

مطالعه ایزوتوپ‌های تغییر شکل یافته Er با استفاده از تقارن دینامیکی جزئی SU(3)

ناصر فولادی^{۱*}، محمدعلی جعفریزاده^۲، جواد فولادی^۱، هادی صبری^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

^۲ پژوهشکده علوم پایه، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

در این مقاله، طیف انرژی و احتمال‌های گذارهای چهار قطبی الکتریکی ایزوتوپ‌های زوج-زوج هسته Er ، با استفاده از مفاهیم تقارن دینامیکی جزئی در چارچوب مدل اندرکنش بوزونی مطالعه شده است. مزیت اندرکنش‌هایی با تقارن دینامیکی جزئی، به‌کارگیری یک روند کنترل شده بدون آسیب زدن به نتایج قبلی به‌دست‌آمده توسط تقارن دینامیکی برای بخشی از طیف انرژی می‌باشد. تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ ، با از بین بردن تبهگنی‌های ناخواسته موجود در طیف انرژی هسته‌هایی که ساختار تغییر شکل یافته دورانی از خود نشان می‌دهند، توصیف دقیق‌تری از این هسته‌ها را نمایش می‌دهد. همچنین نتایج حاصل افزایش دقت پیش‌بینی‌های این مدل با افزایش تعداد نوترون‌ها و همچنین میزان تغییر شکل چهار قطبی را پیشنهاد می‌دهد.

کلیدواژگان: تقارن دینامیکی، تقارن دینامیکی جزئی، مدل اندرکنش بوزونی، تغییر شکل چهار قطبی

مقدمه

مدل‌های مبتنی بر رهیافت جبری، تقارن‌های دینامیکی، چارچوب مناسبی را برای بررسی تقارن‌های مهم در سیستم‌های بس‌ذره‌ای فراهم می‌آورند. از مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای تقارن‌های دینامیکی طی سه دهه اخیر می‌توان به مدل اندرکنش بوزونی^۱ در فیزیک هسته‌ای [۱] مدل‌های جبری در فیزیک مولکولی [۲]، فیزیک هادرونی [۳]، فیزیک پلیمرها [۴]، و فیزیک نانو ساختارها [۵] از قبیل نقاط کوانتومی اشاره کرد.

تقارن‌های دینامیکی^۲ را می‌توان به‌منزله حالت‌های تکامل‌یافته و اصلاح‌شده مفاهیم تقارنی در نظر گرفت. اخیراً در مسائل بس‌ذره‌ای، تقارن‌های دینامیکی جزئی^۳

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های هسته‌های اتمی ظهور حرکت‌های جمعی و همبستگی‌های موجود در رفتار نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده آنها می‌باشد. به‌منظور مطالعه این ساختار پیچیده، علاوه بر رهیافت‌های متداول میکروسکوپی و ماکروسکوپی، می‌توان از رهیافت جبری که مبتنی بر مفاهیم تقارنی و نظریه گروه‌ها می‌باشد، بهره گرفت. رهیافت اخیر با رفع برخی از مشکلات موجود در روش‌های قبلی، تعدادی از ویژگی‌های سیستم‌های هسته‌ای را در مقایسه با سایر روش‌ها، به‌صورت دقیق‌تر و کامل‌تر توصیف می‌نماید.

* ایمیل نویسنده مسئول: fouladi@tabrizu.ac.ir

¹ Interacting Boson Model (IBM)

² Dynamical symmetry (DS)

³ Partial dynamical symmetry (PDS)

مدل اندرکنش بوزونی

به منظور بررسی مفاهیم تقارنی سیستم های بس ذره ای هسته ای، وجود چارچوبی که دارای ساختار جبری غنی باشد ضروری و مفید است. همچنین این چارچوب باید قابلیت توسعه و گسترش به سیستم های هسته ای با اندرکنش های بالاتر را نیز داشته باشد. این چنین چارچوبی توسط مدل اندرکنش بوزونی فراهم می شود که به طور گسترده برای توصیف حالت های با انرژی پایین هسته های زوج-زوج بکار گرفته می شود. در این مدل برانگیختگی دسته جمعی هسته ای بر حسب N تا بوزون تک قطبی، s و بوزون چهار قطبی، d بیان می شود. ساده ترین هامیلتونی که به صورت دو پارامتری تمامی حدود تقارنی مختلف این مدل را در بر می گیرد عبارت است از.

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{n}_d + \kappa Q^\dagger \cdot Q \quad ۱$$

در این رابطه، $n_d = d^\dagger d$ عملگر شمارش بوزونهای d می باشد که برای توصیف هسته های نوسانی استفاده می شود. جمله دوم نیز که از حاصل ضرب عملگرهای چهار قطبی، $Q^\dagger = (s^\dagger \vec{d} + d^\dagger s) + \chi (d^\dagger \cdot \vec{d})$ ، حاصل می شود برای توصیف هسته های تغییر شکل یافته مورد استفاده قرار می گیرد. این هامیلتونی به ازای $\kappa = 0$ بیانگر حد $U(5)$ ، به ازای $\varepsilon = 0$ و همچنین به ازای $\chi = -\sqrt{7}/2$ بیانگر حد دورانی $SU(3)$ و نهایتاً به ازای $\varepsilon = 0$ و $\chi = 0$ نشان دهنده حد $O(6)$ می باشد. تمامی این حدود تقارنی در شکل ۱ نمایش داده شده اند.

[۶-۱۱] به منظور توسعه و تکمیل بیشتر مفاهیم تقارن های کامل و تقارن های دینامیکی مطرح شده اند. یکی از جنبه های مهم تقارن های دینامیکی جزئی توانایی آن ها در فراهم نمودن یک ابزار کاربردی و عملی برای محاسبه مشاهده پذیرها در سیستم های واقعی می باشد. مهمترین هدف از ارائه این نظریه ها بر طرف ساختن مشکلات زیاد و طاقت فرسای حل مسائل بس ذره ای می باشد. مزیت اندرکنش هایی با تقارن دینامیکی جزئی، به کارگیری یک روند کنترل شده بدون آسیب زدن به نتایج قبلی به دست آمده توسط تقارن دینامیکی برای بخشی از طیف انرژی می باشد.

