

معیار تشخیص درهم‌تنیدگی کامل چند قسمتی در سیستم‌های متغیر-پیوسته

یحیی اکبری کوربلاغ*، مهسا اژدرقلم

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

دریافت: 1397/02/18 ویرایش نهایی: 1397/11/28 پذیرش: 1397/12/25

چکیده

در سیستم‌های چند قسمتی، درهم‌تنیدگی انواع مختلفی دارد که یک نوع مهم آن درهم‌تنیدگی کامل است. به دلیل اهمیت درهم‌تنیدگی کامل در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی، برای تشخیص آن معیارهای متعددی ارائه شده است. یکی از آنها معیاری است که Shchukin و همکاران در سال 2015 معرفی کرده‌اند. آنها ابتدا یک نامساوی به دست آورده‌اند که اگر یک حالت کوانتومی متغیر-پیوسته چند قسمتی آن را به‌ازای همه تقسیم‌های دو قسمتی نقض کند، کاملاً درهم‌تنیده است. از آنجا که استفاده از این نامساوی مستلزم بهینه‌سازی عددی است و با افزایش تعداد قسمت‌ها به‌کار بردن آن دشوارتر می‌شود، آنها در ادامه با استفاده از این نامساوی یک شرط تحلیلی برای درهم‌تنیدگی کامل ارائه داده‌اند که هر چند بهترین شرط ممکن نیست ولی مشکلات نامساوی اصلی را ندارد. در این مقاله، با استفاده از این نامساوی اصلی، یک شرط تحلیلی برای درهم‌تنیدگی کامل ارائه می‌دهیم که کران پایین آن بزرگتر از کران پایین شرط تحلیلی آنها است و بنابراین می‌تواند حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده بیشتری را تشخیص دهد. به‌علاوه، قدرت تشخیص آن با قدرت تشخیص نامساوی اصلی مذکور یکسان است و مشکلات استفاده از آن را ندارد. این مطلب را با بررسی یک مثال توضیح می‌دهیم.

کلیدواژه‌گان: حالت‌های کوانتومی، معیار درهم‌تنیدگی، درهم‌تنیدگی کامل، حالت گاوسی

مقدمه

اندیس $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه هر نوع خاص درهم‌تنیدگی با یک افراز این مجموعه مشخص می‌شود. افراز $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ به‌ازای $k \geq 2$ که در آن زیر مجموعه‌های I_i غیر تهی و مجزا بوده و اجتماع آنها برابر با مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است، یک حالت k جداپذیر را توصیف می‌کند. حالت متناظر با $k = n$ را کاملاً جداپذیر می‌نامند و حالت‌های متناظر با $k = 2$ حالت‌های جداپذیر دو قسمتی نامیده می‌شوند. حالت‌هایی که جداپذیر دو قسمتی نباشند به‌حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده معروف هستند [4]. تشخیص

تشخیص درهم‌تنیدگی سیستم‌های چند قسمتی یک مسئله اساسی در علم اطلاعات کوانتومی است. درهم‌تنیدگی‌های چند قسمتی در حوزه وسیعی از فرآیندهای پردازش اطلاعات کوانتومی از قبیل ترابرد کوانتومی [1, 2] و رمزنگاری کوانتومی کاربرد زیادی دارند [3].

در سیستم‌های چند قسمتی، درهم‌تنیدگی می‌تواند انواع مختلفی داشته باشد. هر نوع خاص درهم‌تنیدگی با گروه‌هایی از قسمت‌ها مشخص می‌شود که حالت آنها جداپذیر است. اگر یک سیستم n -قسمتی و مجموعه

*نویسنده مسئول: yakbari@azaruniv.ac.ir



حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده به علت کاربرد فراوان آنها، مسئله مهمی است. بنابراین، برای ارائه معیارهایی جهت تشخیص این حالت‌ها تلاش‌های زیادی صورت گرفته است [4-7].

در این مقاله، شرط تحلیلی ارائه شده در مرجع [4] برای تشخیص حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده را ارتقا می‌دهیم به طوری که بتواند تعداد بیشتری حالت کاملاً درهم‌تنیده را تشخیص دهد.

