بررسی عددی عامل M^2 پرتوهای پیرامحوری اینس-گاوس

مجتبی ثروت‌خواه [۱،*]، راحله پورمند [۲]، حمید نادگران [۳]

[۱] گروه فیزیک، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

[۲] گروه فیزیک، مرکز آموزش عالی استهبان، استهبان، فارس، ایران

[۳] بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده

پرتوهای اینس-گاوس از جمله پرتوهای هلمهولتز-گاوس هستند که مجموعهٔ کامل و متعامدی از جواب‌های معادله موج پیرامحوری در مختصات بیضوی را تشکیل می‌دهند. در این مقاله با محاسبهٔ عددی ممان مرتبهٔ دوم پرتو، به بررسی عامل M^2 این پرتوها پرداخته شده است. سپس به‌وسیلهٔ برازش داده‌های عددی، یک مدل محاسباتی برای رفتار عامل M^2 برحسب عدد مد ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که رابطهٔ عامل M^2 پرتو به‌صورت تابع خطی و صعودی از مرتبهٔ مد می‌باشد، در حالی‌که این عامل مستقل از عدد مد است. این محاسبات طراحان سیسستم‌های لیزر را در دست‌یابی سریع به عامل M^2 این پرتوها یاری کرده و از انجام محاسبات پیچیده بی‌نیاز می‌گرداند.

کلیدواژگان: معادله موج پیرامحوری، پرتوهای هلمهولتز-گاوس، پرتوهای اینس-گاوس، عامل M^2

مقدمه

پرتوهای اینس-گاوس زیرمجموعهٔ پرتوهای هلمهولتز-گاوس می‌باشند که از حل معادله موج پیرامحوری در مختصات بیضوی به‌دست آمده و اولین بار در سال ۲۰۰٤ معرفی شدند [۱]. این پرتوها ویژه مدهای طبیعی مشددهای پایدار بوده و مشخصه‌های ساختاری آنها تحت انتشار بدون تغییر باقی می‌ماند. با توجه به تابعیت سطح مقطع عرضی این پرتوها، کاربردشان در صنعت اپتیک گسترش یافته است. به‌عنوان مثال می‌توان به کاربرد این پرتوها در سازمان‌دهی و هدایت ذرات میکرومتری و به دام اندازی ذرات اشاره کرد [۲].

با توجه به توسعهٔ زمینه‌های کاربردی این پرتوها، ارائه روش‌های مناسب تولید آنها از اهمیت زیادی برخوردار است. در این راستا تولید پرتوهای اینس-گاوس توسط شکستن تقارن مشدد در لیزر Nd:YVO4 [۳] و نیز کنترل بهرهٔ مد در آنها گزارش شده است [٤]. همچنین مشخصه‌های انتشار این پرتوها در مواد مختلف اپتیکی بررسی شده است [۹-۵]. برای تولید مدهای مرتبه‌ای بالاتر از روش‌های متفاوتی استفاده می‌شود. از جمله کج کردن یکی از آینه‌های لیزر به مقدار خیلی کوچک، استفاده از فیلترهای فازی (kinoform phase plates)، استفاده از فیلترهای فضایی (spatial light modulator) و یا با استفاد از میکروآینه‌های دیجیتالی (Digital micrometer). اخیراً با استفاده از فیلترهای فضایی پرتوهای هرمیت-گاوس و لاگر-گاوس با مرتبهٔ بالا [۱۰] و با استفاده از فیلترهای فازی پرتوهای هرمیت-گاوس و اینس-گاوس با مرتبه‌های بالا نیز تولید شده‌اند [۱۱]. همچنین، تولید مرتبه‌های مختلف

*نویسنده مسئول: servatkhah@miau.ac.ir

مدهای اینس-گاوس به‌وسیلهٔ میکروآینه‌های دیجیتالی و انتشار آنها در محیط‌های متلاطم بررسی شده است [۱۲،۱۳]. از مدهای لیزری مراتب بالا برای استفاده در تداخل سنجی با دقت بالا مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۴]. بنابراین ارائه یک استاندارد مناسب برای توصیف کیفیت و نحوه انتشار این مدها اهمیت بسیار دارد.

