بررسی و مقایسه دینامیک درهم‌تنیدگی حالت W در چهار هامیلتونی مختلف، در حضور میدان مغناطیسی و برهم‌کنش DM

مجتبی جعفرپور*، سمانه حسابی

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران

چکیده

در این پژوهش تحول زمانی حالت W را تحت تأثیر چهار هامیلتونی هایزنبرگی مدل XX، Ising، XXZ و XXX به‌صورت تحلیلی محاسبه کرده و نقش برهم‌کنش DM و همچنین میدان مغناطیسی را نیز بر دینامیک درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های ابتدائی و انتهائی بررسی خواهیم کرد. ملاحظه می‌شود که در هر چهار هامیلتونی، اعمال میدان بر کل زنجیره بر درهم‌تنیدگی بی‌تأثیر است، اما اعمال میدان بر تک کیوبیت‌ها، بر درهم‌تنیدگی تأثیر می‌گذارد و می‌تواند گاهی موجب تقویت درهم‌تنیدگی شود. همچنین برهم‌کنش DM تحول زمانی سیستم را دگرگون می‌کند و در هر چهار هامیلتونی یاد شده موجب تضعیف درهم‌تنیدگی می‌شود.

کلیدواژگان: درهم‌تنیدگی، حالت W، کانکرنس، میدان مغناطیسی، برهم‌کنش DM

مقدمه

درهم‌تنیدگی کوآنتومی یک منبع بنیادی برای انجام محاسبات کوآنتومی، رمزنگاری کوآنتومی، انتقال از راه دور و کدگذاری فشرده و مانند آن است [۱-۲]. مطالعه این پدیده مخصوصاً در سیستم‌های مادهٔ چگال مانند زنجیره‌های اسپینی، مورد توجه خاص قرار گرفته است [۳-۸]. مقدار درهم‌تنیدگی بین دو اسپین در یک زنجیره، به‌دلیل برهم‌کنش سیستم با محیط یا عوامل درونی دستخوش تحول می‌شود، که به تقویت یا تضعیف آن می‌انجامد.

از مهمترین برهم‌کنش‌های خارجی و داخلی می‌توان به‌ترتیب به میدان مغناطیسی و برهم‌کنش دژیالوشینسکی-موریا (DM) اشاره کرد [۴-۹]. در این پژوهش ضمن بررسی تحلیلی درهم‌تنیدگی حالت W در چهار هامیلتونی متفاوت، نقش این دوعامل را نیز در دینامیک آن بررسی خواهیم کرد. حالت اولیهٔ سیستم حالت W است که با رابطهٔ زیر نشان داده می‌شود [۱۰-۱۳]:

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|001\rangle+|010\rangle+|100\rangle\right) \qquad ۱$$

هامیلتونی‌های مورد بررسی ناشی از زنجیره‌های اسپینی XX، Ising، XXZ و XXX در حضور میدان مغناطیسی و برهم‌کنش DM هستند که شکل کلی آنها را می‌توان با رابطه زیر توصیف کرد:

$$H=\sum_{i=1}^{N-1}\left(J_x\hat{S}_i^x\hat{S}_{i+1}^x+J_y\hat{S}_i^y\hat{S}_{i+1}^y+J_z\hat{S}_i^z\hat{S}_{i+1}^z\right)+\vec{B}.\sum_{i=1}^{N}\vec{S}_i+\vec{D}.\sum_{i=1}^{N-1}\left(\vec{S}_i\times\vec{S}_{i+1}\right) \qquad ۲$$

جملهٔ اول زنجیرهٔ اسپینی هایزنبرگی را توصیف می‌کند، که در آن $J_i\left(i=x,y,z\right)$ ثابت برهم‌کنش

*نویسنده مسئول: mojtaba_jafarpour@yahoo.com

تبادلی بین اسپین‌ها، $\vec{D}$ نمایندهٔ برهم‌کنش DM و $\vec{B}$ میدان مغناطیسی است. در مدل XXX، $J_x = J_y = J_z$، در مدل Ising $J_x = J_y = 0$، در مدل XX، $J_x = J_y = J\,,\, J_z = 0$ و در مدل XXZ، $J_x = J_y \neq J_z$ است. جملهٔ دوم در رابطهٔ (۲) نشان‌دهنده اثر میدان مغناطیسی است، که برای سهولت آن‌را در جهت محور z در نظر می‌گیریم. جملهٔ سوم نیز اثر برهم‌کنش DM را نشان می‌دهد [۴-۹].

اثر میدان مغناطیسی را در سه وضعیت بررسی می‌کنیم. الف: میدان روی کل سیستم اعمال می‌شود. ب: میدان روی یکی از کیوبیت‌های اول یا انتهای زنجیره اعمال می‌شود. ج: میدان روی کیوبیت دوم اعمال می‌شود. برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت از تابع کانکرنس استفاده می‌کنیم، که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود [۷-۹].

$$C(\hat{\rho}) = \max\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right)$$ ۳

که در آن λ_iها ویژه‌مقادیر مرتب شده نزولی ماتریس اسپین وارون R هستند:

$$R = \rho\left(\sigma_y \otimes \sigma_y\right)\rho^*\left(\sigma_y \otimes \sigma_y\right)$$ ٤

ρ^* مزدوج مختلط ماتریس چگالی سیستم دو کیوبیتی در پایه‌های محاسباتی $\langle 11|$، $\langle 10|$، $\langle 01|$ و $\langle 00|$ و σ_y ماتریس پائولی است. C=0 متناظر با حالت جدایی‌پذیر و C=1 متناظر با حالتی است که درهم‌تنیدگی بیشینه را دارد (مانند حالت‌های بل) [۷-۹].

برای به‌دست آوردن تابع کانکرنس در مورد هر هامیلتونی به‌روش زیر عمل می‌کنیم. ابتدا با استفاده از هامیلتونی مورد نظر، معادلهٔ شرودینگر را حل کرده و عملگر تحول زمانی را به‌دست می‌آوریم. سپس با اعمال آن بر حالت اولیه، حالت تحول یافته، $|\psi(t)\rangle$، و ماتریس عملگر چگالی نظیر آن، $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ را محاسبه می‌کنیم. چون هدف ما محاسبهٔ درهم‌تنیدگی بین کیوبیت ابتدائی و انتهائی زنجیره است، در مرحلهٔ بعدی با گرفتن رد جزئی روی کیوبیت دوم، ماتریس چگالی کاهش یافتهٔ مربوط به این دو کیوبیت را به‌دست می‌آوریم. در نهایت ماتریس اسپین وارون و ویژه‌مقادیر آن‌را یافته و تابع کانکرنس را محاسبه می‌کنیم. برای هر یک از چهار هامیلتونی یاد شده، روند بالا را دنبال خواهیم کرد.

