تحلیل آماری ترازهای انرژی هسته‌های پایدار و رادیواکتیو با استفاده از روش تخمین دانسیته کرنلی

بهرام رشیدیان ملکی*، هادی صبری، محمدعلی جعفریزاده
دانشکده فیزیک، گروه فیزیک هسته‌ای، دانشگاه تبریز ، تبریز، ایران

چکیده

با استفاده از داده‌های تجربی، تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور را برای هسته‌های پایدار و رادیواکتیو مستقیماً با روش تخمین دانسیته کرنلی (Kernel Density Estimation) محاسبه کرده و فاصله تابع به‌دست آمده با دو حد منظم و آشوبناک را با استفاده از روش واگرایی Kullback-Leibeller به‌دست می‌آوریم. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که طیف هسته‌های پایدار منظم‌تر از هسته‌های رادیواکتیو بوده و طیف هسته‌های با واپاشی آلفازا غیر منظم‌تر از هسته‌های دیگر می‌باشند. که این نشان‌دهنده تقارن بیشتر ساختار هسته‌های پایدار نسبت به هسته‌های رادیواکتیو می‌باشد.

کلیدواژگان: هسته‌های پایدار، هسته‌های رادیواکتیو، توزیع نزدیکترین فاصله مجاور، تخمین دانسیته کرنلی

مقدمه

در مکانیک کوآنتومی ، معادلهٔ شرودینگر به‌طور کامل دینامیک سیستم تحت بررسی را مشخص می‌کند. برای اکثر سیستم‌های بس ذره‌ای مثل هسته‌های سنگین (به دلیل اندرکنش‌های پیچیده اجزای تشکیل دهنده آن)، یافتن یک حل دقیق یا حتی یک تقریب خوب وابسته به آن، برای حل معادلهٔ شرودینگر، غیر ممکن است. در این زمینه، ویگنر نظریهٔ ماتریس تصادفی[۱] را معرفی کرد که در آن واقعیت‌های فیزیکی با یک مجموعه از ماتریس‌های تصادفی معرفی می‌شوند. ویگنر به‌جای تلاش برای حل معادلهٔ شرودینگر مربوط به سیستم‌های پیچیده، به مسأله از نقطه نظر آماری نزدیک شد.

در این روش با انتخاب یک مجموعه کامل از توابع پایه، عملگر هامیلتونی به‌شکل ماتریسی نوشته می‌شود. عناصر ماتریسی هامیلتونی توزیعی نامنظم دارند و ظاهراً مستقل از یکدیگر هستند. عناصر این ماتریس‌ها متغیرهای تصادفی هستند که توزیع آنها فقط به‌وسیله خواص تقارنی کلی که می‌توان روی آنسامبل عملگر تحمیل کرد، محدود می‌شود. هدف اصلی به‌دست آوردن اطلاعات از رفتار ویژه مقادیر یک سیستم پیچیده است که به‌وسیله مطالعه رفتار آماری ترازها به‌دست می‌آید [۱].

توزیع نزدیکترین فاصله مجاور[۲](NNSD) یکی از روش‌های آماری مطالعه رفتار آماری ترازها می‌باشد. تئوری آماری، جزئیات دنباله تراز هر سیستم پیچیده را پیشگویی نمی‌کند ، اما ظاهر کلی و درجهٔ بی‌نظمی (chaotic) ساختار ترازها، که در هر سیستم پیچیده

*نویسنده مسئول: B_rashidian87@ms.tabrizu.ac.ir
Rashidian.Maleki@gmail.com

[۱] Random Matrix Theory

[2] Nearest Neighbor Spacing Distribution

انتظار می‌رود اتفاق بیافتد را توصیف می‌کند [۲-۱]. نظریهٔ آشوب به مطالعه سیستم‌های دینامیکی آشوب‌ناک می‌پردازد. سیستم‌های آشوب‌ناک، سیستم‌های دینامیکی‌ای غیرخطی هستند که نسبت به شرایط اولیه‌شان بسیار حساس‌اند. در مکانیک کلاسیک، مفهوم آشوب کلاسیکی کاملا بارز می باشد. یک مسیر $z(t)$ در فضای فاز Ω آشوبناک گفته می‌شود، اگر بیشینه نمای لیاپانوف (λ) آن مثبت باشد [۳]. نمای لیاپانوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|w(t)| \qquad ۱$$

که در آن $w(t)$ یک بردار مماس بر مسیر $z(t)$، با شرط $|w(0)| = 1$ است. ناپایداری نمایی مسیرهای آشوبناک بر یک فرکانس پیوسته از حرکت دلالت می‌کنند زیرا طیف پیوسته بر کاهش همبستگی و افزایش نظم دلالت دارد، چنانچه سیستم‌های انتگرال پذیر نیز رفتار منظمی از خود نشان می‌دهند.

