappa_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad 16$$

$$\kappa^2 = \kappa_\perp^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \quad 17$$

$$E_{\text{Cas}}^{\text{TM}}(a) = \frac{\hbar S}{8\pi^2 i} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \quad (23)$$

$$\times \left[ \int_{+i\infty}^{-i\infty} \omega d \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) \right. \\ \left. + \int_{C_+} \omega d \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) \right]$$

از آنجا که  $C_+$  یک نیم‌دایره به شعاع  $r \rightarrow \infty$  می‌باشد. از آنجا که اجسام نسبت بسامدهای بالا (بالتر از بسامد پلاسمای جسم) به‌طور شفاف رفتار می‌کنند در این حد خواهیم داشت

$$r \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \varepsilon(\omega) \rightarrow 1, \kappa = q \rightarrow \infty, e^{-2qa} \rightarrow 0$$

24 ترتیب انتگرال روی مسیر  $C_+$  به‌روش جزء به جزء به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد که جواب آن البته صفر می‌شود:

$$I = \omega \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) \Big|_{C_+} \quad (25)$$

$$- \int_{C_+} d\omega \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} r \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right)$$

$$- \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) d\theta$$

$$= 0$$

اکنون جمله باقی‌مانده از معادله 23 را با استفاده از تغییر متغیر مناسب  $\xi = i\omega$ ، به‌صورت

$$E_{\text{Cas}}^{\text{TM}}(a) = -\frac{\hbar S}{8\pi^2} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \quad (26)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \xi d \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right)$$

پادساعتگرد می‌باشد. حال با جایگذاری رابطه 20 در معادله 4 (مثلاً برای مُد TM) خواهیم داشت:

$$E_{\text{Cas}}^{\text{TM}}(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hbar S}{8\pi^2 i} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \quad (21)$$

$$\times \oint_C \omega d \ln \left[ \frac{e^{-2\kappa(\frac{L-a}{2})} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{q(\frac{L-a}{2})} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-q(\frac{L-a}{2})} \right)^2}{e^{-2\kappa(\frac{L-b}{2})} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{q(\frac{L-b}{2})} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-q(\frac{L-b}{2})} \right)^2} \right]$$

$$\times \frac{e^{-ka} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qa} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qa} \right)}{e^{-kb} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qb} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qb} \right)}$$

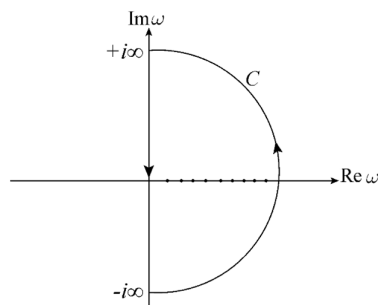
بعد از گرفتن حد  $L \rightarrow \infty$  عبارت فوق به‌صورت زیر

ساده خواهد شد

$$E_{\text{Cas}}^{\text{TM}}(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\hbar S}{8\pi^2 i} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \oint_C \omega d \ln \left[ \frac{(\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qa} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qa} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qa} \right)}{(\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qb} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qb} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qb} \right)} \right] \quad (22)$$

$$= \frac{\hbar}{8\pi^2 i} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \oint_C \omega d \ln \left[ \frac{e^{-qa} \left( (\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qa} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qa} \right)}{(\varepsilon q + \kappa)^2} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{8\pi^2 i} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \oint_C \omega d \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{2qa} \right)$$



شکل 3. مسیر پربندی  $C$ ، که در آن نقاط بیان‌کننده ریشه‌های توابع مولد  $\Delta^{\text{TMIE}}(\omega, \kappa_\perp)$  می‌باشند.