مفاهیم کلی و الگوریتم ساخت هامیلتونی های با تقارن دینامیکی جزئی در حدود تقارنی متفاوت مدل اندرکنش بوزونی در مراجع [۶-۱۱] بررسی شده است. از طرفی ارتباط بین پیش بینی های تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ با اسپکتروسکوپی هسته های ^{168}Er و ^{160}Dy در مراجع [۱۲،۷] ارائه گردیده است. از طرفی با توجه به توافق مناسب پیش بینی های این مدل با داده های تجربی، این هسته ها را می توان به عنوان نمونه های مناسبی برای نمایش تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ معرفی نمود. هدف اصلی این مطالعه بررسی قابلیت و توانایی این ساختار تقارنی میانی در تحلیل و بررسی سیستم های هسته ای تغییر شکل یافته می باشد. با توجه به اینکه حد تقارن دینامیکی $SU(3)$ مدل IBM برای بررسی هسته های دورانی تغییر شکل یافته کشیده^۱ مورد استفاده قرار می گیرد، لذا در این مطالعه ایزوتوپ های زوج-زوج $^{160-170}_{68}Er$ ، که به عنوان نمونه هایی از هسته های تغییر شکل یافته کشیده در منطقه خاک های نادر سنگین^۲ می باشند، در نظر گرفته شده است.

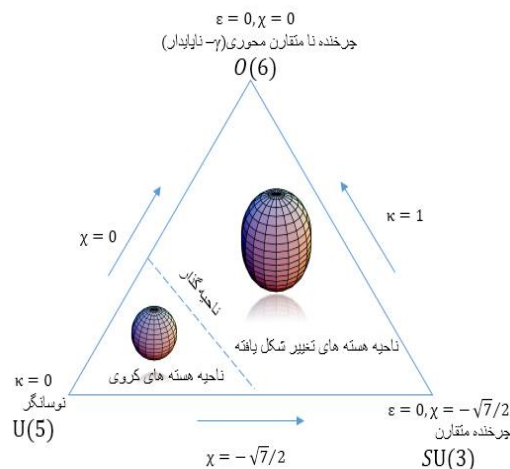
² Heavy rare-earth region(HREE)

¹ Deformed prolate nuclei

از زنجیره‌های دیگر به هامیلتونی $SU(3)$ از بین برد. در چارچوب مدل IBM با اندرکنش‌های حداکثر دو جسمی چنین شکست تقارنی توسط وارنر، کستن و دیویدسون^۳ پیشنهاد داده شده است [۱۵، ۱۴]. در این رهیافت، یک سری جملات از زنجیره‌های دیگر به هامیلتونی $SU(3)$ افزوده می‌شود، در نتیجه تقارن $SU(3)$ به‌طور کامل شکسته شده و تمامی ویژه‌حالت‌ها در هم مخلوط می‌شوند و هیچ‌یک از ویژگی‌های مفید تقارن‌های دینامیکی باقی نمی‌ماند. در مقایسه با این روش تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ مطرح می‌باشد که توسط لویاتان^۴ [۷] پیشنهاد داده شد. تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ متناظر با یک نوع به‌خصوصی از شکست تقارن $SU(3)$ می‌باشد که در آن ویژگی‌های مفید تقارنهای دینامیکی از قبیل حل‌پذیری و... برای بخشی از سیستم همچنان حفظ می‌گردد. هامیلتونی تقارن دینامیکی $SU(3)$ متشکل از یک ترکیب خطی از عملگرهای کازیمیر گروه‌های $SU(3)$ و $O(3)$ می‌باشد، در صورتی که هامیلتونی تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ با اندرکنش دو ذره‌ای در چارچوب مدل اندرکنش بوزونی به‌شکل زیر تعریف می‌شود [۱۱].

$$\hat{H}_{PDS} = \hat{H}(h_0, h_2) + cO(3) = \hat{H}_{DS} + (h_0 - h_2)P_0^\dagger P_0 \quad 2$$

در این رابطه $H(h_0, h_2) = h_0 P_0^\dagger P_0 + h_2 P_2^\dagger \cdot \tilde{P}_2$ هامیلتونی با تقارن جزئی برای اندرکنش‌های دو ذره‌ای می‌باشد. عملگرهای $P_0^\dagger = d^\dagger \cdot d^\dagger - 2(s^\dagger)^2$ و $P_{2\mu}^\dagger = 2d_\mu^\dagger s^\dagger + \sqrt{7}(d^\dagger d^\dagger)_\mu^{(2)}$ بوزونی به‌ترتیب با تکانه‌های زاویه‌ای $L=0, 2$ در مدل اندرکنش بوزونی و $C_{O(3)}$ نیز معرف عملگر کازیمیر گروه $O(3)$ هستند. برای $h_0 = h_2$ هامیلتونی $H(h_0, h_2)$ به‌عنوان اسکالر $SU(3)$ و به‌ازای $h_0 = -5h_2$ ، این هامیلتونی به‌صورت یک تانسور



شکل ۱. مثلث تقارنی مدل IBM (مثلث کستن).

هامیلتونی مدل IBM با تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$

تقارن دینامیکی $SU(3)$ یک ساختار جبری مناسب برای بررسی و توصیف هسته‌های تغییر شکل یافته محوری^۱ می‌باشد. مطالعات اولیه برای بررسی ساختار این دسته از هسته‌ها توسط ایلوت^۲ [۱۳]، در قالب مدل هندسی تجمعی صورت پذیرفته است. از طرف دیگر، هسته‌های تغییر شکل یافته محوری در چارچوب مدل اندرکنش بوزونی توسط یک چرخنده متقارن با نوارهای β و γ تبهگن توصیف می‌شوند. در نمایش تقلیل ناپذیر $SU(3)$ ، به‌ازای هر (λ, μ) داده شده، هر مقدار K معرف یک باند دورانی می‌باشد و حالت‌های با L یکسان در باندهای K مختلف تبهگن می‌باشند. پایین‌ترین نمایش تقلیل ناپذیر $SU(3)$ ، $(2N, 0)$ می‌باشد که باند پایه $g(K=0)$ هسته‌های تغییر شکل یافته کشیده را توصیف می‌کند. اولین حالت برانگیخته نمایش تقلیل ناپذیر $SU(3)$ ، $(2N-4, 2)$ است که شامل هر دو باند $\beta(K=0_2^+)$ و $\gamma(K=2_1^+)$ می‌باشد. این تبهگنی ناخواسته باندهای β و γ که ویژگی مشخصه حد $SU(3)$ در مدل IBM می‌باشد را می‌توان با افزودن جملات اضافی

³Warner, Casten, Davidson (WCD)

⁴Leviatan

¹Axially deformed nuclei

²Elliott

احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی $E2$ را می توان پرکاربردترین گذار از این دسته دانست که البته به عنوان محک مهمی برای امتحان کردن پیش بینی مدل تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ مورد استفاده قرار می گیرد. احتمال های گذارهای چهار قطبی الکتریکی $B(E2)$ و همچنین نسبت های گشتاورهای چندقطبی الکتریکی به عنوان مشاهده پذیرهای خوبی برای درک بهتر ساختار حالت ها مطرح بوده و اطلاعاتی مفید را از ساختار هسته ارائه می دهد.