مدل XX

وضعیتی را بررسی می‌کنیم که میدان بر کل سیستم اعمال شده است. با در نظر گرفتن $\mathrm{J_x} = \mathrm{J_y} = \frac{1}{2}$، هامیلتونی زنجیرهٔ مورد استفاده در این قسمت برحسب ماتریس‌های پائولی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$H = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^x\sigma_2^x + \sigma_1^y\sigma_2^y + \sigma_2^x\sigma_3^x + \sigma_2^y\sigma_3^y\right) + \frac{B}{2}\left(\sigma_1^z + \sigma_2^z + \sigma_3^z\right) + \frac{D}{4}\left(\sigma_1^x\sigma_2^y - \sigma_1^y\sigma_2^x + \sigma_2^x\sigma_3^y - \sigma_2^y\sigma_3^x\right)$$ ۵

با انتخاب حالت W به‌عنوان حالت اولیه، حالت وابسته به زمان را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

$$|\psi(\mathrm{t})\rangle = \hat{\mathrm{U}}(\mathrm{t})|\psi(0)\rangle$$ ٦

$\hat{\mathrm{U}}(\mathrm{t})$ با یک ماتریس ۸×۸ نمایش داده می‌شود که با در نظر گرفتن D=0، مؤلفه‌های غیر صفر آن به قرار زیر است:

$$\mathrm{U_{11}} = \mathrm{U_{88}^*} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\mathrm{iBt}}$$ ۷

$$\mathrm{U_{22}} = \mathrm{U_{55}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{iBt}} \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$ ۸

$$\mathrm{U_{44}} = \mathrm{U_{77}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{iBt}} \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$ ۹

$$\mathrm{U_{33}} = \mathrm{U_{66}^*} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{iBt}} \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{2}}\right)$$ ۱۰

$$\mathrm{U_{25}} = \mathrm{U_{52}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{iBt}}}{2}\left[-1 + \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{2}}\right)\right]$$ ۱۱

$$U_{47}=U_{74}=\frac{e^{\frac{1}{2}iBt}}{2}\left[-1+\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad ۱۲$$

$$U_{46}=U_{64}=U_{67}=U_{76}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left[ie^{\frac{1}{2}iBt}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad ۱۳$$

$$U_{23}=U_{32}=U_{53}=U_{35}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left[ie^{-\frac{1}{2}iBt}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad ۱٤$$

اینک مؤلفه‌های غیر صفر حالت تحول یافته را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\psi(t)\right)_{41}=\frac{e^{\frac{iBt}{2}}}{2\sqrt{3}}\left[2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad ۱۵$$

$$\left(\psi(t)\right)_{61}=\frac{e^{\frac{iBt}{2}}}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad ۱٦$$

$$\left(\psi(t)\right)_{71}=\frac{e^{\frac{iBt}{2}}}{2\sqrt{3}}\left[2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad ۱۷$$

همچنین مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کل سیستم نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{44}=\rho_{77}=\rho_{47}=\rho_{74}=\frac{1}{12}\left(3+\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right) \quad ۱۸$$

$$\rho_{46}=\rho^{*}_{64}=\rho_{76}=\rho^{*}_{67}=\frac{1}{12}\left(4+i\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \quad ۱۹$$

$$\rho_{66}=\frac{1}{6}\left(3-\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right) \quad ۲۰$$

حال با گرفتن رد جزئی روی کیوبیت دوم، ماتریس چگالی کاهش یافته ٤×٤ را به‌دست می‌آوریم، که مؤلفه‌های غیر صفر آن با روابط زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\rho_{44red}=\frac{1}{6}\left[3-\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right] \quad ۲۱$$

$$\rho_{22red}=\rho_{23red}=\frac{1}{12}\left[3+\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right] \quad ۲۲$$

$$\rho_{32red}=\rho_{33red}=\frac{1}{12}\left[3+\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right] \quad ۲۳$$

برای مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس اسپین وارون نیز خواهیم یافت:

$$R_{22}=R_{23}=R_{32}=R_{33}=\frac{1}{72}\left[3+\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right]^{2} \quad ۲٤$$

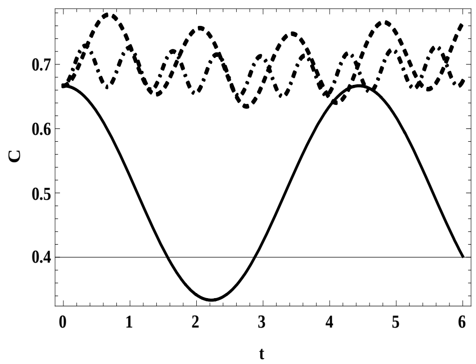
ویژه‌مقادیر ماتریس فوق به‌صورت زیر است:

$$\lambda_1=\frac{1}{36}\left(3+\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right)^{2} \quad ۲۵$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \quad ۲٦$$

بنابراین براساس رابطهٔ (۳) اینک کانکرنس را در اختیار داریم، که با توجه به ویژه‌مقادیر به‌دست آمده، کانکرنس به B بستگی ندارد. بنابراین میدان مغناطیسی در این وضعیت بر درهم‌تنیدگی سیستم تأثیرگذار نیست.

در شکل‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب نمودار کانکرنس برحسب زمان به ازاء مقادیر متفاوت میدان مغناطیسی اعمال شده بر کیوبیت اول و کیوبیت دوم نشان داده شده است. دیده می‌شود که در هر دو مورد، در حضور میدان مغناطیسی اعمال شده، نوسانات کانکرنس شدیدتر شده و دورهٔ تناوب کوتاه‌تر می‌شود. علاوه‌براین هر اندازه میدان اعمال شده بر کیوبیت دوم بیشتر شود، درهم‌تنیدگی میانگین نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۱. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XX: اعمال میدان بر کیوبیت اول به ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10 (خط چین-نقطه).