عامل M^2 به‌عنوان یکی از مهم‌ترین کمیت‌های توصیف کنندهٔ پرتو معرفی می‌شود. این کمیت بدون بعد، توصیف کنندهٔ ارتباط بین توزیع شدت در صفحه کمر پرتو و صفحهٔ میدان دور می‌باشد. در حقیقت، این کمیت معیاری از واگرایی زاویه‌ای پرتو بوده و امروزه به‌عنوان یک شناسهٔ تجاری برای بیان کیفیت پرتوهای نوری در سیستم‌های لیزری از آن استفاده می‌شود [۱۵]. عامل M^2 در بررسی میزان پیرامحوری بودن پرتو نیز نقش کلیدی را ایفا می‌کند، زیرا می‌توان نشان داد در تخمین پیرامحوری نیز اندازهٔ لکهٔ پرتو از قانون مشابه انتشار پرتو گاوسی تبعیت می‌کند [۱۶]. بنابراین عامل M^2 نه تنها با مشخصه‌های انتشار پرتو مرتبط است، بلکه تحلیل رفتار پویای این عامل توصیف کنندهٔ مشخصات فیزیکی محیط نیز می‌باشد [۱۷،۱۸]. غالباً طراحان سیستم‌های لیزری به‌منظور کنترل کیفیت پرتو تولید شده و مقایسه آن با یک پرتو استاندارد، نیازمند دانستن این عامل می‌باشند.

عامل M^2 برای اغلب نمایه‌های[۱] پرتوهای رایج در صنعت اپتیک محاسبه شده و روش‌های محاسباتی عددی و تحلیلی برای ارائه رفتار این کمیت برحسب مشخصه‌های پرتو ارائه شده است [۲۲-۱۹]. از بین پرتوهای هلمهولتز-گاوس نیز عامل M^2 پرتوهای بسل-گاوس و ماتیو-گاوس محاسبه شده است [۱۵،۲۳].

در این مقاله با استفاده از روش محاسبهٔ ممان مرتبهٔ دوم پرتو به بررسی عامل M^2 پرتوهای اینس-گوسی پرداخته شده و مدلی محاسباتی برای تخمین این کمیت ارائه گردیده است. بنابراین پس از توصیف نمایه پرتوهای اینس-گوس، به محاسبه عامل M^2 این پرتوها پرداخته می‌شود. پس از آن داده‌ها با تابع مناسب برازش می‌شود تا مدل محاسباتی برای رفتار این عامل ارائه شود. این محاسبات به تحلیل کیفیت انتشار مدهای اینس-گاوس کمک کرده و طراحان سیستم‌های اپتیکی را از انجام محاسبات زمانبر بی‌نیاز می‌گرداند.

پرتوهای اینس-گاوس

برای تحلیل پرتوهای اینس-گاوس از معادله موج پیرامحوری که به‌صورت [۱]:

$$\nabla_t^2\psi + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \qquad (۱)$$

است، استفاده می‌کنیم، k در معادله بالا عدد موج بوده و لاپلاسی عرضی:

$$\nabla_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

می‌باشد. به‌طور کل جواب‌های معادله۱ را می‌توان به‌صورت [۱]:

$$U(r,z) = \psi(r,z)\exp(ikz) \qquad (۲)$$

در نظر گرفت. در دستگاه مختصات بیضوی ψ به‌صورت تابع مختلط [۱]:

$$\begin{aligned}\psi(\xi,\eta,z) = {} & E(\xi)N(\eta)\exp(\left[iZ(z)\right]\\ & \times[\frac{\omega_0}{\omega(z)}\exp\left[-i\psi_{GS}(z)\right]\\ & \times\exp\left(\frac{ikr^2}{2R(z)}\right)\exp\left(\frac{-r^2}{\omega(z)^2}\right)])\end{aligned} \qquad (۳)$$

---
[۱] profile

است که در این رابطه $\omega(z) = \omega_0[1 + (z/z_R)^2]^{1/2}$ اندازهٔ لکه در نقطه z و $z_R = k\omega_0{}^2/2$ برد ریلی و ω_0 کمر پرتو در $z = 0$ و $R(z) = z[1 + (z_R/z)^2]$ شعاع انحناء جبهه موج است. همچنین، $\xi \in [0,\infty)$ و $\eta \in [0,2\pi)$ توصیف کنندهٔ مختصات عرضی در دستگاه بیضوی بوده و به‌ترتیب بیان کننده تغییرات شعاع و زاویه در یک بیضی می‌باشد. همچنین، رابطه این دستگاه مختصات با مختصات دکارتی به‌صورت زیر است [۱]:

$$\begin{aligned} x &= f(z)\ \cosh\xi\ \ \cos\ \eta \\ y &= f(z)\ \sinh\xi\ \sin\ \eta \end{aligned} \qquad ٤$$