که در خط دوم آن حد  $b \rightarrow \infty$  را نیز گرفته‌ایم. برای حل انتگرال پربندی مختلط معادله 22 مطابق شکل 3، پربند  $C$  همان‌طور که ذکر شد به مسیر  $C_+$  و یک مسیر مستقیم روی محور موهومی شکسته می‌شود:

این رابطه همان فرمول معروف لیفشیتز است که ما به‌صورت سرراست و خودسازگار، بدون در نظر گرفتن فرض‌های پیچیده پراکندگی به‌دست آوردیم.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله ما توانستیم فرمول معروف لیفشیتز، مربوط به انرژی کازیمیر بین دو صفحه دی الکتریک در دمای صفر مطلق، را با استفاده از تعریف صحیح و دقیق انرژی کازیمیر محاسبه نماییم. جزئیات استخراج این رابطه در مقاله اصلی لیفشیتز نیامده است. حذف بی‌نهایت‌ها و استخراج جواب فیزیکی متناهی در این مسأله پیچیدگی‌های خاصی دارد. مراجع متعددی که برای به‌دست آوردن جواب تلاش نموده‌اند، تا جایی که ما اطلاع پیدا کردیم، یا از تعریف ناصحیح انرژی کازیمیر استفاده کرده‌اند و این اشتباه با بی‌دقتی‌های دیگر پوشیده شده و یا روش‌های پیچیده و البته قابل تأمل پراکندگی استفاده نموده‌اند. در اکثر این موارد برخی بی‌نهایت‌ها به‌صورت دستی از مسأله خارج می‌شود. در این مقاله ما فرمول لیفشیتز را با استفاده از بازبهنجارش جعبه به‌صورت کاملاً سیستماتیک و خودسازگار به‌دست آورده‌ایم. در این روش از تعریف درست انرژی کازیمیر استفاده شده و همه بی‌نهایت‌ها (اعم از بی‌نهایت‌های وابسته به فاصله دو صفحه و بی‌نهایت‌های مستقل از آن) در خلال محاسبه و نه به‌صورت دستی حذف می‌شوند. فرمول 30، فشار وارد بر صفحات، همان رابطه لیفشیتز می‌باشد.

### تشکر و قدردانی

نویسندگان از دکتر سید مهدی فاضلی برای بحث‌ها و راهنمایی‌های مفید ایشان تشکر می‌کنند.

می‌نویسیم معادله 26 را نیز با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$E_{\text{Cas}}^{\text{TM}}(a) = \frac{-\hbar S}{8\pi^2} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \times \left[ \xi \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) d\xi = \frac{\hbar S}{4\pi^2} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \int_0^{+\infty} d\xi \ln \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon q - \kappa}{\varepsilon q + \kappa} \right)^2 e^{-2qa} \right) \quad 27$$

که در آن از زوج بودن انتگرال‌دهنده با توجه به رابطه 17 استفاده نموده‌ایم. با در نظر گرفتن مُد TE انرژی کازیمیر به‌شکل

$$E_{\text{Cas}}(a) = \frac{\hbar S}{4\pi^2} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \int_0^\infty d\xi \times \left\{ \ln \left[ 1 - r_{\text{TM}}^2(i\xi, \kappa_\perp) e^{-2qa} \right] + \ln \left[ 1 - r_{\text{TE}}^2(i\xi, \kappa_\perp) e^{-2qa} \right] \right\} \quad 28$$

خواهد شد، که در آن  $r_{\text{TE}}$  و  $r_{\text{TM}}$  به‌ترتیب ضرایب بازتاب مربوط به مُدهای مغناطیسی عرضی و الکتریکی عرضی می‌باشند و به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$r_{\text{TM}}(i\xi, \kappa_\perp) = \frac{\varepsilon(i\xi)q(i\xi, \kappa_\perp) - \kappa(i\xi, \kappa_\perp)}{\varepsilon(i\xi)q(i\xi, \kappa_\perp) + \kappa(i\xi, \kappa_\perp)} \quad r_{\text{TE}}(i\xi, \kappa_\perp) = \frac{q(i\xi, \kappa_\perp) - \kappa(i\xi, \kappa_\perp)}{q(i\xi, \kappa_\perp) + \kappa(i\xi, \kappa_\perp)} \quad 29$$