اینک برهم‌کنش DM را در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن B=0، مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس عملگر تحول زمانی به‌صورت زیر هستند:

$$U_{11}=U_{88}=1 \quad ۲۷$$

$$U_{22}=U_{44}=U_{55}=U_{77}=\cosh\left(\frac{Pt}{2}\right)^{2} \quad ۲۸$$

$$U_{33}=U_{66}=\cosh\left(Pt\right) \quad ۲۹$$

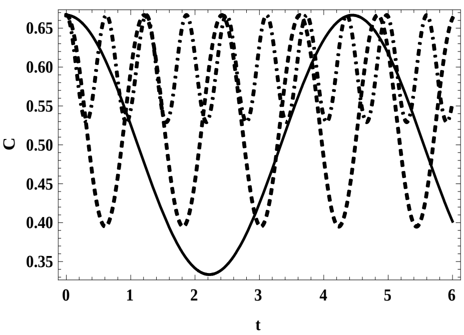
$$U_{32}=U_{53}=U_{64}=U_{76}=\frac{-1}{2P}\left[\left(i+D\right)\sinh\left(pt\right)\right] \quad ۳۱$$

$$U_{23}=U_{35}=U_{46}=U_{67}=\frac{1}{2P}\left[(-i+D)\sinh(pt)\right] \quad ۳۲$$

$$U_{52}=U_{74}=\frac{-1}{D-i}\left[(i+D)\sinh\left(\frac{Pt}{2}\right)^2\right] \quad ۳۳$$

$$U_{25}=U_{47}=\frac{-1}{i+D}\left[(-i+D)\sinh\left(\frac{Pt}{2}\right)^2\right] \quad ۳٤$$

که در آنها، $P=\frac{\sqrt{-1-D^2}}{\sqrt{2}}$ تعریف شده است.



شکل۲. کانکرنس برحسب t در زنجیره‌ی XX: اعمال میدان بر کیوبیت دوم به ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10(خط چین–نقطه).

بنابراین مؤلفه‌های غیر صفر حالت تحول یافته به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

بنابراین مؤلفه‌های غیر صفر حالت تحول یافته به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left(\psi(t)\right)_{41}=\frac{1}{2\sqrt{3}(i+D)}\left[2D+2i\cosh(Pt)-2P\sinh(Pt)\right] \quad ۳٤$$

$$\left(\psi(t)\right)_{61}=\frac{1}{\sqrt{3}\left(1+D^2\right)}\left[\left(1+D^2\right)\cosh(Pt)+i2P\sinh(Pt)\right] \quad ۳۵$$

$$\left(\psi(t)\right)_{71}=\frac{1}{2\sqrt{3}(-i+D)}\left[2D-2i\cosh(Pt)+2P\sinh(Pt)\right] \quad ۳٦$$

بعد از محاسبهٔ ماتریس عملگر چگالی کل سیستم و گرفتن رد جزئی روی کیوبیت دوم، مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کاهش یافته با روابط زیر نشان داده می‌شوند:

$$\rho_{44red}=\frac{1}{6\left(1+D^2\right)}\left[3+D^2+\left(-1+D^2\right)\cosh(2Pt)\right] \quad ۳۷$$

$$\rho_{22red}=\left[\frac{3+5D^2-\left(-1+D^2\right)\cosh(2Pt)-8DP\sinh(pt)}{12\left(1+D^2\right)}\right] \quad ۳۸$$

$$\rho_{33red}=\left[\frac{3+5D^2-\left(-1+D^2\right)\cosh(2Pt)+8DP\sinh(pt)}{12\left(1+D^2\right)}\right] \quad ۳۹$$

$$\rho_{23red}=\left[\frac{8iD\cosh(pt)+\left(-1+D^2\right)\left(3+\cosh(2Pt)\right)}{12(i+D)^2}\right] \quad ٤۰$$

$$\rho_{32red}=\left[\frac{-8iD\cosh(pt)+\left(-1+D^2\right)\left(3+\cosh(2Pt)\right)}{12(-i+D)^2}\right] \quad ٤۱$$

در نتیجه مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس اسپین وارون به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}R_{22}=&\frac{1}{144(i+D)^4}\left[8iD\cosh(Pt)+\left(-1+D^2\right)\left(3+\cosh 2Pt\right)\right]^2\\&+\frac{1}{288\left(1+D^2\right)^2}\left[19+26D^2+19D^4+4\left(3+D^2\right)\left(1+3D^2\right)^2\cosh(2Pt)\right]\\&+\frac{1}{288\left(1+D^2\right)^2}\left[\left(-1+D^2\right)^2\cosh(4Pt)\right]\end{aligned} \quad ٤۲$$

$$\begin{aligned}R_{23}=&\frac{-1}{72\left(1+D^2\right)^3}\left[16D^2\cosh(Pt)+\left(-1+D^2\right)^2\left(3+\cosh(2Pt)\right)\right]\\&\left[-3-5D^2+\left(-1+D^2\right)\cosh(2Pt)+8DP\sinh(Pt)\right]\end{aligned} \quad ٤۳$$

$$\begin{aligned}R_{33}=&\frac{1}{144(-i+D)^4}\left[-8iD\cosh(Pt)+\left(-1+D^2\right)\left(3+\cosh 2Pt\right)\right]^2\\&+\frac{1}{288\left(1+D^2\right)^2}\left[19+26D^2+19D^4+\left(-1+D^2\right)^2\cosh(4Pt)\right]\end{aligned} \quad (٤٤)$$

$$\begin{aligned}R_{32}=&\frac{-1}{72\left(1+D^2\right)^3}\left[16D^2\cosh(Pt)+\left(-1+D^2\right)^2\left(3+\cosh(2Pt)\right)\right]\\&\left[-3-5D^2+\left(-1+D^2\right)\cosh(2Pt)-8DP\sinh(Pt)\right]\end{aligned} \quad ٤۵$$

با ادامه کار طبق روند قبلی، تابع کانکرنس را محاسبه می‌کنیم. در شکل۳ تغییرات کانکرنس برحسب زمان به‌ازاء مقادیر متفاوت پارامتر D تحت هامیلتونی زنجیره XX نشان داده شده است. دیده می‌شود که در حضور و همچنین غیاب برهم‌کنش DM، کانکرنس به‌طور تناوبی نوسان می‌کند، اما با افزایش پارامتر D نوسانات کانکرنس شدیدتر شده و دورهٔ تناوب آن کوتاه‌تر می‌شود.