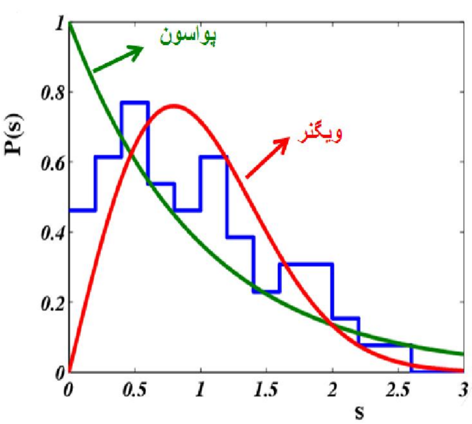
تاکُنون تعریف کلی از آشوب کوآنتومی وجود ندارد. درحقیقت آشوب کوآنتومی با تناظر کلاسیک–کوآنتوم در سیستم‌هایی که به‌طور کلاسیکی آشوبناک هستند سر و کار دارد. توزیع نزدیکترین فاصله مجاور ترازهای انرژی کوآنتومی، یکی از مظاهر اصلی کوآنتومی از آشوب کلاسیکی است. نظریهٔ ماتریس تصادفی، به‌طور کامل افت و خیزهای آماری طیف سیستم‌های آشفته کوآنتومی را توصیف می‌کند [٤-٣]. پس توزیع نزدیکترین فاصله مجاور، یکی از روش‌های معمول برای مطالعه خواص آماری ترازهای انرژی هسته‌ها جهت مطالعه آشوب کوآنتومی طیف هسته‌ها می‌باشد. در واقع هیستوگرامی از فاصله ترازهای انرژی مجاور هم با فاصله میانگین واحد می‌باشد [٦-٢،٥]. مطالعات آماری نشان می‌دهند که تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور ($P(s)$)، برای سیستم‌های کاملاً منظم (سیستم‌های کوآنتومی که دینامیک کلاسیکی منظمی در تمام فضای فاز دارند) توزیع پواسون می‌باشد [۷].

$$P(s) = \exp(-s) \qquad ۲$$

وتابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور برای سیستم‌های کاملاً غیرمنظم (سیستم‌های کوآنتومی که در حد کلاسیکی کاملاً غیرمنظم‌اند) توزیع ویگنراست (توزیع نزدیکترین فاصله بین ترازی برای آنسامبل‌های متعامد گاوسی GOE از نظریهٔ ماتریس تصادفی).

$$P(s) = \frac{\pi s}{2}\exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right) \qquad ۳$$

تقارن‌های دینامیکی به مفهوم انتگرال‌پذیری سیستم در حد کلاسیکی می‌باشد که منظم بودن سیستم‌های متقارن را می‌رساند [۷]. در شکل۱ مقایسه‌ای از دو حد منظم (پواسون) و آشوبناک (ویگنر) آمده است.



شکل۱. مقایسه دو تابع توزیع ویگنر و پواسون.

توزیع نزدیکترین فاصله مجاور برای تمام سیستم‌های فیزیکی فقط تابع توزیع پواسونی و یا ویگنری نمی‌باشد. بلکه رفتاری مابین این دو تابع توزیع نیز از خود نشان می‌دهند که باعث می‌شود از توابع توزیعی که ما بین دو حد پواسونی و ویگنری هستند استفاده شود. از توابع توزیع مختلف برای مطالعه توزیع فاصله بین ترازی، می‌توان به توابع توزیع برودی،

بری- روبنیک و ابولمجد[3] اشاره کرد [٢،٥،٦،٨] که در ادامه می‌آیند:

تابع توزیع برودی [٢،٩] (توزیع پواسون درحد $w=0$ و توزیع ویگنر در حد $w=1$ به‌دست می‌آید):

$$P_w(s) = \alpha(1+w)s^w \exp(-\alpha s^{(1+w)}) \quad ;\alpha = [\Gamma(\frac{2+w}{1+w})]^{w+1} \qquad ٤$$

تابع توزیع بری-روبنیک [٢،٨] (که در حد $q=0$ توزیع ویگنر و در حد $q=1$ توزیع پواسون می‌باشد):

$$P(s) = [q + \frac{\pi s}{2}(1-q)] \times \exp[qs - \frac{\pi}{4}(1-q)s^2] \qquad ٥$$