عمومی ترین عملگر گذار $E2$ تک ذره ای که باید عملگر تانسوری هرمیتی از مرتبه دو باشد و تعداد کل بوزونها را نیز پایسته نگه دارد، به صورت زیر بیان می شود [۱۱].

$$T(E2) = \alpha Q^{(2)} + \theta \Pi^{(2)} \quad 5$$

در این رابطه $Q^{(2)} = (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d}) - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^\dagger \tilde{d})_\mu^{(2)}$ به عنوان مولد چهار قطبی $SU(3)$ و عملگر $\Pi^{(2)} = (d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d})$ نیز یک تانسور $(2, 2)$ تحت $SU(3)$ می باشد. رابطه مربوط به احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی کاهش یافته بین دو حالت $I_f \rightarrow I_i$ به صورت زیر حاصل می گردد:

$$B(E2; I_f \rightarrow I_i) = \frac{\left| \langle I_f \| T(E2) \| I_i \rangle \right|^2}{2I_i + 1} \quad 6$$

نتایج عددی

همیلتونی $HPDS$ با سه پارامتر مشخص می شود. مقادیر h_2, C به ترتیب از روی اختلاف انرژی های تجربی $[E(2_g^+) - E(0_g^+)]$ و $[E(2_\gamma^+) - E(2_g^+)]$ در فرآیند برازش حداقل مربعات^۳ تعیین می شوند. پارامتر h_0 نیز به منظور تولید کردن انرژی قله نوار β تغییر می کند. مقادیر کمیت های مورد نظر برای زنجیره ایزوتوپی $^{160-170}_{68}Er$ در جدول ۱ گزارش شده اند. معیار

$(\lambda, \mu) = (2, 2)$ از $SU(3)$ می باشد. علی رغم اینکه همیلتونی $H(h_0, h_2)$ اسکالر $SU(3)$ نیست ولی یک زیرمجموعه از حالت های قابل حل با تقارن خوب $SU(3)$ را دارا می باشد. از طرفی جمله دورانی $O(3)$ افزوده شده که باعث تبدیل شدن تقارن جزئی $SU(3)$ به تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ می گردد و سبب جداسدگی $L(L+1)$ ترازهای انرژی خواهد شد. البته این جمله هیچ گونه تأثیری روی توابع موج نداشته و باعث از بین رفتن تبهگنی ناخواسته $\beta - \gamma$ می شود. مطابق با دستورالعملی که در مرجع [۱۱] معرفی شده است، حالت های قابل حل همیلتونی که همچنان تقارن $SU(3)$ خود را حفظ می کنند، یعنی اعضای نوارهای $g(K=0)$ و $\gamma^k(K=2k)$ به صورت زیر بیان می شوند.

۳a

$$g(K=0) : |N, (2N, 0), K=0, L\rangle$$

$$\gamma^k(K=2k) : |N, (2N-4k, 2k), K=2k, L\rangle \quad 3b$$

با اثر دادن همیلتونی تقارن دینامیکی جزئی روی حالت های قابل حل بالا ویژه مقادیر انرژی مربوط به هر یک از حالت ها به صورت زیر نتیجه می شود.

۴a

$$\begin{aligned} \langle g | H_{PDS} | g \rangle = \\ \Rightarrow E_{PDS} = CL(L+1), L=0, 2, \dots, 2N \end{aligned}$$

۴b

$$\begin{aligned} \langle \gamma | H_{PDS} | \gamma \rangle = \\ \Rightarrow E_{PDS} = 6h_2 k(2N-2k+1) + CL(L+1) \\ L = K, K+1, \dots, (2N-2k) \end{aligned}$$

گذارهای الکترومغناطیسی

گذارهای الکترومغناطیسی^۱ بین ترازهای مختلف سیستم های هسته ای به عنوان یکی از مهم ترین ابزارها برای مطالعه و بررسی ساختار حالت ها مطرح می باشد.

³ Least Square fit (LSF)

¹ Electromagnetic transition

² Electric quadrupole transition (E2)

که E_i^{Exp} و E_i^{Theory} به ترتیب مقادیر انرژی تجربی و بهترین انرژی برازش داده شده برای i امین تراز انرژی برحسب MeV می‌باشند. همچنین N_L معرف تعداد کل ترازهای برازش شده است.

در شکل‌های ۳ تا ۵ میزان خطای به‌دست آمده از دو رهیافت تقارن دینامیکی و تقارن دینامیکی جزئی برای زنجیره ایزوتوبی بررسی شده برحسب تغییرات پارامترهای عدد جرمی، $R_{4/2}$ و تعداد نوترون‌های آن به‌صورت طرح‌وار نمایش داده شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده (جدول ۱) و شکل‌های (۳-۵) می‌توان نتیجه گرفت که خطای محاسباتی تقارن دینامیکی $SU(3)$ برای زنجیره هسته‌های $^{160-170}_{68}Er$ به‌صورت نامنظم رفتار می‌کند. به‌عبارت دیگر، تنها در هسته‌هایی که میزان تبهگنی نوارهای β و γ آن قابل ملاحظه است این خطا دارای مقدار کمینه خود می‌باشد و در بقیه موارد دارای خطاهای بزرگتری است. در صورتی که محاسبات مربوط به تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ روند منظمی را نشان می‌دهند، به‌عبارتی با افزایش عدد جرمی و نزدیک شدن به حد هسته‌های دورانی (افزایش $R_{4/2}$) به‌طور همزمان میزان خطای تقارن دینامیکی جزئی کاهش یافته و به‌صورت منظم رفتار می‌کند. همچنین کاهش خطای مدل $SU(3)-PDS$ را می‌توان به افزایش سهم جمله جفت‌شدگی در هامیلتونی و کاهش اثرات دافعه کولنی در سیستم نسبت داد. همچنین با افزایش مقدار $R_{4/2}$ ، مقدار تغییر شکل چهار قطبی در سیستم‌های مورد مطالعه افزایش یافته و البته میزان دقت پیش‌بینی‌های مدل تقارن دینامیکی جزئی نیز بیشتر می‌شود.

با استفاده از شکل تحلیلی عناصر ماتریسی عملگر گذار موجود در مقالات [۱۷، ۱۴] برای احتمال‌های گذار بین بانندی، پارامترهای α و θ به ترتیب با استفاده از مقادیر داده‌های تجربی $B(E2; 2^+_g \rightarrow 0^+_g)$ و

تبهگنی ترازهای موجود در باند β و γ به‌صورت اختلاف انرژی تجربی تراز 2^+_g با تراز 2^+_g تعریف می‌شود که اگر این اختلاف کوچکتر یا مساوی با $100keV$ باشد به‌منزله تبهگن بودن ترازهای انرژی در باند β و γ هسته موردنظر می‌باشد [۱۸].