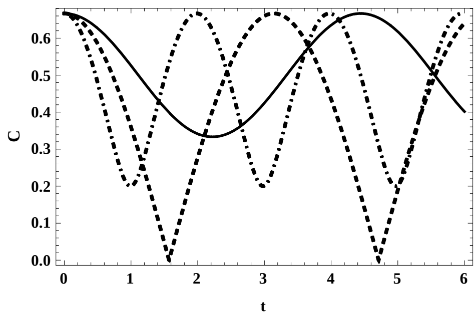
مدل Ising

با در نظر گرفتن میدان اعمال شده بر کل سیستم، کیوبیت اول و کیوبیت دوم در زنجیرهٔ آیزینگ، حالت‌های تحول یافته به‌ترتیب با حالت‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$\left(\left|\psi(t)\right\rangle\right)_1 = \frac{e^{\frac{iBt}{2}}}{\sqrt{3}}\left(\left|100\right\rangle + \left|001\right\rangle\right) + \frac{e^{\frac{i(1+B)t}{2}}}{\sqrt{3}}\left|010\right\rangle \quad ٤٦$$

$$\left(\left|\psi(t)\right\rangle\right)_2 = \frac{e^{-\frac{iBt}{2}}}{\sqrt{3}}\left(\left|100\right\rangle\right) + \frac{e^{\frac{iBt}{2}}}{\sqrt{3}}\left(\left|001\right\rangle\right) + \frac{e^{\frac{i(1+B)t}{2}}}{\sqrt{3}}\left|010\right\rangle \quad ٤٧$$

$$\left(\left|\psi(t)\right\rangle\right)_3 = \frac{e^{\frac{iBt}{2}}}{\sqrt{3}}\left(\left|100\right\rangle + \left|001\right\rangle\right) + \frac{e^{\frac{-i(-1+B)t}{2}}}{\sqrt{3}}\left|010\right\rangle \quad ٤٨$$



شکل۳. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XX، به ازاء B=0، D=0 (خط توپر)، D=1 (خط چین)، D=2 (خط چین-نقطه).

روند ادامهٔ محاسبات شبیه حالت قبلی است و بنابراین به بیان نتایج بسنده می‌کنیم. نمودار کانکرنس برحسب زمان به ازاء مقادیر متفاوت میدان اعمال شده بر کل سیستم، میدان اعمال شده بر کیوبیت اول و میدان اعمال شده بر کیوبیت دوم در شکل ٤ نشان داده شده است. چنان‌که دیده می‌شود، در هر سه وضعیت میدان بر در هم‌تنیدگی تأثیرگذار نیست و مقدار کانکرنس برابر با C = 0.66 است. بنابراین میدان مغناطیسی در این زنجیره، بر درهم‌تنیدگی سیستم تأثیر گذار نیست.

با در نظر گرفتن اثر برهم‌کنش DM، مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس عملگر تحول زمانی برای هامیلتونی آیزینگ به قرار زیر است:

$$U_{11} = U_{88} = e^{-\frac{it}{2}} \quad ٤٩$$

$$U_{23} = U_{35} = U_{46} = U_{67} = \frac{1}{2X}\left[De^{-\frac{1}{4}(-i+2X)}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٥٠$$

$$U_{22} = U_{44} = U_{55} = U_{77} = \frac{1}{2}\left[1+e^{\frac{it}{4}}\left\{\cosh\left(\frac{1}{2}Xt\right) - \frac{i\sin\left(\frac{1}{2}Xt\right)}{2X}\right\}\right] \quad ٥١$$

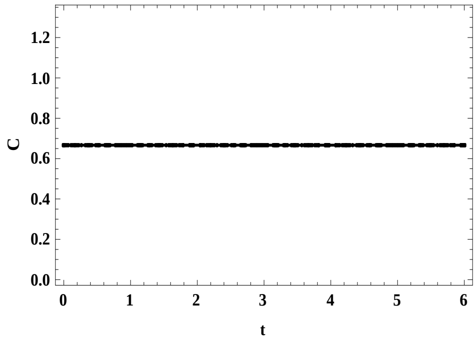
$$U_{25} = U_{47} = \frac{1}{2}\left[1+e^{\frac{it}{4}}\left\{-\cosh\left(\frac{1}{2}Xt\right) + \frac{i\sinh\left(\frac{1}{2}Xt\right)}{2X}\right\}\right] \quad ٥٢$$

$$U_{52} = U_{74} = \frac{1}{2}\left[1+e^{\frac{it}{4}}\left\{-\cosh\left(\frac{1}{2}Xt\right) + \frac{i\sinh\left(\frac{1}{2}Xt\right)}{2X}\right\}\right] \quad ٥٣$$

$$U_{32} = U_{53} = U_{64} = U_{76} = -\frac{1}{2X}\left[De^{-\frac{1}{4}(-i+2X)}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٥٤$$

$$U_{33} = U_{66} = e^{\frac{it}{4}}\left(\cosh\left(\frac{1}{2}Xt\right) - \frac{2iX}{\left(1+8D^2\right)}\sinh\left(\frac{1}{2}Xt\right)\right) \quad ٥٥$$

که در آن، $X = \frac{\sqrt{-1-8D^2}}{2}$، تعریف شده است.



شکل٤. نمودار کانکرنس برحسب t در زنجیره Ising: اعمال میدان برکل سیستم، کیوبیت اول و کیوبیت دوم به ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10 (خط چین-نقطه).