تابع توزیع ابولمجد [٢،٦] (اگر $f=0$ توزیع پواسون و اگر $f=1$ باشد توزیع ویگنر حاصل می‌شود):

$$P(s,f) = [1-f+f(0/7+0/3f)\ \frac{\pi s}{2}] \times \exp[-(1-f)s - f(0/7+0/3f)\frac{\pi s^2}{4}] \qquad ٦$$

سه پارامتر f، w و q پارامترهای برازش گفته می‌شوند که از صفر تا یک متغیرند و در اکثر کارها با روش برازش حداقل مربعات مشخص می‌شوند. با برازش هیستوگرام فاصله بین ترازها با هر یک از سه تابع توزیع، این پارامترها مشخص می‌شوند و یک تحلیل آماری روی ترازهای انرژی صورت می‌گیرد.

با توجه به خطای قابل ملاحظه در روش برازش حداقل مربعات، بعضی مواقع در مقایسه میزان آشفتگی طیف سیستم‌های مختلف با یکدیگر با استفاده از این روش، تقریباً یک آنالیز آماری معتبر و قابل اطمینان غیرممکن می‌شود [٢]. در کارهای مختلف از روش‌های تخمین متفاوت برای مشخص کردن سه پارامتر بالا استفاده شده است که از میان آنها می‌توان به مقاله Abul-Magd و همکارانش در مطالعهٔ میزان نظم طیف هسته‌های تغییر شکل‌یافتهٔ پخ و کشیده که از روش تخمین Bayesian برای مشخص کردن پارامتر f استفاده کرده‌اند و مقالهٔ M. A. Jafarizadeh و همکارانش در معرفی روش تخمین بیشینه احتمال برای مطالعه آماری طیف سیستم‌های هسته‌ای اشاره کرد [٦-٢].

برای یک آنالیز آماری دقیق بایستی تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور را برای سیستم مد نظر به‌صورت مستقیم محاسبه کرد و سپس میزان نزدیکی این تابع به‌دست آمده را به هریک از دوحد نظم و آشوبناک محاسبه کرد. که در این مقاله با استفاده از روش تخمین دانسیته کرنلی[4] (KDE)، تابع توزیع ترازهای انرژی هسته‌های پایدار و رادیواکتیو را مستقیماً محاسبه کرده و برای مطالعه رفتار منظم یا غیر منظم آن، فاصله تابع توزیع به‌دست آمده را با روش واگرایی **K**ullback-**L**eibeller (**KLD**) نسبت به دو حد منظم و غیر منظم محاسبه می‌کنیم [١٠-١٥].

هسته‌های پایدار و رادیواکتیو

توازن ظریفی بین نیروی دافعه الکترواستاتیکی و نیروی جاذبه قوی هسته‌ای در یک هسته وجود دارد. وقتی این نیروها متعادل‌اند هسته پایدار گفته می‌شود. در اتم‌های با عدد اتمی بالا در نتیجه نیروی الکترواستاتیکی حاصل از دافعه بین پروتون‌ها، پروتون‌ها از همدیگر فاصله گرفته و در نتیجه نیروی هسته‌ای کوتاه‌برد مابین آنها کاهش می‌یابد. که در این هسته‌ها نوترون‌ها هستند که با افزایش نیروی جاذبه قوی هسته‌ای باعث پایداری می‌شوند. بعضی وقت‌ها نیروی الکترواستاتیکی آنقدر قوی است که بر نیروی هسته‌ای کوتاه برد غلبه می‌کند و هسته‌ها به‌طور

3 Brody, Berry-Robnik and Abul-Magd

4 Kernel Density Estimation Method

خودبه‌خودی تجزیه شده و از خود انرژی ساطع می‌کنند (در هسته‌های بزرگ کوتاه‌برد بودن و خاصیت اشباع نیروهای هسته‌ای است که موجب می‌شود دافعه کولونی غالب شود). یک هسته ناپایدار که به‌طور خودبه‌خودی تجزیه می‌شود را رادیواکتیو گویند. فرآیندی که یک هسته رادیواکتیو به‌طور خودبه‌خود به هسته‌های کوچکتر تجزیه می‌شود را واپاشی رادیواکتیو گویند. سه نوع معمول از واپاشی رادیواکتیو عبارتند از: واپاشی آلفازا، بتازا، گامازا [۱۶].