2

$$G = \langle \hat{x}^T X \hat{x} + \hat{p}^T P \hat{p} \rangle = Tr(X\gamma_{xx}) + Tr(P\gamma_{pp})$$

که $\gamma_{xx} = (\langle x_i x_j \rangle)_{i,j=1}^n$ و $\gamma_{pp} = (\langle p_i p_j \rangle)_{i,j=1}^n$ بلوک‌های قطری ماتریس کواریانس حالت سیستم هستند. همان‌طور که در مرجع [4] نشان داده شده است، کمینه کمیت G روی همه حالت‌های ممکن سیستم به صورت زیر است

$$\min_{\rho} G = Tr(\sqrt{\sqrt{X} P \sqrt{X}}) \quad 3$$

که آن را کران کوآنتومی می‌نامند و با $B(X, P)$ نشان می‌دهند. بنابراین، به‌ازای همه حالت‌های سیستم چند قسمتی، نامساوی زیر برقرار است

$$Tr(X\gamma_{xx}) + Tr(P\gamma_{pp}) \geq B(X, P) \quad 4$$

برای رسیدن به معیاری برای حالت‌های جداپذیر متناظر با افراز $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ که آنها را حالت‌های $-I$ جداپذیر می‌نامیم، از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر مدهای i و j جداپذیر باشند، آنگاه

$$\langle p_i p_j \rangle = \langle x_i x_j \rangle = 0$$

حالت‌های $-I$ جداپذیر می‌توان تساوی زیر را نوشت

5

$$Tr(X\gamma_{xx}) + Tr(P\gamma_{pp}) = Tr(X_u\gamma_{xx}) + Tr(P_v\gamma_{pp})$$

که در آن، X_u همان ماتریس X است ولی با این تفاوت که در آن درآیه‌های متناظر با درآیه‌های صفر γ_{xx} با اعداد حقیقی دلخواه u_i طوری جاگذاری شده‌اند که X_u متقارن و مثبت نیمه معین باشد. ارتباط بین ماتریس‌های P_v و P نیز به صورت مشابه است. با

در این مقاله، شرط تحلیلی ارائه شده در مرجع [4] برای تشخیص حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده را ارتقا می‌دهیم به طوری که بتواند تعداد بیشتری حالت کاملاً درهم‌تنیده را تشخیص دهد.

شرط جداپذیری حاصل از کران کوآنتومی

در این بخش، شرط جداپذیری معرفی شده در مقاله [4] را به طور خلاصه مرور می‌کنیم. سیستمی را در نظر می‌گیریم که شامل n مد الکترومغناطیسی (نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی) است. مد i ام با عملگرهای \hat{x}_i و \hat{p}_i توصیف می‌شود که دارای رابطه جابه‌جایی $[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i$ هستند. برای توصیف این سیستم $-n$ مده از بردار $2n$ مؤلفه‌ای $\hat{r} = (\hat{x}, \hat{p})$ استفاده می‌کنیم که در آن $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ و $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n)$ اکثر معیارهای تشخیص درهم‌تنیدگی کامل برای سیستم‌های $-n$ مده با کران پایین کمیت G سر و کار دارند که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$G = \langle \hat{r}^T M \hat{r} \rangle = \sum_{i,j=1}^{2n} M_{ij} \langle \hat{r}_i, \hat{r}_j \rangle = Tr(M\gamma) \quad 1$$

که در آن $M = (M_{ij})_{i,j=1}^{2n}$ یک ماتریس $2n \times 2n$ حقیقی، متقارن و مثبت معین بوده و $\langle \hat{r}_i, \hat{r}_j \rangle = (1/2) \langle \hat{r}_i \hat{r}_j + \hat{r}_j \hat{r}_i \rangle$ است. علاوه بر این، $\gamma = (\langle \hat{r}_i, \hat{r}_j \rangle)_{i,j=1}^{2n}$ ماتریس کواریانس حالت سیستم است. در عمل معمولاً یک مورد خاص ماتریس M به کار می‌رود که بلوک‌های غیر قطری آن صفر هستند. اگر بلوک‌های قطری M را با