بعد از اعمال عملگر تحول زمانی بر حالت اولیه، حالت تحول یافته را به‌دست می‌آوریم، که مؤلفه‌های ماتریسی غیر صفر آن عبارتند از:

$$\left(\psi(t)\right)_{41}=\frac{1}{\sqrt{3}Q}\left[Q-2DXe^{-\frac{(-i+2X)t}{4}}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٥٦$$

$$\left(\psi(t)\right)_{61}=\frac{e^{\frac{it}{4}}}{\sqrt{3}Q}\left[Q\cosh\left(\frac{Xt}{2}\right)-2iX\sinh\left(\frac{Xt}{2}\right)\right] \quad ٥٧$$

$$\left(\psi(t)\right)_{71}=\frac{1}{\sqrt{3}Q}\left[Q+2DXe^{-\frac{(-i+2X)t}{4}}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٥٨$$

که در آن، $Q=1+8D^2$، تعریف شده است. اینک ماتریس عملگر چگالی کاهش یافته را به‌دست می‌آوریم. مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس یاد شده با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\rho_{22red}=\frac{1}{3Q^2}\left[Q-2DXe^{\frac{-1}{4}(-i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right]\left[Q-2DXe^{\frac{-1}{4}(i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٥٩$$

$$\rho_{33red}=\frac{1}{3Q^2}\left[Q+2DXe^{\frac{-1}{4}(-i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right]\left[Q+2DXe^{\frac{-1}{4}(i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٦٠$$

$$\rho_{23red}=\frac{1}{3Q^2}\left[Q-2DXe^{\frac{-1}{4}(-i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right]\left[Q+2DXe^{\frac{-1}{4}(i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٦١$$

$$\rho_{32red}=\frac{1}{3Q^2}\left[Q+2Dxe^{\frac{-1}{4}(-i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right]\left[Q-2DXe^{\frac{-1}{4}(i+2X)t}\left(-1+e^{Xt}\right)\right] \quad ٦٢$$

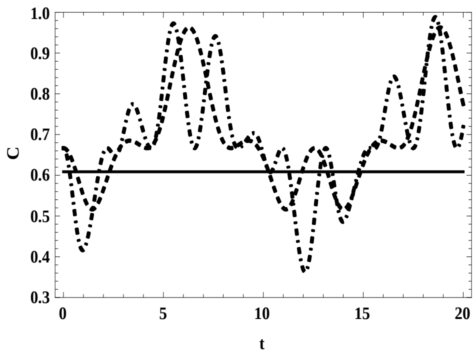
$$\rho_{44red}=\frac{1}{3+24D^2}\left[1+4D^2+4D^2\cosh\left(Xt\right)\right] \quad ٦٣$$

در نهایت ماتریس اسپین وارون و سپس ویژه‌مقادیر آن را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_1=\frac{4e^{-2Xt}}{9Q^2}\left(Qe^{\frac{1}{2}(-i+2X)t}+D^2\left(-1+e^{Xt}\right)^2\right)\left(Qe^{\frac{1}{2}(i+2X)t}+D^2\left(-1+e^{Xt}\right)^2\right) \quad ٦٤$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \quad ٦٥$$

در شکل٥، تغییرات کانکرنس برحسب زمان به‌ازاء مقادیر متفاوت پارامتر D تحت هامیلتونی زنجیرهٔ آیزینگ نشان داده شده است. دیده می‌شود که در غیاب برهم‌کنش DM کانکرنس ثابت است. اما در حضور این برهم‌کنش، کانکرنس نوسان کرده و با افزایش قدرت این برهم‌کنش، نوسانات شدیدتر می‌شود.



شکل۵. کانکرنس برحسب t در زنجیرۀ Ising به‌ازاء B=0، D=0 (خط توپر)، D=1 (خط چین)، D=2 (خط چین–نقطه).

مدل XXZ

ابتدا میدان را بر کل سیستم اعمال می‌کنیم. در این وضعیت مؤلفه‌های ماتریسی غیر صفر حالت تحول یافته به‌صورت زیر است:

$$(\psi(t))_{41}=\frac{1}{3}e^{\frac{i(1+B)t}{2}}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-2i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \quad ٦٦$$

$$(\psi(t))_{61}=\frac{1}{3}e^{\frac{i(1+B)t}{2}}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \quad ٦٧$$

$$(\psi(t))_{71}=\frac{1}{3}e^{\frac{i(1+B)t}{2}}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-2i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \quad ٦٨$$

مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس چگالی نظیر حالت بالا نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\rho_{44}=\rho_{47}=\rho_{74}=\rho_{77}=\frac{1}{18}\left(7-\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٦٩$$

$$\rho_{66}=\frac{1}{9}\left(2+\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧٠$$

$$\rho_{46}=\rho_{76}=\frac{1}{18}\left(5+\cos\left(\sqrt{3}t\right)-i\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧١$$

$$\rho_{64}=\rho_{67}=\frac{1}{18}\left(5+\cos\left(\sqrt{3}t\right)+i\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧٢$$

اینک ماتریس چگالی کاهش یافته را به‌دست می‌آوریم. مؤلفه‌های غیر صفر آن با روابط زیر توصیف می‌شوند:

$$\rho_{22red}=\rho_{23red}=\frac{1}{18}\left(7-\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧٣$$

$$\rho_{32red}=\rho_{33red}=\frac{1}{18}\left(7-\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧٤$$

$$\rho_{44red}=\frac{1}{9}\left(2+\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧٥$$

مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس اسپین وارون نیز مشابه روند قبلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_{22}=R_{23}=R_{32}=R_{33}=\frac{1}{162}\left[-7+\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right]^2 \quad ٧٦$$

ویژه‌مقادیر ماتریس یاد شده برابر است با:

$$\lambda_1=\frac{1}{162}\left(99-28\cos\left(\sqrt{3}t\right)+\cos\left(2\sqrt{3}t\right)\right) \quad ٧٧$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \quad ٧٨$$

اینک با استفاده از رابطۀ (۳) تابع کانکرنس را به‌دست می‌آوریم. با توجه به ویژه‌مقادیر به‌دست آمده، در این وضعیت نیز میدان بر درهم‌تنیدگی تأثیر گذار نیست.

در شکل ٦ تغییرات کانکرنس برحسب زمان به ازاء مقادیر متفاوت میدان مغناطیسی اعمال شده بر کیوبیت اول تحت هامیلتونی زنجیره‌ی XXZ، نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود که میدان مغناطیسی افت و خیزهای شدیدی را در درهم‌تنیدگی ایجاد می‌کند، اما به‌طور میانگین موجب تشدید درهم‌تنیدگی در مقایسه با مقدار آغازین می‌گردد.