$\delta = [E(2^+_g) - E(2^+_g)] \leq 100keV$ ۷

طیف انرژی حاصل از تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ ، طیف انرژی تجربی و همچنین طیف انرژی مربوط به تقارن دینامیکی $SU(3)$ برای هسته‌های بررسی شده در شکل ۱ نمایش داده شده است. همچنان که در مراجع [۷، ۱۱، ۱۵، ۱۶] به‌طور گسترده اشاره شده است، در طیف انرژی تجربی اکثر هسته‌های تغییر شکل یافته نوار $\beta(K=0)$ و $\gamma(K=2)$ تبهگن نمی‌باشند. به‌عبارت‌دیگر، انتظار می‌رود که طیف انرژی مربوط به تقارن دینامیکی $SU(3)$ که از مساوی قرار دادن پارامترهای h_0, h_2 در رابطه^۲ نتیجه می‌شود و نشان دهنده تبهگنی این باندها می‌باشد، انحراف قابل توجهی را نسبت به داده‌های تجربی از خود نشان می‌دهد. به‌استثنا هسته $^{170}_{68}Er$ که طیف انرژی تبهگنی دارد و منطبق بر پیش‌بینی‌های مدل $SU(3)-DS$ می‌باشد، در بقیه موارد انحراف مدل $SU(3)-DS$ از طیف انرژی تجربی به‌خوبی قابل مشاهده است. به‌منظور بررسی پیش‌بینی‌های مدل و نشان دادن میزان توافق مدل با مقادیر واقعی و همچنین مقایسه آن با مدل قبلی از معیارهای میزان خطای ریشه میانگین مربعات^۱ و همچنین میانگین درصد خطای نسبی^۲ برای هر یک از هسته‌ها استفاده شده است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N_L} \sum_i^{N_L} (E_i^{Exp} - E_i^{Theory})^2}$$
 ۸

$$RE = \frac{1}{N_L} \sum_i^{N_L} \frac{(E_i^{Exp} - E_i^{Theory})}{E_i^{Exp}}$$
 ۹

² Relative error (RE)

¹ Root-mean square error (RMSE)

$B(E2; 2^+_7 \rightarrow 0^+_8)$ از طریق فرآیند برازش حداقل

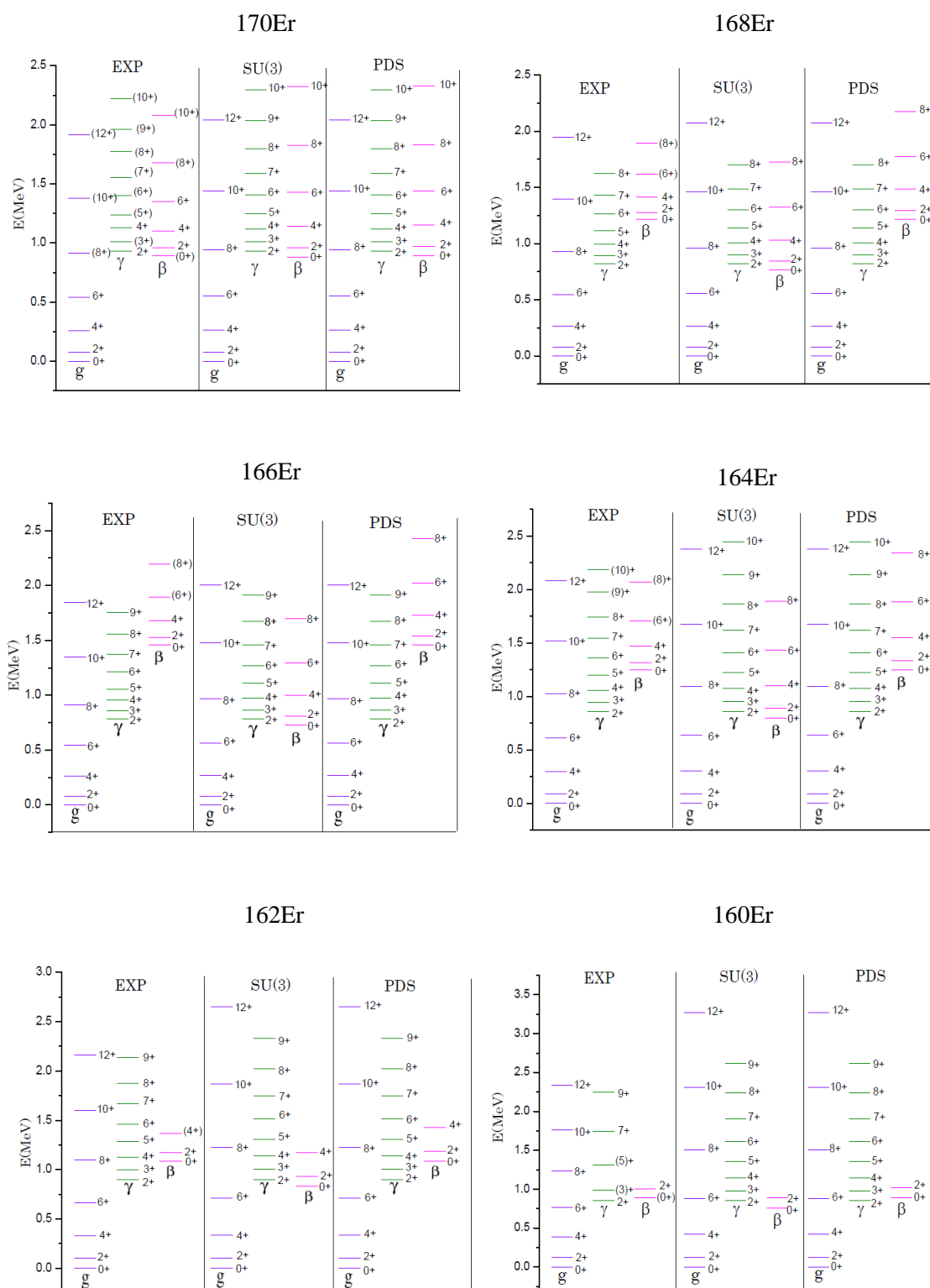
مربعات تعیین می شوند. به استثناء هسته $^{160}_{68}Er$ که به

دلیل کمبود داده تجربی قابل محاسبه نیست.