تعداد قسمت مفروض، کران پایین حاصل از آن کوچکتر از کران پایین حاصل از معادله 6 به روش بهینه سازی عددی است. در این بخش، می‌خواهیم براساس معیار جداپذیری معادله 6 یک شرط تحلیلی به دست آوریم که نقض آن حاکی از درهم‌تنیدگی کامل است ولی بر خلاف شرط تحلیلی مرجع [4]، کران پایین حاصل از آن به‌ازای هر تعداد قسمت مفروض، برابر با کران پایین حاصل از معادله 6 است و بنابراین قدرت تشخیص آن بیشتر از قدرت تشخیص شرط تحلیلی مرجع [4] است. برای این منظور، همانند مرجع [4]، کمیت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \left\langle (x_i + x_j)^2 + (p_i - p_j)^2 \right\rangle \quad 7$$

که همان کمیت کلی G معادله 2 به‌ازای ماتریس‌های $P = P_n$ و $X = X_n$ است که به‌صورت زیر معرفی می‌شوند

$$X_n = \begin{pmatrix} n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n-1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-1 \end{pmatrix} \quad 8$$

$$P_n = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \quad 9$$

از آنجا که ماتریس‌های X_n و P_n متقارن هستند، کافی است که فقط تجزیه‌های دو قسمتی به‌شکل $1, \dots, k | k+1, \dots, n$ را به‌ازای $k \leq \frac{n}{2}$ بررسی کنیم. برای ساده‌سازی محاسبات، همه درایه‌های u_i در X_n و v_i در P_n را صفر انتخاب می‌کنیم و ماتریس‌های حاصل را با $X_{n,k}$ و $P_{n,k}$ نشان می‌دهیم. چون ماتریس‌های $X_{n,k}$ و $P_{n,k}$ با هم جا به‌جا پذیرند،

اعمال نامساوی 4 برای هر حالت I -جداپذیر، شرط زیر به‌دست می‌آید

$$G(X, P) \geq B_I(X, P) = \max_{u, v} \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{X} P \sqrt{X}}) \quad 6$$

این شرط همان نامساوی اصلی مرجع [4] است. توجه کنید که به‌ازای بردارهای u_0 و v_0 که مؤلفه‌های آنها، به‌ترتیب، درآیه‌های متناظر در خود ماتریس‌های X و P هستند، $X_{u_0} = X$ و $P_{v_0} = P$ است. بنابراین، به‌ازای هر افرا I نامساوی $B_I(X, P) \geq B(X, P)$ همواره برقرار است. وانگهی، این نامساوی به‌ازای اکثر ماتریس‌های X و P به‌صورت اکید برقرار است. از این‌رو، کران نامساوی 6 قویتر از کران نامساوی 4 است و تعدادی از حالت‌هایی که I -جداپذیر نیستند می‌توانند به‌ازای یک جفت ماتریس معین X و P نامساوی 6 را نقض کنند. اگر ماتریس‌های X و P وجود داشته باشند به‌طوری که نامساوی 6 به‌ازای تمام تجزیه‌های دو قسمتی به‌طور هم‌زمان نقض شود، در این صورت حالت مورد نظر کاملاً درهم‌تنیده است.

معیار درهم‌تنیدگی کامل

روشن است که استفاده از معادله 6 برای تشخیص درهم‌تنیدگی کامل، مستلزم بهینه‌سازی عددی است که باید برای هر تقسیم دو قسمتی سیستم، جداگانه انجام شود. از سوی دیگر، با افزایش تعداد قسمت‌های سیستم، تعداد تقسیم‌های دو قسمتی نیز به‌سرعت افزایش می‌یابد. بنابراین، کاربرد معادله 6 در سیستم‌های با تعداد قسمت‌های زیاد دشوارتر می‌شود. برای رفع این مشکل، در مرجع [4] با استفاده از معادله 6 یک شرط تحلیلی به‌دست آورده‌اند که نقض آن به‌وسیله یک حالت حاکی از درهم‌تنیدگی کامل آن است. اما این شرط تحلیلی بهترین شرط ممکن نیست و به‌ازای هر