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He \qquad (۷)$$

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e \quad , \quad {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e \quad , \quad {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{+1}e \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y \qquad (۸)$$

$${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{0}\gamma \qquad (۹)$$

تحلیل آماری طیف هسته‌ها

اگر $E_1, E_2, \ldots, E_n$ دنباله‌ای از ترازهای انرژی با اسپین و پاریتهٔ یکسان، در فاصله $\delta E (E_1 \leq E_2 \leq \ldots)$ باشند و$S_1, S_2, \ldots$ فاصله ترازها از همدیگر ($S_i = E_{i+1} - E_i$) و D فاصله میانگین ترازها از یکدیگر باشند، فاصله نسبی s_i به‌صورت $s_i = S_i/D$ تعریف می‌شود که $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ دنباله نرمالیزه شده از اختلاف فاصله بین ترازها هستند. $P(s)$ تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور (هیستوگرامی از متغیرهای s_i) می‌باشد که باید در شرایط زیر صدق کند [۲،۵،۶،۸،۹].

$$\int_0^\infty P(s)\, ds = 1 \quad , \quad \int_0^\infty s\, P(s)\, ds = 1 \qquad (۱۰)$$

شرط $\langle s \rangle = 1$ را شرط Unfolding می‌نامند. در یک فاصلهٔ بینهایت کوچک dE، اگر $\rho_{av}(E)\, dE$ تعداد میانگین ترازها باشد، فاصله میانگین ترازها درفاصله dE برابر است با:

$$D = \frac{dE}{\rho_{av}(E)\, dE} \Rightarrow D = \frac{1}{\rho_{av}(E)} \Rightarrow s_i = (E_{i+1} - E_i)\, \rho_{av}(E) \qquad (۱۱)$$

در یک دنباله بزرگ از ترازهای انرژی، $\rho_{av}(E)$ متناسب با E تغییر خواهد کرد و در نتیجه فاصله میانگین D ثابت نبوده و $\langle s \rangle \neq 1$ می‌شود. بدین منظور در تابع پله‌ای $N(E)=\sum \Theta(E-E_i)$ (تعداد ترازهای انرژی تا انرژی E) که به‌صورت مجموع دو قسمت میانگینی و افت‌خیزی ($N(E)=N_{av}(E)+N_{fluct}(E)$) نوشته می‌شود اگر $N_{av}(E)$ بهترین خط راستی یا یک بسط چندجمله‌ای $N_{av}(E)=\sum_{i=0}^{n} a_i E^i$ باشد که تابع پله‌ای $N(E)$ را برازش کند، در این‌صورت $\rho_{av}(E)$ و Dمقادیر ثابتی خواهند داشت، و با در نظر گرفتن $\varepsilon_i = N_{av}(E)$ ، $s_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ را به‌دست آورده و به‌راحتی $P(s)$ محاسبه می‌شود که به این روش Unfolding گویند (که نقش نوفه‌زدایی از طیف را ایفا می‌کند) [۲،۵،۶،۸،۹].

برای محاسبهٔ تابع توزیع$P(s)$، باید دنباله‌ای کامل و خالص از ترازها را داشته باشیم (اسپین و پاریته تمام ترازها معلوم باشد). چون چنین دنباله‌ای از ترازها فقط برای تعداد محدودی از هسته‌ها وجود دارند، برای محاسبه تابع توزیع $P(s)$ ، ترکیبی از دنباله‌های متفاوتی از ترازهای مربوط به هسته‌های مختلف را در نظر می‌گیریم. هسته‌هایی را در نظر می‌گیریم که حداقل پنج تراز متوالی ابتدایی آنها دارای اسپین و پاریته معینی باشند و انرژی آنها نیز مشخص باشد. هسته‌های در نظر گرفته شده در این مقاله در جدول ۱ آمده است [۱۷].

در مطالعهٔ ساختار هسته‌ای، بایستی تک تک هسته‌ها را مورد مطالعه قرار داد. این روش نمی‌تواند یک رابطهٔ بستگی بین هسته‌های مختلف را نمایان سازد و علاوه بر این نیاز به مطالعه حدود ۲۵۰۰ هسته کشف شده است، پس باید ساختار هسته‌ای به‌وسیلهٔ یک

مطالعه جمعی مورد بررسی قرار گیرد. در این روش سعی می‌شود که هسته‌ها را برحسب یک تعداد کوچکی از پارامترهایی که به ساختار هسته مربوط می‌شوند طبقه‌بندی و سپس مورد بررسی قرار دهند [۱۸]. در این مقاله ما هسته‌ها را برحسب پایداری یا رادیواکتیو بودن آنها و همچنین نوع واپاشی رادیواکتیو آنها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

جدول۱. هسته‌های در نظر گرفته شده که حداقل پنج تراز متوالی ابتدایی آنها دارای اسپین و پاریته معینی باشند [۱۷].