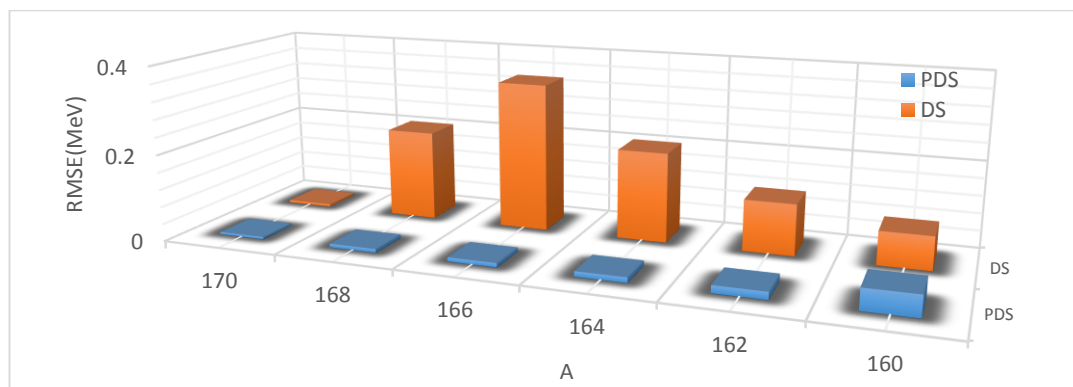
جدول ۱. مقادیر پارامترهای هامیلتونی تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ برحسب (keV) ، میزان خطا، معیار تبهگنی و برخی پارامترهای دیگر برای

زنجیره ایزوتوپی $^{160-170}_{68}Er$.

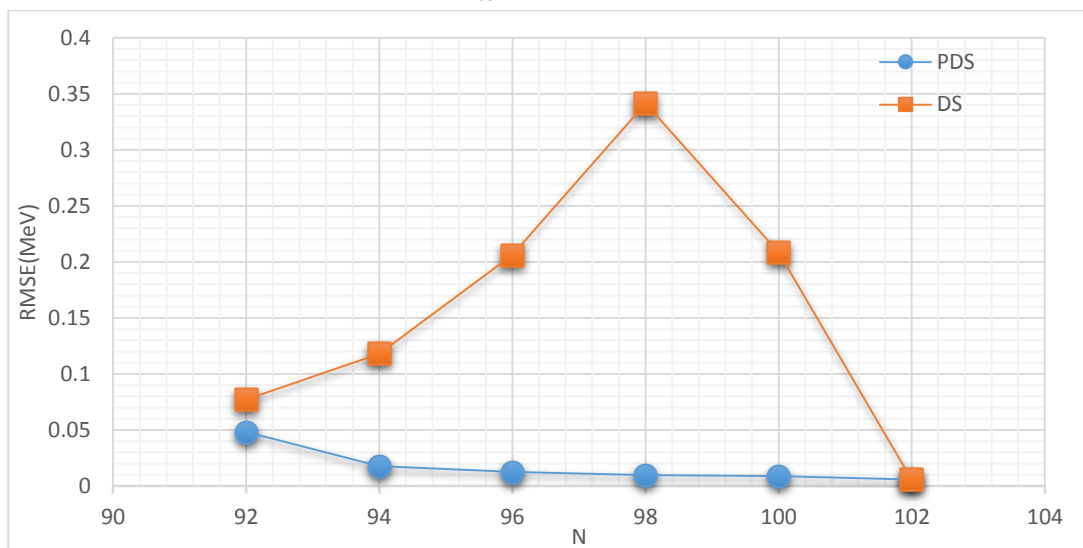
هسته	N_B	$R_{4/2}$	N_L	h_0 (keV)	h_2 (keV)	C (keV)	RMSE (MeV)		RE % درصد میانگین خطای نسبی		δ (keV)
							PDS	SU(3)	PDS	SU(3)	
$^{170}_{68}Er$	17	3.308	20	4.3905	4.3203	13.0998	0.00563	0.00564	0.368	0.365	26
$^{168}_{68}Er$	16	3.308	19	7.516	3.98583	13.3006	0.00891	0.20828	0.509	9.103	455
$^{166}_{68}Er$	15	3.288	20	10.1401	4.0536	13.4296	0.00983	0.34155	0.610	13.858	742
$^{164}_{68}Er$	14	3.276	18	8.75230	4.7461	15.23	0.01265	0.20644	0.756	9.1478	454
$^{162}_{68}Er$	13	3.234	16	7.79121	5.3245	17.0066	0.01770	0.11790	0.944	5.884	270
$^{160}_{68}Er$	12	3.100	14	6.6684	5.2797	20.9666	0.04834	0.07712	2.723	5.422	153



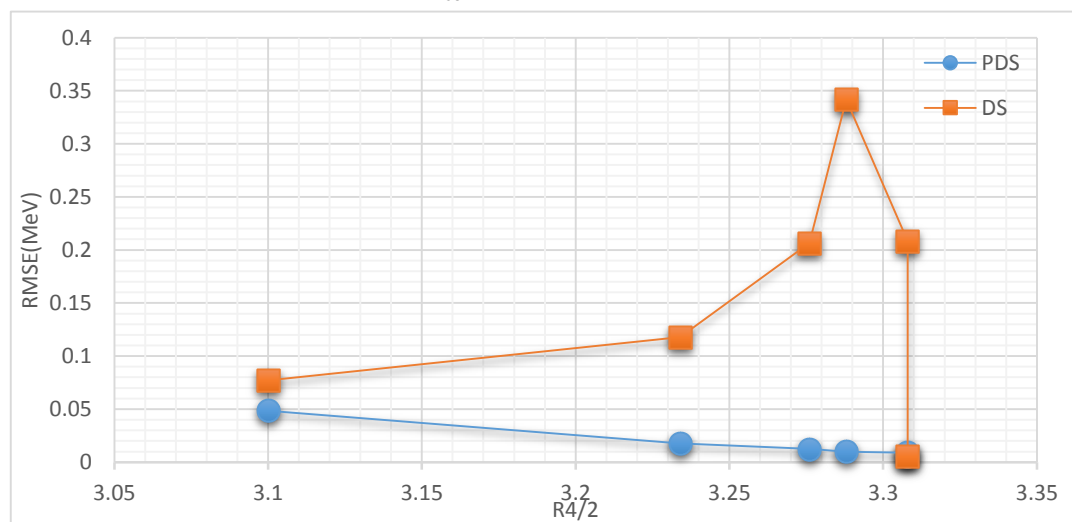
شکل ۲. طیف انرژی زنجیره ایزوتوپی هسته‌های $^{160-170}\text{Er}_{68}$: مقادیر انرژی تجربی با مقادیر انرژی محاسبه شده از مدل IBM ، یک‌بار با تقارن دینامیکی $SU(3)$ و بار دیگر با تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ مقایسه شده است.