در وضعیتی که میدان بر کیوبیت دوم اعمال می‌شود، مؤلفه‌های غیر صفر ماتریسی حالت تحول یافته به‌صورت زیر هستند:

$$(\psi(t))_{41}=\frac{e^{\frac{it}{2}}\left(Y\cosh(Mt)-2Mi(-2+B)\sinh(Mt)\right)}{\sqrt{3}Y} \quad ٧٩$$

$$(\psi(t))_{61}=\frac{e^{\frac{it}{2}}\left(Y\cosh(Mt)+2iM(1+B)\sinh(Mt)\right)}{\sqrt{3}Y} \quad ٨٠$$

$$(\psi(t))_{71}=\frac{e^{\frac{it}{2}}\left(Y\cosh(Mt)-2iM(-2+B)\sinh(Mt)\right)}{\sqrt{3}Y} \quad ٨١$$

که در آن‌ها $Y=3+\left(-2B+B^2\right)$ و $M=\frac{1}{2}\sqrt{-3+2B-B^2}$ تعریف شده است.

در این حالت مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس چگالی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_{22red}=\rho_{33red}=\rho_{32red}=\rho_{23red} \quad ٨٢$$
$$=\frac{1}{6Y}\left[7-6B+2B^2+(-1+2B)\cosh(2Mt)\right]$$

$$\rho_{44red}=\frac{1}{3Y}\left[2+B^2+(1-2B)\cosh(2Mt)\right] \quad ٨٣$$

همچنین مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس اسپین وارون به‌صورت زیر هستند:

$$R_{22}=R_{23}=R_{32}=R_{33} \quad ٨٤$$

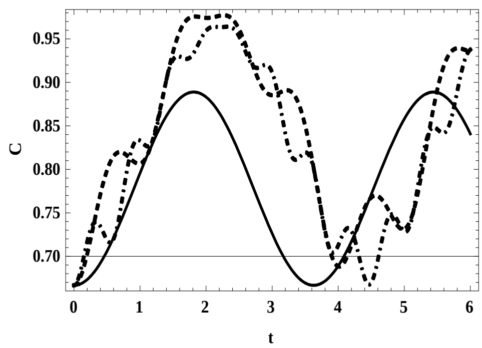
$$=\frac{1}{18Y^2}\left[7+\left(-6B+2B^2\right)+\left(-1+2B\right)\cosh\left(2Mt\right)\right]^2$$

ویژه‌مقادیر این ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

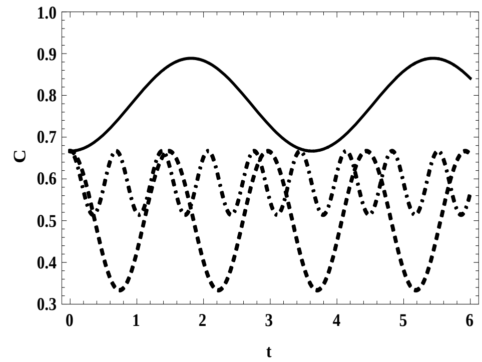
$$\lambda_4=\frac{1}{9Y^2}\left[7+\left(-6B+2B^2\right)+\left(-1+2B\right)\cosh\left(2Mt\right)\right]^2 \quad ۸۵$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \quad ۸٦$$

اینک با استفاده از رابطهٔ (۳) کانکرنس را در اختیار داریم. در شکل ۷ تغییرات کانکرنس برحسب زمان به ازاء مقادیر متفاوت میدان مغناطیسی اعمال شده بر کیوبیت دوم تحت هامیلتونی زنجیرهٔ XXZ، نشان داده شده است. می‌بینیم که با اعمال میدان بر کیوبیت دوم، کانکرنس نوسانات هموار و منظمی دارد، اما با افزایش اندازهٔ میدان دورهٔ تناوب کوتاه‌تر می‌شود.

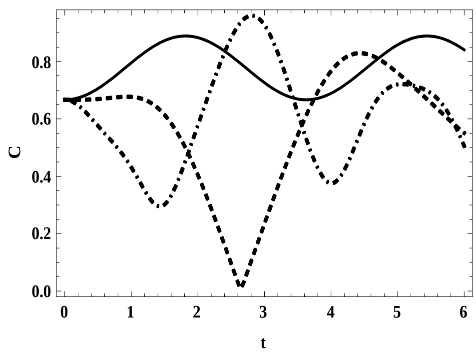


شکل٦. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XXZ : اعمال میدان بر کیوبیت اول به ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10 (خط چین-نقطه)



شکل۷. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XXZ: اعمال میدان بر کیوبیت دوم به ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10 (خط چین-نقطه).

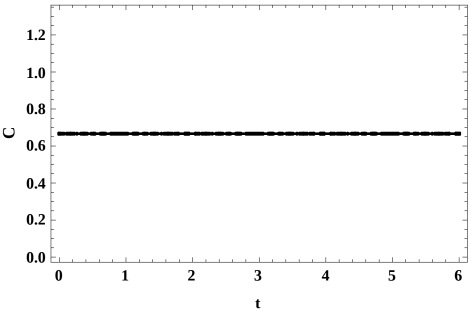
در شکل ۸، تغییرات کانکرنس برحسب زمان به ازاء مقادیر متفاوت پارامتر D تحت هامیلتونی زنجیرهٔ XXZ نشان داده شده است. دیده می‌شود که در غیاب برهم‌کنش DM، کانکرنس نوسانات هموار و منظمی دارد. اما در حضور این برهم‌کنش، نوسانات کانکرنس نامنظم می‌شود و با افزایش اندازهٔ پارامتر D، درهم‌تنیدگی به‌طور میانگین کاهش می‌یابد.



شکل۸. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XXZ، به ازاء B=0، D=0 (خط توپر)، D=1 (خط چین)، D=2 (خط چین-نقطه).

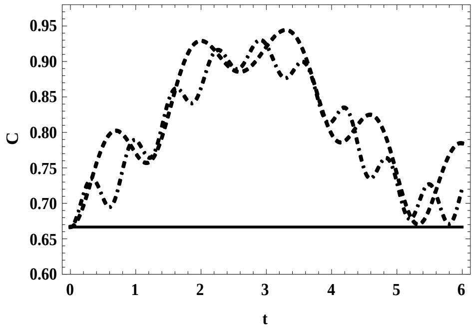
مدل XXX

با اعمال میدان بر کل سیستم در زنجیرهٔ XXX و انجام محاسبات، نمودار کانکرنس برحسب زمان به‌ازاء مقادیر متفاوت میدان مغناطیسی در شکل۹ نشان داده شده است. چنان‌که می‌بینیم در این وضعیت میدان بر درهم‌تنیدگی تأثیر گذار نیست و کانکرنس مقدار ثابت C=0.66 را دارا است.