در معادله بالا $f(z) = f_0\omega(z)/\omega_0$ فاصله جدایی دو کانون بیضی از هم است و f_0 فاصله جدایی دو کانون بیضی از هم در صفحه کمر پرتو z=0 است. با توجه به تابع جواب مفروض، جداسازی متغیرها در معادله موج پیرامحوری معادلات زیر را برای توابع E و N نتیجه می‌دهد:

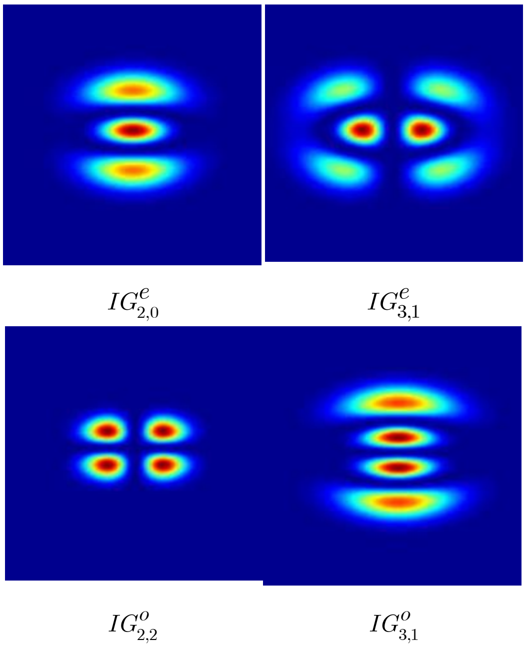
۵

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} - \epsilon\, sinh2\xi \frac{dE}{d\xi} - \ \ a - p\epsilon cosh2\xi\ \ E = 0$$

$$\frac{d^2N}{d\eta^2} + \epsilon\, sin2\eta \frac{dN}{d\eta} + \ \ a - p\epsilon cos2\eta\ \ N = 0$$

$$-\left(\frac{z^2 + z_R{}^2}{z_R}\right)\frac{dZ}{dz} = 0$$

که p و a ثابت‌های جداسازی بوده و $\epsilon = \frac{2f_0^2}{\omega_0^2}$ می‌باشد. دومین معادله از معادلات ۵ به نام معادله اینس مشهور است. این معادله حالت خاصی از معادله هیل[۲] می‌باشد. این معادله زاویه‌ای دارای دورهٔ تناوب 2π است و به‌ازای p و a معلوم یک معادله ویژه‌مقداری است. ویژه‌مقادیر این معادله مجموعهٔ متناهی و حقیقی هستند به‌طوری‌که $a_p^0 < \dots < a_p^p$. به‌ازای هر ویژه‌مقدار پاسخ معادله به شکل یک سری فوریه متناهی به شکل $N(\eta) = \sum A_j(a_p^m)\cos 2j\eta$ قابل نمایش است. تابع $N(\eta)$ را چند جمله‌ای‌های زوج و یا فرد اینس از مرتبه p و درجه (عدد) m می‌نامند که به‌ترتیب با $C_p^m(\eta,\epsilon)$ و $S_p^m(\eta,\epsilon)$ نمایش داده می‌شوند. با توجه به اینکه اولین معادله از معادلات ۵ با تبدیل $\eta \to i\xi$ از دومین معادله به‌دست می‌آید بنابراین می‌توان جواب‌های این معادله را هم با همین تبدیل از جواب‌های معادلهٔ زاویه‌ای به‌دست آورد. همچنین از حل معادلهٔ سوم تابع Z به‌شکل $Z = -p\arctan(\frac{z}{z_R})$ حاصل می‌شود.



شکل ۱. توزیع شدت مدهای زوج و فرد پرتوهای اینس-گاوس در صفحه عرضی برای چند مد مختلف.