اگر از رابطه فوق طبق معادله 6 مشتق بگیریم حاصل، نیروی کازیمیر بین دو صفحه دی‌الکتریک در خلأ می‌باشد،

$$\frac{F_{\text{Cas}}(a)}{S} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty \kappa_\perp d\kappa_\perp \int_0^\infty d\xi, \times q \left[ \frac{1}{1 - r_{\text{TM}}^{-2}(i\xi, \kappa_\perp) e^{2qa}} + \frac{1}{1 - r_{\text{TE}}^{-2}(i\xi, \kappa_\perp) e^{2qa}} \right] \quad 30$$

پیوست:

در این پیوست، با استفاده از معادلات ماکسول و اعمال شرایط مرزی مناسب توابع مولد مُدها،  $\Delta^{TM}$  و  $\Delta^{TE}$  را محاسبه خواهیم نمود. بدین منظور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad 1.پ$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

روابط فوق را در معادلات ماکسول فضای آزاد جایگذاری می‌کنیم، که حاصل به شکل

2.پ

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \frac{i\varepsilon(\omega)\omega}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} = 0$$

خواهد بود. با مشتق‌گیری از دو معادله اخیر روابط زیر به دست می‌آید

3.پ

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

که دسته جواب‌های متعامد کاملی به صورت

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}_\perp, \omega) = \mathbf{e}_s(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) e^{i\boldsymbol{\kappa}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \quad 4.پ$$

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa}_\perp, \omega) = \mathbf{b}_s(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) e^{i\boldsymbol{\kappa}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}$$

برای آنها (متناسب با مسأله مورد نظر ما) متصور است.

با جایگذاری جواب‌های (پ.4) در معادله (پ.3)،

معادلات نوسانگر برای توابع  $e_p, b_p$  به صورت

5.پ

$$\mathbf{e}_s''(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) - \kappa^2 \mathbf{e}_s(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) = 0$$

$$\mathbf{b}_s''(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) - \kappa^2 \mathbf{b}_s(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) = 0$$

به دست خواهد آمد. علامت پرایم در عبارت بالا نشان

دهنده مشتق‌گیری نسبت به  $z$  می‌باشد. در ضمن در

فضای بین دو صفحه  $\varepsilon(\omega) = 1$  در نظر گرفته

می‌شود. به همین ترتیب برای دو معادله دیگر ماکسول

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

6.پ

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{s,z}(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) + i\boldsymbol{\kappa}_x \cdot \mathbf{e}_{s,x}(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) \\ + i\boldsymbol{\kappa}_y \cdot \mathbf{e}_{s,y}(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_{s,z}(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) + i\boldsymbol{\kappa}_x \cdot \mathbf{b}_{s,x}(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) \\ + i\boldsymbol{\kappa}_y \cdot \mathbf{b}_{s,y}(z, \boldsymbol{\kappa}_\perp) = 0 \end{aligned}$$

اگر صفحه دی‌الکتریک ضخیم را ناحیه 1 و فضای بین

صفحات را ناحیه 2 بگیریم، شرایط مرزی زیر را خواهیم

داشت:

$$\mathbf{E}_{1t}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_{2t}(t, \mathbf{r}), \quad 7.پ$$

$$\mathbf{D}_{1n}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{D}_{2n}(t, \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{B}_{1t}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_{2t}(t, \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{B}_{1n}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_{2n}(t, \mathbf{r})$$

اولین شرط مرزی معادله (پ.7) به پیوستگی  $e_{s,x}, e_{s,y}$

در عبور از صفحات مرزی  $z = \pm \frac{a}{2}$  می‌انجامد، که از

معادله (پ.6) معادل پیوستگی  $e'_{s,z}$  است. دومین شرط

مرزی،  $\mathbf{D}_{1n}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{D}_{2n}(t, \mathbf{r})$ ، باعث پیوستگی

$\varepsilon e_{p,z}$  در عبور از صفحات می‌شود. از آنجایی که مؤلفه



$$q^2 = \kappa_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \text{ و } \kappa^2 = \kappa_{\perp}^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{پ. 10}$$