شکل۹. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XXX: اعمال میدان بر کل سیستم به‌ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10 (خط چین-نقطه)

در شکل ۱۰ تغییرات کانکرنس برحسب زمان، به‌ازاء مقادیر مختلف میدان مغناطیسی اعمال شده بر کیوبیت اول، تحت هامیلتونی زنجیرهٔ XXX نشان داده شده است. مشاهده می‌کنیم که با اعمال میدان بر کیوبیت اول، کانکرنس رفتار نوسانی نامنظمی دارد، اما حضور میدان موجب تقویت درهم‌تنیدگی شده است.



شکل۱۰. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XXX: اعمال میدان بر کیوبیت اول به‌ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10 (خط چین-نقطه).

در وضعیتی که میدان بر کیوبیت دوم اعمال می‌شود، مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس حالت تحول یافته به‌صورت زیر هستند:

$$(\psi(t))_{41}=\frac{e^{\frac{it}{4}}}{\sqrt{3}W}\left[W\cosh(Nt)+4i(3-2B)N\sinh(Nt)\right] \qquad ۸۷$$

$$(\psi(t))_{61}=\frac{e^{\frac{it}{4}}}{\sqrt{3}W}\left[W\cosh(Nt)+4i(3+2B)N\sinh(Nt)\right] \qquad ۸۸$$

$$(\psi(t))_{71}=\frac{e^{\frac{it}{4}}}{\sqrt{3}W}\left[W\cosh(Nt)+4i(3-2B)N\sinh(Nt)\right] \qquad ۸۹$$

که در آن‌ها $W=\left(9-4B+4B^2\right)$ و $N=\frac{1}{4}\sqrt{-9+4B-4B^2}$ تعریف شده است.

در این حالت مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کاهش یافته به‌قرار زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_{22red}=\rho_{23red}=\rho_{32red}=\rho_{33red}=\frac{1}{3W}\left[9-8B+4B^2+4B\cosh(2Nt)\right] \qquad ۹۰$$

$$\rho_{44red}=\frac{1}{3W}\left[9+4B+4B^2-8B\cosh(2Nt)\right] \qquad ۹۱$$

همچنین مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس اسپین وارون به‌صورت زیرهستند:

$$R_{22}=R_{23}=R_{32}=R_{33}=\frac{2}{9W^2}\left[9-8B+4B^2+4B\cosh(2Nt)\right]^2 \qquad ۹۲$$

ویژه‌مقادیر این ماتریس برابر است با:

$$\lambda_1=\frac{4}{9W^2}\left[9-8B+4B^2+4B\cosh(2Nt)\right]^2 \qquad ۹۳$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \qquad ۹۴$$

در شکل۱۱ نمودار کانکرنس برحسب زمان به‌ازاء مقادیر متفاوت میدان اعمال شده بر کیوبیت دوم برای زنجیرهٔ XXX نشان داده شده است. دیده می‌شود که در این حالت نیز افزایش میدان، زمان تناوب نوسانات را کاهش می‌دهد اما به‌طور میانگین درهم‌تنیدگی را تشدید می‌کند.

اینک با در نظر گرفتن اثر برهم‌کنش DM و اعمال عملگر تحول زمانی بر حالت اولیه، حالت تحول یافته را برای هامیلتونی XXX به‌دست می‌آوریم. مؤلفه‌های ماتریس غیر صفر آن به قرار زیر هستند:

$$(\psi(t))_{41}=\frac{e^{-\frac{1}{4}(-i+E)t}}{2\sqrt{3}(i+D)Z}\left[3E+2D^2E-3Ee^{\frac{1}{2}Et}\right] \qquad ۹۵$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}(-i+E)t}}{2\sqrt{3}(i+D)Z}\left[-2D^2Ee^{\frac{1}{2}Et}+2DZe^{\frac{1}{4}(-i+E)t}\right]$$

$$+\frac{ie^{-\frac{1}{4}(-i+E)t}}{2\sqrt{3}(i+D)}\left(1+e^{\frac{1}{2}Et}\right)$$

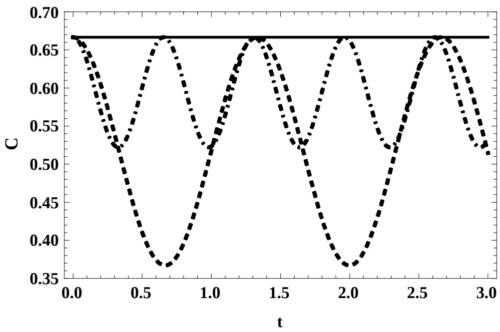
$$\left(\psi(t)\right)_{61}=\frac{e^{\frac{it}{4}}}{\sqrt{3}Z}\left[Z\cosh\left(\frac{1}{4}Et\right)+3iE\sinh\left(\frac{1}{4}Et\right)\right] \tag{۹۶}$$

$$\left(\psi(t)\right)_{71}=\frac{e^{-\frac{1}{4}(-i+E)t}}{2\sqrt{3}(-i+D)Z}\left(-3E-2D^2E+3Ee^{\frac{1}{2}Et}\right) \tag{۹۷}$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}(-i+E)t}}{2\sqrt{3}(-i+D)Z}\left(+2D^2Ee^{\frac{1}{2}Et}+2DZe^{\frac{1}{4}(-i+E)t}\right)$$

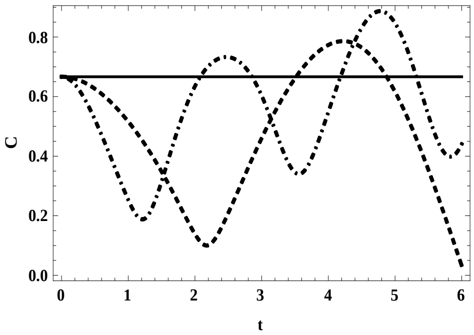
$$-\frac{ie^{-\frac{1}{4}(-i+E)t}}{2\sqrt{3}(-i+D)}\left(1+e^{\frac{1}{2}Et}\right)$$

که در آن $E=\sqrt{-9-8D^2}$ و $Z=9+8D^2$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۱. کانکرنس برحسب t در زنجیرهٔ XXX: اعمال میدان بر کیوبیت دوم به ازاء D=0، B=0 (خط توپر)، B=5 (خط چین)، B=10(خط چین-نقطه).