هسته‌های پایدار	^{28}Si, ^{29}Si, ^{40}Ar, ^{17}O, ^{23}Na, ^{12}C, ^{24}Mg, ^{33}S, ^{31}P, ^{48}Ti, ^{66}Zn, ^{82}Kr, ^{100}Ru, ^{94}Mo, ^{104}Pd, ^{124}Te, ^{150}Sm, ^{156}Gd, ^{168}Er, ^{174}Yb, ^{200}Hg, ^{196}Pt, ^{111}Cd, ^{179}Hf, ^{199}Hg, ^{105}Pd
هسته‌های با واپاشی آلفازا	^{146}Sm, ^{148}Sm, ^{150}Gd, ^{152}Gd, ^{106}Te, ^{164}Os, ^{156}Hf, ^{148}Gd, ^{190}Pt, ^{250}Cf, ^{246}Cm, ^{228}Th, ^{144}Nd, ^{154}Dy, ^{234}U, ^{242}Pu, ^{174}Hf, ^{190}Po
هسته‌های با واپاشی بتازا	^{206}Po, ^{100}Pd, ^{52}Fe, ^{138}Nd, ^{50}Cr, ^{44}Ti, ^{26}Si, ^{18}Ne, ^{23}Mg, ^{62}Zn, ^{122}Xe, ^{118}Xe, ^{80}Br, ^{128}Te, ^{148}Pm, ^{162}Gd, ^{178}W, ^{188}Pt, ^{42}Ar, ^{110}Ag, ^{78}Ge

چنانچه گفته شد در مطالعه رفتار آماری ترازهای انرژی سیستم‌های فیزیکی با استفاده از روش برازش (برازش هیستوگرام فواصل بین ترازی و مشخص کردن پارامترهای برازش)، بعضی مواقع وجود خطای قابل ملاحظه در این روش مانع از یک آنالیز آماری دقیق می‌شود. در این مطالعه به‌جای استفاده از روش برازش، تابع توزیع ترازهای انرژی هسته‌های پایدار و رادیواکتیو را مستقیماً با استفاده از روش تخمین دانسیته کرنلی محاسبه کرده و برای مطالعه رفتار منظم یا غیرمنظم آنها فاصله تابع توزیع به‌دست آمده نسبت به دو حد منظم و غیر منظم، با روش واگرایی Kullback-Leibeller (KLD) محاسبه می‌کنیم که توضیح آن در زیر آمده است.

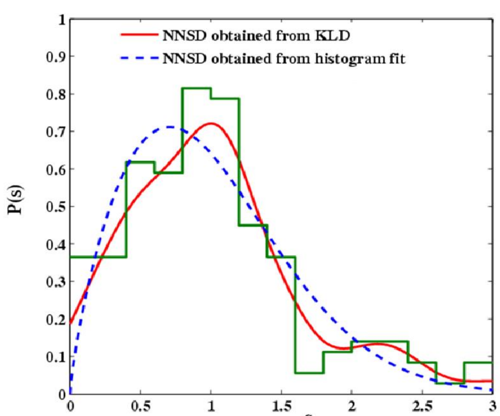
در کاربردهای آماری تخمین دانسیته کرنلی (KDE) یک تکنیک غیرپارامتری برای تخمین تابع چگالی احتمال یک دنباله از متغیرهای تصادفی می‌باشد:

اگر $(x_1,..,x_n)$ یک نمونه از متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی توزیع نامعلوم f باشد. شکل این تابع f چنان به‌دست می‌آید که تخمین‌گر دانسیته کرنلی آن به‌صورت زیر باشد [۱۹،۱۳-۱۰]:

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_h(x-x_i)=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad ۱۲$$

که در آن $K_h(x-x_i)$ کرنل می‌باشد که یک تابع مثبت متقارن با انتگرال واحد است و h پهنای باند نامیده می‌شود. یک کرنل با زیر نویس h، کرنل مدرج نامیده می‌شود و به‌صورت $K_h(x)=\frac{1}{h}K(\frac{x}{h})$ تعریف می‌شود. به‌طور ذاتی می‌توان h را تا اندازه‌ای که داده‌ها اجازه می‌دهند کوچک در نظر گرفت. از توابع کرنلی که به‌طور معمول استفاده می‌شوند، می‌توان به توزیع یکنواخت، توزیع نرمال و... اشاره کرد.