بنابراین با حل معادلات ۵ میدان الکتریکی دو گروه زوج و فرد پرتوهای اینس-گاوس در مختصات بیضوی را به‌صورت:

۲ Hill equation

$$IG^{o}_{p,m}(\vec{r},\varepsilon)=\frac{S\omega_0}{\omega(z)}S_p^m(i\xi,\varepsilon)\ S_p^m(\eta,\varepsilon)\exp(\frac{-r^2}{\omega^2(z)})$$
$$\times\exp i(kz+\frac{kr^2}{2R(z)}-(p+1)\arctan(\frac{z}{z_0}))$$
$$IG^{e}_{p,m}(\vec{r},\varepsilon)=\frac{C\omega_0}{\omega(z)}C_p^m(i\xi,\varepsilon)\ C_p^m(\eta,\varepsilon)\exp(\frac{-r^2}{\omega^2(z)})$$
$$\times\exp i(kz+\frac{kr^2}{2R(z)}-(p+1)\arctan(\frac{z}{z_0}))\qquad ٦$$

به‌دست می‌دهد. در معادلات٦ مذکور C و S ثابت‌های بهنجار می‌باشند. بالانویس o و e به‌ترتیب مربوط به پرتوهای فرد و زوج می‌باشند، همچنین پایین‌نویس‌های p و m به‌ترتیب معرف مرتبه مد و عدد مد می‌باشند. در این روابط $0\leq m\leq p$ برای توابع زوج و $1\leq m\leq p$ برای توابع فرد هستند. همچنین p و m دارای پاریته یکسان می‌باشند به این معنا که $(-1)^{p-m}=1$ [۱]. شکل۱ توزیع شدت مدهای زوج و فرد پرتوهای اینس-گاوس را در صفحه عرضی نشان می‌دهد. با مقایسه توزیع شدت های مدهای زوج و فرد متفاوت دیده می‌شود که در مدهای فرد روی محور تقارن افقی (محور x) هیچ قله‌ای وجود ندارد یا به‌عبارتی توزیع شدت روی محور تقارن افقی صفر است (شکل۱ ردیف پایین) در صورتی‌که در مدهای زوج روی محور تقارن افقی قله شدت (شکل۱ ردیف بالا) وجود دارد.

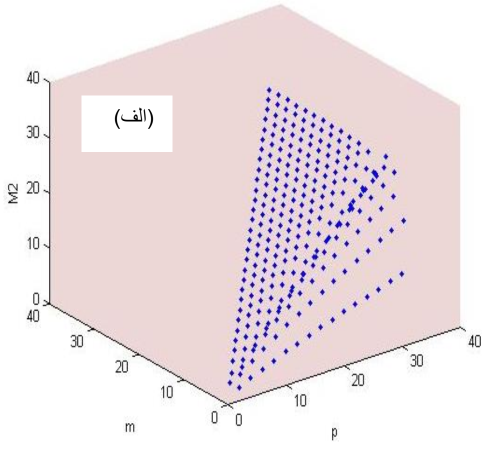
محاسبه عامل M^2 پرتوهای اینس-گاوس

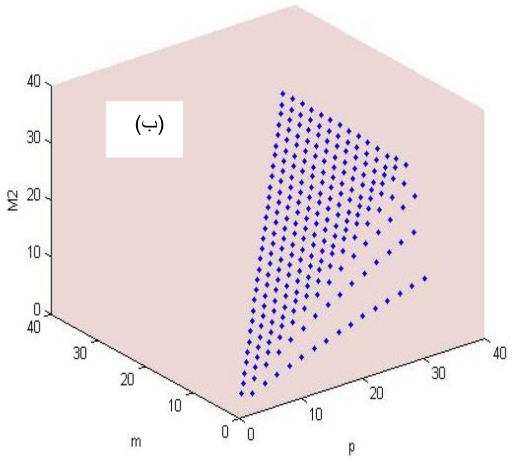
برای محاسبه عامل M^2 پرتو از رابطه زیر استفاده می‌شود [۲۲]:

$$M^2=\sqrt{M_x^2M_y^2}\qquad ٧$$

که در آن M_j^2 به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$M_j^2=4\pi\sigma_{0j}\sigma_{\infty j}\qquad j=x,y\qquad ٨$$