پس از ادامهٔ محاسبات مطابق روند قبلی، در شکل ۱۲ تحول زمانی کانکرنس به‌ازاء مقادیر متفاوت پارامتر D برای هامیلتونی زنجیرهٔ XXX نشان داده شده است. چنان‌که می‌بینیم، در غیاب برهم‌کنش DM مقدار کانکرنس ثابت است و در طول زمان تغییر نمی‌کند. اما در حضور این برهم‌کنش، کانکرنس رفتار نوسانی نامنظمی دارد و افزایش اندازهٔ پارامتر D، کاهش میانگین درهم‌تنیدگی را موجب می‌شود.



شکل ۱۲. کانکرنس بر حسب t در زنجیرهٔ XXX به ازاء B=0، D=0 (خط توپر)، D=1 (خط چین)، D=2 (خط چین-نقطه).

نتایج

در این مقاله تحول زمانی درهم‌تنیدگی حالت W را در چهار هامیلتونی هایزنبرگی سه کیوبیتی مدل XX، Ising، XXZ و XXX در حضور و غیاب میدان مغناطیسی و برهم‌کنش DM مورد بررسی و مقایسه قرار دادیم. نتایج حاصل را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

(۱) هامیلتونی‌های خالص (در غیاب برهم‌کنش DM و میدان مغناطیسی) XXX و آیزینگ بر درهم‌تنیدگی حالت W بی‌تأثیرند، اما هامیلتونی‌های خالص XX و XXZ موجب نوسانات درهم‌تنیدگی می‌شوند. در اولی به‌طور میانگین کاهش درهم‌تنیدگی و در دومی افزایش میانگین آن‌را در مقایسه با حالت آغازین مشاهده می‌کنیم.

(۲) در هر چهار هامیلتونی، اعمال میدان مغناطیسی بر کل سیستم بر دینامیک درهم‌تنیدگی بی‌تأثیر است. ظاهراً تأثیر میدان بر همهٔ اسپین‌ها به‌دلیل وجود تقارن، هم‌بستگی آن‌ها را تغییر نمی‌دهد.

(۳) اعمال میدان بر کیوبیت اول و سوم به دلیل تقارن در هر چهار هامیلتونی تأثیر یکسان دارد. در هامیلتونی

آیزینگ، اعمال میدان بر اسپین اول تأثیری بر درهم‌تنیدگی ندارد، اما در سه هامیلتونی دیگر، اگرچه موجب تشدید نوسان‌ها می‌شود، ولی درهم‌تنیدگی را به‌طور میانگین افزایش می‌دهد.

(٤) اعمال میدان بر کیوبیت دوم در هامیلتونی آیزینگ بی‌تأثیر است، اما در هامیلتونی XX موجب افزایش میانگین درهم‌تنیدگی در مقایسه با هامیلتونی خالص و در هامیلتونی‌های XXX وXXZ موجب کاهش میانگین آن می‌شود.

(٥) تأثیر برهم‌کنش DM بر هامیلتونی‌های XX، XXX وXXZ موجب تشدید نوسان‌ها و کاهش میانگین درهم‌تنیدگی در مقایسه با هامیلتونی خالص می‌شود، اما در مدل آیزینگ میانگین آن‌را افزایش می‌دهد.

منابع

[1] Z. Hong-Fang, S. Bin, L. Jion, Entanglement sudden death induced by the Dzialoshinskii–Moriya interaction, *Chinese Physics B* 18 (2009) 3265-3270.

[2] S. Chuan-Jia, C. Wei-Wen, L. Ji-Bing, Sudden death, birth and stable entanglement in a two-qubit Heisenberg XY spin chain, *Chinese Physics Letters* 25 (2008) 3115-3118.

[3] A. Sabour, M. Jafarpour, A probability measure for entanglement of pure two-qubit system and a useful interpretation for concurrence, *Chinese Physics Letters* 28 (2011) 1-4.

[4] Guo-Feng. Zhang, Shu-Shen. Li, Thermal entanglement in a two-qubit Heisenberg XXZ spin chain under an inhomogeneous magnetic field, *Physical Reviwe A* 72 (2005) 1-4.

[5] M. Jafarpour, M.R. Pourkarimi, A. Akhound, Entanglement sudden death and its suppression in multi-qubit channels. Using a magnetic field, *Il NUOVO Cimento B* 124 (2009) 269-279.

[6] M. Jafarpour, M. Ashrafpour, Entanglement dynamics of a two-qutrit system under DM interaction and the relevance of the initial state, *Quantum Information Processing* 12 (2013) 761-772.

[۷] س. حسابی، م. جعفرپور، بررسی و مقایسهٔ دینامیک درهم‌تنیدگی حالت همدوس دو کیوبیتی تحت چهار هامیلتونی مختلف، کنفرانس فیزیک ایران، بیرجند، (۱۳۹۲) ۱–۵.

[۸] س. حسابی، م. جعفرپور، بررسی و مقایسهٔ دینامیک درهم‌تنیدگی حالت‌های بل تحت چهار هامیلتونی مختلف، اولین همایش ملی تئوری اطلاعات و ارتباطات کوآنتومی، اهواز، (۱۳۹۲) ۱–۵.

[9] Z.N. Gurkan, Entanglement and topological soliton structures in Hisenberg spin models, *Dissertation*, (2010) 1-163.

[10] W. Dür, G. Vidal, J.I. Cirac", Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, *Physical Reviwe A* 62 (2000) 1-12.

[11] P. Agrawal, A. Pati, Perfect teleportation and superdense coding with W states, *Physical Reviwe A* 74 (2006) 1-9.

[12] A. Cabello, Bell's theorem with and without inequalities for the three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger and W states, *Physical Reviwe A* 65 (2002) 1-5.

[13] T. Yamamoto, K. Tamaki, M. Koashi, N. Imoto, Polarization entangled W state using parametric down-conversion, *arXiv quant-ph*/0208162 (2002) 1-4.