شرط وجود جواب برای دسته معادلات (پ. 9) این است که دترمینان ضرایب صفر شود، یعنی:

$$\Delta^{\text{TM}}(\omega, \kappa_{\perp}, a) \equiv e^{-\kappa a} \times [(\varepsilon q + \kappa)^2 e^{qa} - (\varepsilon q - \kappa)^2 e^{-qa}] = 0 \quad \text{پ. 11}$$

به همین ترتیب برای مد TE نیز خواهیم داشت:

$$\Delta^{\text{TE}}(\omega, \kappa_{\perp}, a) \equiv e^{-\kappa a} \times [(q + \kappa)^2 e^{qa} - (q - \kappa)^2 e^{-qa}] = 0 \quad \text{پ. 12}$$

#### مرجع‌ها

[1] H.B.G. Casimir, On the attraction between two perfectly conducting plates, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* **51** (1948) 793.

[2] A.D. Phan, N.A. Viet, N.A. Poklonski, L.M. Woods, C.H. Le, Interaction of a graphene sheet with a ferromagnetic metal plate, *Physical Review B* **86** (2012) 15541.

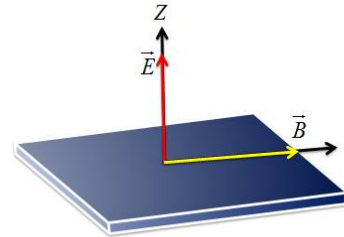
[3] M.J. Sparnaary, Measurements of attractive force between flat plates, *Physica* **24** (1958) 751.

[4] A.R. Mohiddeen, Precision measurements of the casimir force, *Physical Review Letters* **81** (1998) 21.

[5] E.M. Lifshitz, The theory of molecular attractive forces between solids, *Zhurnal Éksperimental'noĭ i Teoreticheskoi Fiziki*. **29** (1955) [Soviet Phys. JETP **2** (1956) 73].

[6] V.V. Nesterenko, Surface modes and photonic modes in Casimir calculations for a compact cylinder, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. **41** (2008) 164005.

$z$  میدان الکتریکی تنها برای قطبش TM غیر صفر است (مطابق شکل زیر)،



شکل 4. قطبش مغناطیسی عرضی.

تنها از حالت مغناطیسی عرضی استفاده می‌کنیم و  $e_{\text{TM},z}$  را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$e_{\text{TM},z} = \begin{cases} Ae^{\kappa z} & z < \frac{-a}{2} \\ Be^{qz} + Ce^{-qz} & \frac{-a}{2} \leq z \leq \frac{+a}{2} \\ De^{-\kappa z} & z > \frac{+a}{2} \end{cases} \quad \text{پ. 8}$$

با توجه به پیوستگی‌های که بیشتر توضیح داده شد، با

اعمال شرایط مرزی در  $z = \pm \frac{a}{2}$  به معادلات زیر

می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \text{پ. 9} \\ \kappa e^{-\kappa \frac{a}{2}} &= Bq e^{-q \frac{a}{2}} - Cq e^{q \frac{a}{2}} \\ -\kappa e^{-\kappa \frac{a}{2}} &= Bq e^{q \frac{a}{2}} - Cq e^{-q \frac{a}{2}} \\ \kappa e^{-\kappa \frac{a}{2}} &= B e^{-q \frac{a}{2}} + C e^{q \frac{a}{2}} \\ \kappa e^{-\kappa \frac{a}{2}} &= B e^{q \frac{a}{2}} + C e^{-q \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