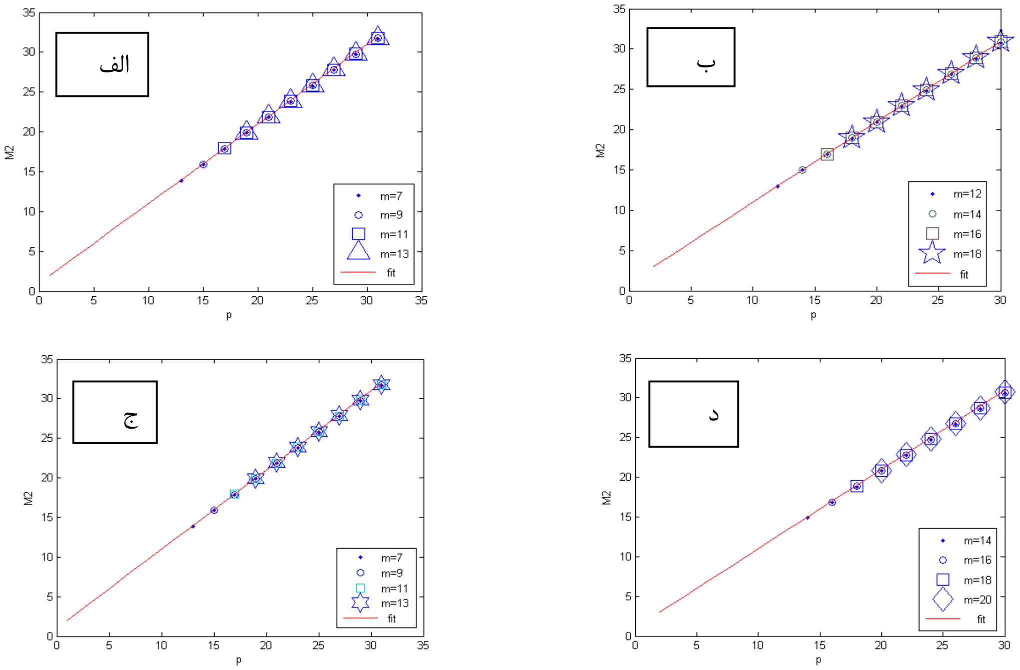
شکل۲. عامل M^2 برای الف) مدهای زوج اینس-گاوسی و ب) مدهای فرد اینس-گاوسی برحسب عدد مد (m) و مرتبه مد (p).

همچنین، σ_{0j} و $\sigma_{\infty j}$ ممان‌های مرتبه دوم پرتو به‌ترتیب در صفحه کمر پرتو و میدان دور می‌باشند و به‌صورت [۲۲]:

$$\sigma_{0x}^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2|E_{p,m}(x,y)|^2\,dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|E_{p,m}(x,y)|^2\,dxdy}\qquad ٩$$

$$\sigma_{\infty x}^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f_x-\bar{f}_x)^2|E_{p,m}(f_x,f_y)|^2\,df_xdf_y}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|E_{p,m}(f_x,f_y)|^2\,df_xdf_y}\qquad ١٠$$

با



شکل۳. عامل M^2 برحسب مرتبه مد، برای: (الف) مدهای زوج با مرتبه زوج، (ب) مدهای زوج با مرتبه فرد، (ج) مدهای فرد با مرتبه زوج، (د) مدهای فرد با مرتبه فرد.

$$\bar{f_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_x \,|E_{p,m}(f_x,f_y)|^2 \, df_x df_y}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |E_{p,m}(f_x,f_y)|^2 \, df_x df_y}$$

تعریف می‌شوند.

در معادلات بالا $E_{p,m}(f_x,f_y)$ نشان دهنده میدان در فضای فرکانس است که با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{p,m}(f_x,f_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{p,m}(x,y) \times e^{(-i2\pi(f_x x + f_y y))} dxdy \qquad ۱۱$$

که در آن f_x و f_y مؤلفه‌های فرکانس فضایی عرضی می‌باشند. برای محاسبه میدان در فضای فرکانس از روابط تبدیل مختصات کارتزین و بیضوی به‌صورت:

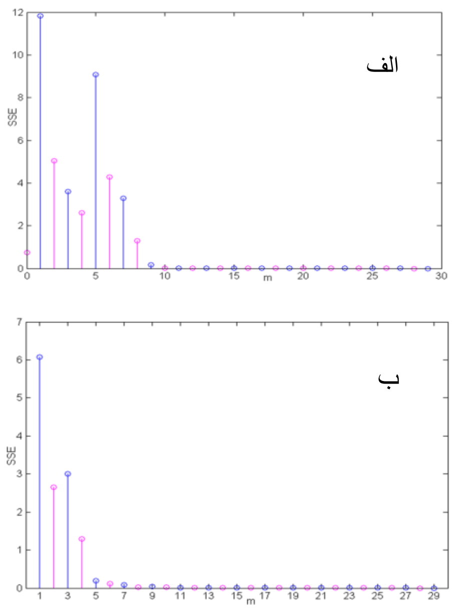
$$\xi = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(r^2 + \sqrt{(r^2+1)^2 - \frac{4x^2}{\varepsilon^2}}\right),$$

$$\eta = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(r^2 - \sqrt{(r^2+1)^2 - \frac{4x^2}{\varepsilon^2}}\right), \qquad ۱۲$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