شکل ۳. مقایسه خطای ریشه میانگین مربعات برای دو مدل تقارن دینامیکی DS و تقارن دینامیکی جزئی PDS برحسب عدد جرمی برای زنجیره ایزوتوپی ${}^{160-170}_{68}Er$.



شکل ۴. مقایسه خطای ریشه میانگین مربعات برای دو مدل تقارن دینامیکی DS و تقارن دینامیکی جزئی PDS برحسب عدد نوترونی برای زنجیره ایزوتوپی ${}^{160-170}_{68}Er$.



شکل ۵. مقایسه خطای ریشه میانگین مربعات برای دو مدل تقارن دینامیکی DS و تقارن دینامیکی جزئی PDS برحسب پارامتر $R_{4/2}$ برای زنجیره ایزوتوپی ${}^{160-170}_{68}Er$.

جدول ۳. مقادیر احتمالات گذارهای چهار قطبی الکتریکی $B(E2)$

برای هسته ^{168}Er برحسب واحد وایسکوف ($W.u$) با مقدار

پارامتر $\theta/\alpha=3.2185$ و میزان خطای ریشه میانگین مربعات

$$\Delta_{DS} = 3.4974 \text{ و } \Delta_{PDS} = 2.0942$$

نوع گذار	J_i^π	J_f^π	EXP	PDS	DS
$B(E2; g, L \rightarrow g, L')$	2_g^+	0_g^+	213	207	201
	4_g^+	2_g^+	319	315	307
	6_g^+	4_g^+	424	420	416
	8_g^+	6_g^+	354	351	347
	10_g^+	8_g^+	308	305	302
	12_g^+	10_g^+	345	341	337
$B(E2; \gamma, L \rightarrow g, L')$	2_γ^+	0_g^+	4.68	4.63	4.52
	2_γ^+	2_g^+	>8	7.88	7.61
	2_γ^+	4_g^+	0.61	0.58	0.53
	3_γ^+	2_g^+	7.4	7.36	7.30
	3_γ^+	4_g^+	4.6	4.56	4.21
	4_γ^+	2_g^+	1.7	1.68	1.77
	4_γ^+	4_g^+	8.6	8.55	8.49
	4_γ^+	6_g^+	1.13	1.11	1.17
	5_γ^+	4_g^+	7.2	7.15	7.39
	5_γ^+	6_g^+	8.9	8.83	9.05
	6_γ^+	4_g^+	0.87	0.85	0.80
	6_γ^+	6_g^+	7.7	7.66	7.75
	6_γ^+	8_g^+	2.9	2.84	3.02
	7_γ^+	6_g^+	12	11.82	11.53
	7_γ^+	8_g^+	17	16.68	15.42
	8_γ^+	6_g^+	1.3	1.25	1.19
	8_γ^+	8_g^+	7	6.65	6.33
	8_γ^+	10_g^+	120	114.2	117.45
$B(E2; \beta, L \rightarrow g, L')$	0_β^+	2_g^+	0.802	0.796	0.815
	2_β^+	0_g^+	0.37	0.33	0.35
	2_β^+	4_g^+	2.2	2.17	2.06
	4_β^+	2_g^+	<1	0.93	0.85
	4_β^+	6_g^+	<7.2	7.09	7.11
	6_β^+	4_g^+	<0.24	0.21	0.19
	6_β^+	8_g^+	<1.5	1.43	1.39

در جداول ۲ تا ۶ مقادیر $B(E2)$ محاسبه شده با استفاده از مدل تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ برای ترازهای موجود در داخل نوارهای g ، β و γ هسته‌های ^{162}Er ، ^{164}Er ، ^{166}Er ، ^{168}Er و ^{170}Er با مقادیر تجربی و مقادیر مربوط به محاسبات تقارن دینامیکی $SU(3)$ مقایسه شده است. نتایج به دست آمده توافق خوبی را با مقادیر تجربی [۱۹-۲۴] نسبت به محاسبات تقارن

دینامیکی $SU(3)$ از خود نشان می‌دهد.

جدول ۲. مقادیر احتمالات گذارهای چهار قطبی الکتریکی $B(E2)$

برای هسته ^{170}Er برحسب واحد وایسکوف ($W \cdot u$) با مقدار

پارامتر $\theta/\alpha=3.4263$ و میزان خطای ریشه میانگین مربعات

$$\Delta_{DS} = 16.4911 \text{ و } \Delta_{PDS} = 6.0391$$

نوع گذار	J_i^π	J_f^π	EXP	PDS	DS
$B(E2; g, L \rightarrow g, L')$	2_g^+	0_g^+	208	193	182
	8_g^+	6_g^+	370	378	402
	10_g^+	8_g^+	320	313	293
	12_g^+	10_g^+	375	370	358
$B(E2; \gamma, L \rightarrow g, L')$	2_γ^+	0_g^+	3.68	3.55	3.12
	2_γ^+	2_g^+	>6.1	7.4	7.2
	2_γ^+	4_g^+	0.29	0.23	0.18
$B(E2; \beta, L \rightarrow g, L')$	2_β^+	0_g^+	0.28	0.25	0.36
	2_β^+	2_g^+	0.05	0.08	0.12
	2_β^+	4_g^+	1.42	1.48	1.61

جدول ۵. مقادیر احتمالات گذارهای چهار قطبی الکتریکی $B(E2)$

برای هسته ^{164}Er برحسب واحد وایسکوف ($W.u$). پارامتر $\theta/\alpha = 3.4968$ و میزان خطای ریشه میانگین مربعات

$$\Delta_{DS} = 7.9374 \text{ و } \Delta_{PDS} = 4.4159$$

نوع گذار	J_i^π	J_f^π	EXP	PDS	DS
$B(E2; g, L \rightarrow g, L')$	2_g^+	0_g^+	218	214	210
	4_g^+	2_g^+	258	266	272
	8_g^+	6_g^+	343	337	331
	10_g^+	8_g^+	358	360	364
	12_g^+	10_g^+	265	259	257
$B(E2; \gamma, L \rightarrow g, L')$	2_γ^+	0_g^+	5.2	5.13	5.28
	2_γ^+	2_g^+	11.4	11.37	11.49
	2_γ^+	4_g^+	1.7	1.66	1.58