در شکل۲ مقایسه‌ای از دو روش برازش هیستوگرام و تخمین‌گر چگالی کرنلی (با کرنل گاوسی $(K_h(x)=\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-(\frac{x}{h})^2}{2}))$ در محاسبه تابع توزیع P(s) برای یک سیستم هسته‌ای آمده است [۲۰].



شکل۲. تخمین‌گر چگالی کرنلی برای هیستوگرام متناظر با کرنل گاوسی (تابع توزیع به‌دست آمده از روش‌های تخمین دانسیته کرنلی و برازش هیستوگرام به‌ترتیب با خط پررنگ و خط‌چین نشان داده شده است).

روش واگرایی Kullback-Leibeller (KLD) یک روش غیرمتقارن برای به‌دست آوردن فاصله بین دو تابع توزیع P و Q می‌باشد. که منظور از غیرمتقارن بودن این روش این است که فاصلهٔ P نسبت به Q از فاصله Q نسبت به P متفاوت خواهد بود [۱٤،۱۵،۲۱].

برای توابع توزیع احتمال P و Q از متغیرهای تصادفی گسسته x_i ، KLD به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

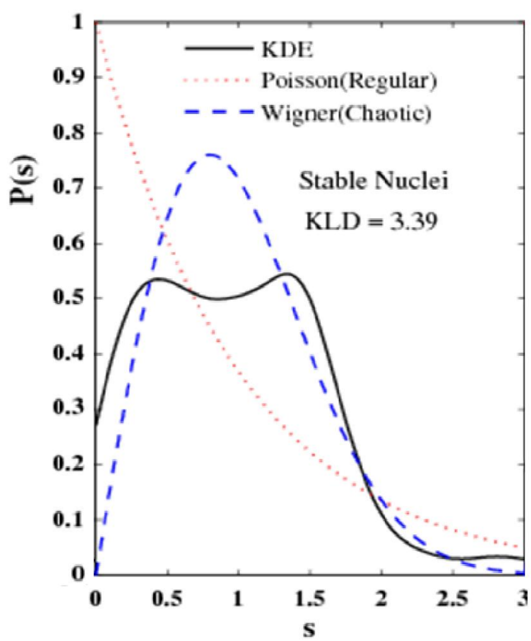
$$D_{KL}(P\|Q)=\sum_i P(x_i)\log\frac{P(x_i)}{Q(x_i)} \qquad ۱۳$$

واگرایی بین دو تابع توزیع همیشه بزرگتر یا مساوی صفر خواهد بود. اگر Q = P باشد واگرایی صفر، و در غیر این‌صورت بزرگتر از صفر خواهد بود. در این مقاله تابع توزیع به‌دست آمده از روش تخمین دانسیته کرنلی Q(x) و تابع توزیع ویگنر P(x) در نظر گرفته می‌شود. یعنی فاصله تابع توزیع به‌دست آمده را با تابع توزیع ویگنر محاسبه می‌گردد.

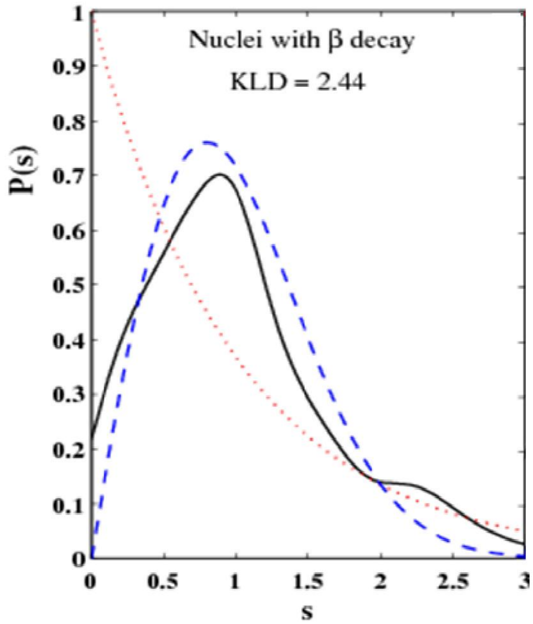
نتایج

برای بررسی میزان بی‌نظمی هسته‌های پایدار و رادیواکتیو، با استفاده از داده‌های تجربی [۲۲]، ترازهای انرژی با اسپین–پاریته 2^+ و $\frac{1}{2}^+$ که به وفور در هسته‌های زوج–زوج و زوج–فرد وجود دارند را در نظر می‌گیریم [۲،٦]. تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور را برای هسته‌های در نظر گرفته شده در جدول۱ را با روش تخمین دانسیته کرنلی و با در نظر گرفتن کرنل گاوسی ($K_h(x)=\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-(\frac{x}{h})^2}{2})$) محاسبه کرده و فاصله آن‌ها را نسبت به توزیع ویگنر (حد غیر منظم) با روش واگرایی kullback-Leibeller (KLD) محاسبه می‌کنیم.