که در آن

- above a plate made of real metals, *Physical Review A* **61** (2000) 062107.
- [19] Y.S. Barash, V.L. Ginzburg, Electromagnetic fluctuations in matter and molecular (Van der Waals) forces between them. *Soviet Physics Uspekhi* **18** (1975) 305.
- [20] J. Feinberg, A. Mann, M. Revzen, Casimir effect: the classical limit, *Annals of Physics* **288** (2001) 103.
- [21] F. Intravaia, A. Lambrecht, The role of surface plasmon modes in the Casimir effect, *Open systems and information dynamics*, **14** (2007) 159.
- [22] M. J. Renne, Microscopic theory of retarded van der Waals forces between macroscopic dielectric bodies, *Physica* **56** (1971) 125.
- [23] V.B. Bezerra, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, Correlation of energy and free energy for the thermal Casimir force between real metals, *Physical Review A* **66** (2002) 062112.
- [24] E. Gerlach, Equivalence of van der Waals forces between solids and the surface-plasmon interaction, *Physical Review B* **4** (1971) 393.
- [25] D. Iannuzzi, M. Lisanti, F. Capasso, Effect of hydrogen-switchable mirrors on the Casimir force, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **101** (2004) 4019.
- [26] K. Schram, On the macroscopic theory of retarded van der Waals forces, *Physics Letters A* **43** (1973) 282.
- [27] M.P. Hertzberg, R.L. Jaffe, M. Kardar, A. Scardicchio, Attractive Casimir forces in a closed geometry. *Physical Review Letters* **95** (2005) 250402.
- [28] R. Büscher, T. Emig, Geometry and spectrum of Casimir forces, *Physical Review Letters* **94** (2005) 133901.
- [29] S.S. Gousheh, R. Moazzemi, M. A. Valuyan, Radiative correction to the Dirichlet
- [7] V.V. Nesterenko, Boundary conditions at spatial infinity for fields in Casimir calculations, [*arXiv: hep-th/0511018*] (2005).
- [8] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, New development in the Casimir effect, *Physics Reports* **353** (2001) 1.
- [9] V.M. Mostepanenko, A.O. Caride, G.L. Klimchitskaya, S.I. Zanette, Some mathematical aspects of the Lifshitz formula for the thermal Casimir force, *Proceeding of Science WC2004* (2005) 030, [*arXiv: quant-ph/0503064*].
- [10] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, Oxford university press, Oxford, (2009).
- [11] V.V. Nesterenko, I.G. Pirozhenko, Lifshitz formula by spectra summation method, *Physical Review A* **86** (2012) 052503.
- [12] B. Geyer, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, Thermal quantum field theory and the Casimir interaction between dielectrics, *Physical Review D* **72** (2005) 085009.
- [13] G. Plunien, B. Muller, W. Griner, The Casimir effect, *Physics Reports* **134** (1986) 87.
- [14] Y.S. Barash, V.L. Ginzburg, Electromagnetic fluctuations is a substance and molecular (Van der Waals) forces between them, *Soviet Physics Uspekhi* **18** (1975) 305.
- [15] J.Q. Quach, Gravitational Casimir Effect, *Physical Review Letters* **114** (2015) 081104.
- [16] E. Sassaroli, Y.N. Srivastava, J. Swain, A. Widom, The dynamical and static Casimir effects and the thermodynamic instability. [*arXiv: hep-ph/9805479*] (1998)].
- [17] B.W. Ninham, V.A. Parsegian, G.H. Weiss, Temperature-dependent van der Waals forces, *Biophysical Journal*, **10** (1970) 664.
- [18] G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, Casimir and van der Waals forces between two plates or a sphere (lens)

[32] R. Moazzemi, S.S. Gousheh, A new renormalization approach to the Dirichlet Casimir effect for  $\phi^4$  theory in (1+1) dimensions, *Physics Letters B* **658** (2008) 255.

[33] V. Kampen, N.G. Nijboer, On macroscopic theory of van der waals forces, *Europhysics Letters*. **26** (1968) 307.

[34] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill, (1979).

Casimir energy for  $\lambda\phi^4$  theory in two spatial dimensions, *Physics Letters* **B681** (2009) 477.

[30] R. Moazzemi, M. Namdar, S.S. Gousheh. The Dirichlet Casimir effect for  $\phi^4$  theory in (3+1) dimensions: a new renormalization approach, *Journal of High Energy Physics* **09** (2007) 029.

[31] M.A. Valuyan, R. Moazzemi, S.S. Gousheh, A direct approach to the electromagnetic Casimir energy in a rectangular waveguide, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **41** (2008) 145502.