از این رو، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \sqrt{X_{n,k} P_{n,k}} &= (n-2) \sqrt{n(n-2)} + \\ &\sqrt{(n-1)^2 - (k-1)^2} + \sqrt{k(2n-3) - k(k-1)} \\ \text{واضح است که مینیموم این عبارت در بازه } 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ &\text{به ازای } k=1 \text{ به دست می آید. بنابراین، هر حالت دو-} \\ &\text{جدپذیر باید در نامساوی زیر صدق کند:} \end{aligned}$$

10

$$G_n \geq (n-2) \sqrt{n(n-2)} + (n-1) + \sqrt{2n-3}$$

این معادله، نتیجه اصلی این مقاله است که یک شرط تحلیلی است که نقض آن به وسیله یک حالت حاکی از درهم تنیدگی کامل آن حالت است.

کران پایین شرط تحلیلی معادله 10 برای G_n به ازای یک n مفروض، با کران حاصل از معادله 6 به روش بهینه سازی عددی برابر است ولی از کران پایین شرط تحلیلی مرجع [4] بزرگتر است. پس شرط تحلیلی معادله 10 قوی تر از شرط تحلیلی مرجع [4] است و می تواند نسبت به آن حالت های درهم تنیده کامل بیشتری را تشخیص دهد. برای نشان دادن این مطلب، مثالی را مطرح می کنیم.

مثال: حالت های گاوسی سه مده

در این مثال، خانواده ای از حالت های گاوسی سه مده را بررسی می کنیم که از طریق حالت های خالص GHZ-گونه به دست آمده اند [8]. ماتریس کواریانس این حالت ها به صورت زیر است

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha I)$$

که در آن

جمله $\text{Tr} \sqrt{\sqrt{X_{n,k}} P_{n,k} \sqrt{X_{n,k}}}$ به صورت ساده تر $\text{Tr} \sqrt{X_{n,k} P_{n,k}}$ در می آید و به راحتی قابل محاسبه است. برای محاسبه این جمله، ابتدا ویژه مقادیر حاصل ضرب $X_{n,k} P_{n,k}$ را به دست می آوریم. ماتریس های $X_{n,k}$ و $P_{n,k}$ دارای شکل زیر هستند

$$X_{n,k} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ و } P_{n,k} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

که در آن داریم

$$\begin{aligned} A_1 &= (n-2)I_k + A'_1 \\ A_2 &= (n-2)I_{n-k} + A'_2 \\ B_1 &= nI_k - A'_1 \\ B_2 &= nI_{n-k} - A'_2 \end{aligned}$$

در روابط بالا، A'_1 و A'_2 ، به ترتیب، ماتریس های $k \times k$ و $(n-k) \times (n-k)$ هستند که تمام درایه های آنها برابر با یک هستند. بنا براین، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} X_{n,k} P_{n,k} &= \begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & A_2 B_2 \end{pmatrix} \\ &= n(n-2)I_n - \begin{pmatrix} (k-2)A'_1 & 0 \\ 0 & (n-k-2)A'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مشاهده می کنیم که برای به دست آوردن ویژه مقادیر ماتریس حاصل ضرب، فقط کافی است ویژه مقادیر ماتریس زیر را بیابیم

$$\begin{pmatrix} (k-2)A'_1 & 0 \\ 0 & (n-k-2)A'_2 \end{pmatrix}$$

چون این ماتریس فقط دو سطر مستقل دارد، بنابراین فقط دو ویژه مقدار مخالف صفر دارد و بقیه ویژه مقادیر آن صفر هستند. به راحتی می توان نشان داد که دو ویژه مقدار مخالف صفر این ماتریس برابر هستند با $k(k-2)$ و $(n-k)(n-k-2)$. بنابراین، ماتریس $X_{n,k} P_{n,k}$ دارای $(n-2)$ ویژه مقدار به صورت $n(n-2)$ ، یک ویژه مقدار به صورت $n(n-2) - k(k-2)$ و یک ویژه مقدار به صورت $n(n-2) - (n-k)(n-k-2)$ است.

$$X_{n=3,k=1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{n=3,k=1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & -c & 0 & -c \\ c & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & b & 0 & -c \\ c & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & -c & 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix}$$