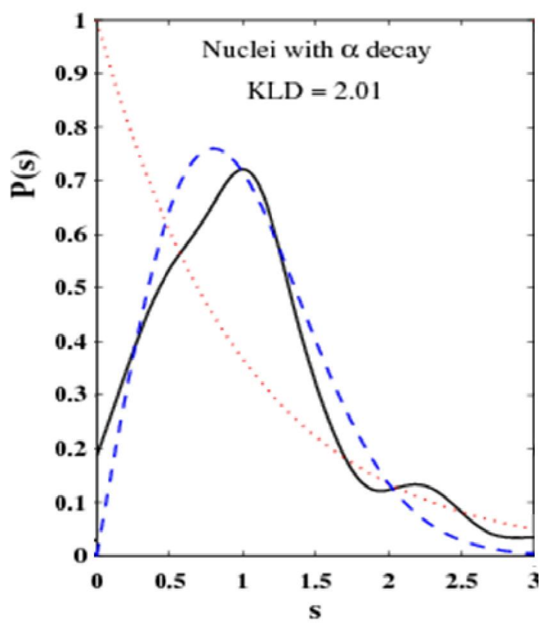
چنانچه در شکل۳ تا ۵ آمده، فاصله بین تابع توزیع تخمینی و تابع توزیع ویگنر (که با KLD مشخص شده‌اند) برای هسته‌های با واپاشی آلفا۲٫۰۱ است که نزدیکترین تابع به تابع توزیع ویگنر می‌باشد و برای هسته‌های با واپاشی بتا این فاصله ۲٫٤٤ و برای هسته های پایدار این فاصله ۳٫۳۹ می‌باشد که نشان می‌دهد هسته‌های پایدار (که فاصله بیشتری با تابع توزیع ویگنر دارند) منظم‌تر از هسته‌های رادیواکتیو بوده و هسته‌های با واپاشی آلفا (که نزدیکترین تابع به تابع توزیع ویگنر می‌باشد) غیرمنظم‌تر از سایر هسته‌ها می‌باشند.



شکل۳. تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور برای هسته‌های پایدار (تابع توزیع به‌دست آمده از روش تخمین دانسیته کرنلی با خط پررنگ و توابع توزیع پواسون و ویگنری به‌ترتیب با خطوط نقطه چین و خط چین نمایش داده شده است).



شکل٤. تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور برای هسته‌های با واپاشی بتا (تابع توزیع به‌دست آمده از روش تخمین دانسیته کرنلی با خط پررنگ و توابع توزیع پواسون و ویگنری به‌ترتیب با خطوط نقطه چین و خط چین نمایش داده شده است).



شکل۵. تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور برای هسته‌های با واپاشی آلفا (تابع توزیع به‌دست آمده از روش تخمین دانسیته کرنلی با خط پررنگ و توابع توزیع پواسون و ویگنری به‌ترتیب با خطوط نقطه چین و خط چین نمایش داده شده است).

بحث و نتیجه‌گیری

رفتار منظم سیستم‌های مورد مطالعه، معیاری از تقارن‌های موجود در آن‌ها بوده و از طرفی به رفتار جمعی تمام ذرات تشکیل دهنده هر سیستم مربوط می‌شود. از دیدگاه کلاسیکی، هر سیستم منظم دارای شکل هندسی مشخص می‌باشد که این مفهوم در دیدگاه کوآنتومی متناظر با وجود تقارن‌های دینامیکی معین و منحصر به‌فرد در ساختار داخلی سیستم است. از طرفی، چون این رفتار آماری از رفتار عمومی نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده هر سیستم حاصل می‌گردد، می‌توان از آن به‌عنوان یک ویژگی کلی (bulk) سیستم برای طبقه‌بندی رفتار هسته‌ها در شرایط خاص استفاده نمود. بارزترین نمونه از این موارد، رفتار گذار فازی–شکلی هسته‌ها بین حدود تقارنی یا همان شکل‌های معین می‌باشد. مطابق موارد اشاره شده، سیستم در ناحیه گذار فازی مجموعه‌ای از تقارن‌های مختلف را از خود نمایش داده و لذا رفتار نامنظم‌تری را نسبت به آن دسته از هسته‌ها با تقارن‌های معین در حدود مربوطه نمایش می‌دهد [۷] و رفتار آماری بهترین کمیت برای توصیف سیستم‌های در حال گذار یا آن دسته از سیستم‌های ناپایدار در حال واپاشی می‌باشد. این بدان معناست که رفتار آماری سیستم‌های فیزیکی یا همان معیار نظم برای بررسی ساختار داخلی سیستم‌های فیزیکی و توصیف کیفیت تقارن‌های هر سیستم مناسب می‌باشد. در این مقاله برای مطالعه دقیق رفتار آماری هسته‌های پایدار و رادیواکتیو از روش تخمین دانسیته کرنلی برای تخمین تابع توزیع نزدیکترین فاصله مجاور استفاده کرده و میزان نظم یا بی‌نظمی آنها را با روش واگرایی Kullback-Leibeller حساب کردیم. نتایج به‌دست آمده رفتار منظم هسته‌های پایدار را نسبت به هسته‌های رادیواکتیو نشان می‌دهد که نشان‌دهندهٔ