جدول ۶. مقادیر احتمالات گذارهای چهار قطبی الکتریکی $B(E2)$

برای هسته ^{162}Er برحسب واحد وایسکوف ($W.u$). پارامتر $\theta/\alpha = 5.6413$ و میزان خطای ریشه میانگین مربعات

$$\Delta_{DS} = 4.5001 \text{ و } \Delta_{PDS} = 3.2729$$

نوع گذار	J_i^π	J_f^π	EXP	PDS	DS
$B(E2; g, L \rightarrow g, L')$	2_g^+	0_g^+	191	183	180
$B(E2; \gamma, L \rightarrow g, L')$	2_γ^+	0_g^+	6.2	6.10	6.03
	2_γ^+	2_g^+	14.7	14.21	14.11
	2_γ^+	4_g^+	1.8	1.70	1.61
$B(E2; \beta, L \rightarrow g, L')$	2_β^+	0_g^+	1.6	1.51	1.38
	2_β^+	4_g^+	4.8	4.88	5.02

بحث و نتیجه گیری

نظریه تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ برخی از محدودیت‌های ناخواسته موجود در حد دورانی مدل IBM را از بین می‌برد. این نظریه درعین حال برخی از جنبه‌های سودمند مفید تقارن دینامیکی $SU(3)$ را به‌منظور بهبود کیفی توصیف خصوصیات هسته‌های

جدول ۴. مقادیر احتمالات گذارهای چهار قطبی الکتریکی $B(E2)$

برای هسته ^{166}Er برحسب واحد وایسکوف ($W.u$). با مقدار پارامتر $\theta/\alpha = 3.8536$ و میزان خطای ریشه میانگین مربعات

$$\Delta_{DS} = 6.6078 \text{ و } \Delta_{PDS} = 3.7455$$

نوع گذار	J_i^π	J_f^π	EXP	PDS	DS
$B(E2; g, L \rightarrow g, L')$	2_g^+	0_g^+	217	223	236
	4_g^+	2_g^+	312	319	325
	6_g^+	4_g^+	370	377	381
	8_g^+	6_g^+	373	370	366
	10_g^+	8_g^+	390	382	371
	12_g^+	10_g^+	372	359	362
$B(E2; \gamma, L \rightarrow g, L')$	2_γ^+	0_g^+	5.17	5.09	5.02
	2_γ^+	2_g^+	9.6	9.1	10.42
	2_γ^+	4_g^+	0.78	0.74	0.85
	3_γ^+	4_g^+	4.8	4.72	4.66
	4_γ^+	2_g^+	1.98	1.95	1.84
	4_γ^+	4_g^+	11.1	10.83	10.52
	4_γ^+	6_g^+	2.01	1.94	1.83
	5_γ^+	4_g^+	8.9	8.71	8.73
	5_γ^+	6_g^+	12.4	12.12	11.83
	6_γ^+	4_g^+	0.88	0.83	0.95
	6_γ^+	6_g^+	9.9	9.79	10.42
	6_γ^+	8_g^+	1.9	1.66	1.32
	7_γ^+	6_g^+	3.4	3.59	3.69
	7_γ^+	8_g^+	8.0	7.87	7.89
	8_γ^+	6_g^+	0.52	0.56	0.46
	8_γ^+	8_g^+	8.5	8.43	8.35
	8_γ^+	10_g^+	1.5	1.43	1.41
	10_γ^+	8_g^+	1.5	1.44	1.40
$B(E2; \beta, L \rightarrow g, L')$	0_β^+	2_g^+	2.7	2.61	2.55
	2_β^+	0_g^+	0.66	0.64	0.60
	2_β^+	4_g^+	39	37.52	35.04

به‌طور منظم کاهش می‌یابد. در صورتی‌که در مدل $SU(3)-DS$ این شرایط برقرار نبوده و با روند نامنظمی روبه‌رو هستیم.

با افزایش تعداد نوترون‌های ظرفیت در زنجیره بررسی شده خطای مدل $SU(3)-PDS$ به‌طور منظم کاهش می‌یابد، به عبارتی هرچه تعداد نوکلئون‌های ظرفیت نسبت به پوسته بسته بیشتر باشد توصیف آن در چارچوب این مدل بهتر صورت می‌گیرد.

احتمال‌های گذار $B(E2)$ محاسبه شده برای هسته‌های موردنظر با استفاده از مدل $SU(3)-PDS$ ، در تمامی موارد دارای پیش‌بینی دقیق‌تری نسبت به مدل $SU(3)-DS$ می‌باشند.

افزایش نوترون‌های ظرفیت نسبت به پوسته بسته نوترونی در $N=82$ برای زنجیره ایزوتوپی بررسی شده منجر به افزایش تغییر شکل می‌شود. با نزدیک شدن به گاف تغییر شکل یافته زیرلایه‌ای $N=108$ [۲۶، ۲۵] که متناظر با بیشترین تغییر شکل بین پوسته‌های بسته $N=82$ و $N=126$ می‌باشد، حداکثر میزان تغییر شکل مشاهده می‌شود. کمترین و بیشترین تغییر شکل به ترتیب در هسته‌های ^{160}Er و ^{170}Er بوده که به ترتیب متناظر با بیشترین و کمترین خطا در پیش‌بینی‌های مدل $SU(3)-PDS$ هستند. افزایش دقت پیش‌بینی‌های این مدل با افزایش میزان تغییر شکل هسته‌های مورد مطالعه و همچنین افزایش تعداد نوترون در این هسته‌ها را می‌توان از منظر افزایش سهم گذارهای $E1$ در نتیجه اثر تشدیدهای کوتاه^۲ بررسی نمود [۲۷]. این دو پدیده، افزایش تغییر شکل و افزایش تعداد نوترون، متناظر با

تغییر شکل یافته دورانی حفظ می‌کند. در مجموع نتایج زیر از مطالعه زنجیره ایزوتوپی بررسی شده توسط دو رهیافت قابل برداشت می‌باشند.

پیش‌بینی‌های مدل IBM با تقارن دینامیکی جزئی برای ترازهای انرژی در هسته‌هایی که دارای تبهگنی نوار $\beta-\gamma$ می‌باشند، منطبق بر پیش‌بینی‌های تقارن دینامیکی است. به‌عنوان مثال در $^{170}_{68}Er$ که هسته‌ای تبهگن است، خطای هر دو رهیافت یکسان می‌باشد.

مدل $SU(3)-PDS$ ترازهای انرژی هسته‌های غیر تبهگن را با تقریب بسیار خوبی منطبق بر داده‌های تجربی پیش‌بینی می‌نماید. در صورتی‌که در این دسته از هسته‌ها، نتایج مدل $SU(3)-DS$ اختلاف قابل ملاحظه‌ای با داده‌های تجربی دارد.