در این ماتریس $a > 1$ است و b و c به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b = \frac{1}{4}(5a - \sqrt{9a^2 - 8})$$

$$c = \frac{1}{4}(a - \sqrt{9a^2 - 8})$$

بنابراین، γ_{xx} و γ_{pp} به صورت زیر هستند:

$$\gamma_{xx} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \alpha & c & c \\ c & a + \alpha & c \\ c & c & a + \alpha \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{pp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b + \alpha & -c & -c \\ -c & b + \alpha & -c \\ -c & -c & b + \alpha \end{pmatrix}$$

نشان داده شده است که این حالت به ازای $a = 1.2$ در بازه $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ درهم‌تنیدگی کامل دارد که $\alpha_0 = 0.29756$ است [8].

حال می‌خواهیم شرط معادله 10 را در مورد این حالت به کار ببریم. برای این حالت، $n = 3$ است. پس بنا به معادله‌های 8 و 9 داریم:

$$X_{n=3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{n=3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

و به ازای $k = 1$ داریم:

بنابراین، برای سمت چپ نامساوی 10 به دست می‌آوریم:

$$G_{n=3} = Tr(X_n \gamma_{xx}) + Tr(P_n \gamma_{pp})$$

$$= 3(a + b) + 6(c + \alpha)$$

$$= 6\alpha + \frac{3}{4}(11a - 3\sqrt{9a^2 - 8})$$

از سوی دیگر، سمت راست نامساوی 10 به ازای $n = 3$ برابر است با $2 + 2\sqrt{3}$. بنابراین، در مورد این حالت، نامساوی 10 به شکل زیر در می‌آید:

$$6\alpha + \frac{3}{4}(11a - 3\sqrt{9a^2 - 8}) \geq 2 + 2\sqrt{3}$$

مشاهده می‌کنیم که برای $a = 1.2$ ، این نامساوی به ازای $0 \leq \alpha \leq 0.0958$ نقض می‌شود و این نشان می‌دهد که حالت مورد نظر در این بازه از مقادیر پارامتر α کاملاً درهم‌تنیده است. این در حالی است که بررسی نشان می‌دهد که شرط تحلیلی معرفی شده در مرجع [4] قادر به تشخیص درهم‌تنیدگی این حالت نیست.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک شرط تحلیلی برای تشخیص حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده چند قسمتی در سیستم‌های متغیر-پیوسته معرفی شده است. این شرط قادر است حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده بیشتری را تشخیص دهد زیرا کران پایین آن بزرگتر از کران پایین شرط تحلیلی

continuous-variable entanglement, *Physical Review A* **92** (2015) 042328, pp. 1-10.

[5] P. van Loock, A. Furusawa, Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement, *Physical Review A* **67** (2003) 052315, pp. 1-13.

[6] K. Nagata, T. Nakamura, J. Batle, S. Abdalla, A. Farouk, Better Entanglement Witness for Genuine Multipartite Entanglement, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 2116-2120.

[7] F. Clivaz, M. Huber, L. Lami, G. Murta, Genuine-multipartite entanglement criteria based on positive maps, *Journal Of Mathematical Physics* **58** (2017) 082201, pp. 1-24.

[8] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein and J.I. Cirac, Separability properties of three-mode Gaussian states, *Physical Review A* **64** (2001) 052303, pp. 1-10.

مشابهی است که قبلاً در مرجع [4] به دست آمده است.

امیدواریم با انتخاب مناسبتر ماتریس‌های X و P در آینده بتوانیم شرط تحلیلی بهتری را به دست آوریم.

مرجع‌ها

[1] F. Verstraete, H. Verschelde, Optimal Teleportation with a Mixed State of Two Qubits, *Physical Review Letters* **90** (2003) 097901, pp. 1-4.

[2] S. Lee, J. Joo, J. Kim, Teleportation capability, distillability, and nonlocality on three-qubit states, *Physical Review A* **76** (2007) 012311, pp. 1-4.

[3] R. Cleve, D. Gottesman, H.-K. Lo, How to Share a Quantum Secret, *Physical Review Letters* **83** (1999) 648-651

[4] E. Shchukin, P. Van Loock, Generalized conditions for genuine multipartite