تقارن بیشتر ساختار هسته‌های پایدار نسبت به هسته‌های رادیواکتیو است.

مراجع

[1] M.L. Mehta, Random Matrices, *Academic Press* (2004).

[2] M.A. Jafarizadeh, N. Fouladi, H. Sabr , B. Rashidian Maleki, Investigation of spectral statistics of nuclear systems by maximum likelihood estimation method*, Nuclear Physics A* (2012) 890-891.

[3] F. Haak, Quantum signature of chaos, *springer* (2000).

[4] W.D. Heiss, A.A. Kotzé, Quantum chaos and analytic structure of the spectrum, *Physical Review A* 44 (1991) 2403–2409.

[5] A. Al-Sayed, A.Y. Abul-Magd, Level statistics of deformed even-even nuclei, *Physical Review C* 74 (2006) 037301.

[6] A.Y. Abul–Magd, et al., Statistics of 2+ levels in even-even nuclei, *Physics Letters B* 579 (2004) 278–284.

[7] Jing Shu, et al., Energy level statistics of the U(5) and O(6) symmetries in the interacting boson model, *Physical Review C* 67 (2003) 044304.

[8] A.Y. Abul-Magd, M.H. Simbelz, Nearest-neighbour-spacing distribution of low-lying nuclear energy levels, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 22 (1996) 1043–1051.

[9] V.K.B. KOTA, V. POTBHARE, Low energy level spacing distribution in the atomic table ensembles, *Physics Letters* A 80 (1980). 14-19

[10] M. Rudemo, Empirical choice of histograms and kernel density estimators, *Scandinavian Journal of Statistics* 9 (1982) 65-78.

[11] R. Terrell George, W. Scott David, Variable Kernel Density Estimation, *The Annals of Statistics*, 20 (1992) 1236-1265.

[12] A. Elgammal, R. Duraiswami, Background and foreground modeling using nonparametric kernel density estimation for visual surveillance, *Proceedings Of The IEEE* 90 (2002) 1151-1163 .

[13] S.J. Sheather, M.C. Jones, A Reliable Data-Based Bandwidth Selection Method for Kernel Density, *Journal of the Royal Statistical Society* 53 (1991) 683-690.

[14] J. Pedro Moreno, P. Purdy Ho, N. Vasconcelos, A kullback-leibler divergence based kernelfor SVM classification in multimedia applications, advances in neural information processing systems 16, *MIT Press* (2004).

[15] J.R. Hershey, P.A. Olsen, Approximating the Kullbac-kLeibler divergence between gaussian mixture models, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 4 (2007) 317-320.

[16] D.K. Jha, Radioactivity and Radioactive decay, *Discovery Publishing Pvt.Ltd, delhi* 2004.

[17] Live chart, Table of Nuclides, *(http://www-ds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html).&* National Nuclear Data Center, (Brookhaven National laboratory), chart of nuclides, *(http://www.nndc.bnl.Gov/chart/reColor.jsp?newColor=dm)*

[18] . Al-Sayed, The effect of nuclear deformation on level statistics, *Journal of Statistical* A *Mechanics* (2009) P02062.

[19] D.W. Scott, Multivariate density estimation: theory, practice and visualization, *John Wiley New York* (1992).

[20] M.A. Jafarizadeh, N. Fouladi, H. Sabri , B. Rashidian Maleki, A non-parametric estimation approach in the investigation of spectral Statistics; *Indian Journal of Physics* 87 9 (2013) 919-927.

[21] S. Mariani, etal, Machine learning in document analysis and recognition, *Springer* (2008).

[22] Nuclear Data Sheets for all considered Nuclei, (http://www.journals.elsevier.com/nuclear-data-sheets).