در هسته‌هایی که اختلاف انرژی نوارهای β و γ افزایش می‌یابد، مدل تقارن دینامیکی $SU(3)$ ضعیف‌ترین پیش‌بینی‌ها را دارد. در مقابل مدل تقارن دینامیکی جزئی کمترین خطاها را برای این نوع از هسته‌ها پیشنهاد می‌نماید. به‌عنوان مثال در هسته‌های ^{164}Er ، ^{166}Er و ^{168}Er که دارای بیشترین مقادیر δ هستند، مدل $SU(3)-DS$ دارای خطای نزدیک ۱۰ درصد و بالاتر می‌باشند در صورتی‌که خطای مدل $SU(3)-PDS$ در هر سه مورد کمتر از یک درصد است.

با افزایش $R_{4/2}$ در این زنجیره ایزوتوپی و نزدیک شدن به حد دورانی، $R_{4/2} \sim 3.33$ ، متناسب با افزایش میزان تغییر شکل چهار قطبی در هسته‌های انتخابی، مدل $SU(3)-PDS$ نتایج بسیار نزدیک به مقادیر تجربی متناظر حاصل نموده، همچنین خطا

² Pygmy dipole (E1) transition strength

¹ Deformed subshell gap

[6] Y. Alhassid, A. Leviatan, Partial dynamical symmetry, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 25 (1992) L1265.

[7] A. Leviatan, Partial Dynamical Symmetry in Deformed Nuclei, *Physical Review Letters* 77 (1996) 818.

[8] A. Leviatan, I. Sinai, Partial dynamical $SU(3)$ symmetry in deformed nuclei, *Physical Review C* 60 061301, *Journal of Physics G* 25 (1999) 791.

[9] A. Leviatan, P.V. Isacker, Generalized Partial Dynamical Symmetry in Nuclei, *Physical Review Letters* 89 (2002) 222501.

[10] J.E. Garcia-Ramos, A. Leviatan, P.V. Isacker, Partial Dynamical Symmetry in Quantum Hamiltonians with Higher-Order Terms, *Physical Review Letters* 102 (2009) 112502.

[11] A. Leviatan, Partial dynamical symmetries, *Progress in Particle and Nuclear Physics* 66 (2011) 93–143.

[12] N. Fouladi, M.A. Jafarizadeh, J. Fouladi, H. Sabri, Description of $160Dy$ nucleus by partial dynamical $SU(3)$ symmetry, *Central European Journal of Physics* 11 (2013) 4 526-530.

[13] J.P. Elliott, Classification Schemes for States of Mixed Collective Motion in the Nuclear Shell Model. I, *Proceedings of the Royal Society A* 245 (1958) 128.

[14] A. Arima, F. Iachello, Interacting Boson Model of Collective Nuclear States II. The Rotational Limit, *Annals of Physics* 111 (1978) 201.

[15] R.F. Casten, D.D. Warner, Predictions of the interacting boson approximation in a consistent Q framework, *Physical Review C* 28 (1983) 1798.

[16] D.D. Warner, R.F. Casten, W.F. Davidson, Interacting boson approximation description of the collective states of $168Er$ and a comparison with geometrical models, *Physical Review C* 24 (1981) 1713.

[17] P. Van Isacker, Boson number dependence of $E2$ transition rates in the rotational limit of the interacting boson model, *Physical Review C* 27 (1983) 2447.

افزایش سهم اثر تشدیدهای کوتاه در سیستم‌های هسته‌ای معرفی می‌شوند که این خود متناظر با فاصله بیشتر بین نوارهای انرژی سیستم‌های هسته‌ای در محدوده خاکهای نادر می‌باشد. با افزایش تعداد نوترونها، سهم نیروی جفت‌شدگی در مقایسه با نیروی دافعه کولنی بیشتر شده و این خود سبب شکافتگی بیشتر در بین نوارهای انرژی هسته‌های تغییر شکل یافته می‌شود. از طرفی، با توجه به افزایش دقت پیش‌بینی $SU(3)-PDS$ با افزایش فاصله بین نوارهای انرژی، انتظار افزایش دقت پیش‌بینی‌های تقارن دینامیکی جزئی برای هسته‌های دارای نوترون اضافی به‌خصوص برای نوارهای انرژی $\beta\beta$ و $\beta\gamma$ ممکن به‌نظر می‌رسد که با توسعه مفاهیم تقارن‌های دینامیکی برای بررسی نوارهای برانگیخته بالاتر قابل بررسی خواهد بود.

توافق قابل قبول بین پیش‌بینی‌های این رهیافت با نتایج تجربی توانایی این مدل برای بررسی ساختار سایر هسته‌ها تغییر شکل یافته در این محدوده جرمی را پیشنهاد می‌دهد.

مراجع

[1] F. Iachello, A. Arima, The Interacting Boson Model, Cambridge University Press, (1987).

[2] F. Iachello, R.D. Levine, Algebraic Theory of Molecules, Oxford University Press, (1995).

[3] R. Bijker, F. Iachello, A. Leviatan, Algebraic Models of Hadron Structure. I. Nonstrange Baryons, *Annals of Physics* 69 (1994) 236.

[4] F. Iachello, P. Truini, Algebraic Model of Anharmonic Polymer Chains, *Annals of Physics* s276 (1999) 120.

[5] K. Kikoin, M. Kiselev, V. Avishai. Dynamical Symmetries for Nanostructures, Springer-verlage, (2012).

- [18] A.Y. AbulMagd, A. AL. Sayed, S.A. Mazen, M. Abdel. Mageed, Identification of nuclei exhibiting the $SU(3)$ dynamical symmetry, *Nuclear Physics A* 839 (2010) 1.
- [19] C.W. Reich, Nuclear Data Sheets for A=160, *Nuclear Data Sheets* 105 (2005) 557.
- [20] C.W. Reich, Nuclear Data Sheets for A = 162, *Nuclear Data Sheets* 108 (2007) 1807.
- [21] B. Singh, Nuclear Data Sheets for A = 164, *Nuclear Data Sheets* 93 (2001) 243.
- [22] C.M. Baglin, Nuclear Data Sheets for A=166, *Nuclear Data Sheets* 109 (2008) 1103.
- [23] C.M. Baglin, Nuclear Data Sheets for A=168, *Nuclear Data Sheets* 111 (2010) 1807.
- [24] C.M. Baglin, Nuclear Data Sheets for A=170, *Nuclear Data Sheets* 96 (2002) 611.
- [25] R.F. Casten, NpNn Systematics in heavy nuclei, *Nuclear Physics A* 443 (1985) 1.
- [26] R.F. Casten, Possible Unified Interpretation of Heavy Nuclei, *Physical Review Letters* 54 (1985) 1991.
- [27] R. Massarczyk, Nuclear Deformation and Neutron Excess as Competing Effects for Dipole Strength in the Pygmy Region, *Physical Review Letters* 112 (2014) 072501.