استفاده می‌شود. اکنون با دانستن میدان الکتریکی در فضای حقیقی و فضای فرکانس، می‌توان انتگرال‌های موجود در روابط ممان‌های مرتبهٔ دوم را با روش‌های عددی محاسبه نمود و عامل M^2 پرتو را به‌دست آورد. به این منظور برنامه حل عددی انتگرال با استفاده از روش سیمپسون نوشته شده است. شکل۲ عامل M^2 انتشار مدهای اینس–گاوسی را به‌صورت تابعی از اعداد مشخصه مد نشان می‌دهد. با توجه به نمودارها می‌توان دریافت که عامل M^2 پرتوهای اینس–گاوس تابع صعودی از مرتبه مد p بوده و مستقل از عدد مد m است. این نتایج به خوبی با نتایج محاسبه فاکتور کیفیت پرتوهای بسل–گاوس و ماتیو–گاوس که از دسته پرتوهای هلمهولتز هستند هم‌خوانی دارد. در این دو دسته پرتو نیز عامل کیفیت وابستگی مستقیم به مرتبه مد داشته و با تغییر مرتبه مد به‌صورت یکنواخت تغییر می‌کند [۱۵،۲۳]. اکنون به بررسی رفتار عامل M^2 پرتوهای اینس–گاوس برحسب مرتبهٔ مد می‌پردازیم. با

برازش داده‌های عددی می‌توان دریافت که داده‌های محاسبه شده به خوبی با یک تابع یکنواخت خطی قابل توصیف است زیرا با افزایش اعداد مشخصه مدها عامل M^2 نیز به‌طور خطی افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان با تطبیق یک تابع خطی بر داده‌های محاسبه شده ضرایب معادله برازش را محاسبه نمود.



شکل٤. محاسبه کمیت SSE برحسب عدد مد m بر اساس معادله١٤، الف) مدهای زوج و ب) مدهای فرد.

نتایج محاسبات نشان می‌دهند رفتار عامل M^2 مستقل از عدد مد بوده و به‌صورت خطی با مرتبهٔ مد وابسته است این وابستگی برای مدهای زوج و فرد اینس-گاوسی به‌صورت زیر است:

$$M(p)^2_{fit} = p + 1 \qquad ۱۳$$

شکل۳ نتایج برازش داده‌های حاصل از محاسبات عددی بر تابع خطی را برای دو گروه مدهای اینس-گاوسی با اندیس های زوج و فرد نشان می‌دهد.

با توجه به نتایج، رابطه خطی۱۳ می‌تواند برای پیش‌بینی عامل M^2 برای این مدها مورد استفاده قرار گیرد. این رابطه به‌وضوح نشان می‌دهد وابستگی عامل M^2 انتشار این دسته از پرتوها با مرتبه مد کاملاً توصیف می‌شود.

از آنجا که محاسبات به‌صورت عددی انجام شده است ارائه مرتبه خطا در محاسبات و درجه اطمینان رابطه برازش شده مفید خواهد بود. به این منظور می‌توان از کمیت مجموع مربعات خطاها استفاده نمود [٢٤]:

$$SSE = \left(\sum_{p} (M^2(p) - M(p)^2_{fit})^2\right) \qquad ١٤$$

در حقیقت کمیت SSE معیاری برای انتخاب بهترین برازش بر داده‌های محاسباتی می‌باشد و در صورتی که این کمیت صفر شود مدل دقیقاً بر داده‌ها منطبق و سازگار است. با استفاده از معادله١٤ شکل٤ تغییرات کمیت مذکور برحسب عدد مد m را نشان می‌دهد. با محاسبه این کمیت برای مدهای اینس-گاوس واضح است که رابطه به‌دست آمده برای محاسبه عامل M^2 پرتوهای اینس-گاوسی رابطه‌ای قابل اطمینان بوده و با افزایش عدد مد (m) خطا در رابطه برازش کاهش می‌یابد. همچنین از آنجا که عامل M^2 نشان دهنده آن است که پرتو از نظر توزیع شدت و همچنین چگونگی انتشار تا چه حد مانند پرتو گاوسی TEM_{00} رفتار می‌کند، می‌توان افزایش این عامل را با افزایش مرتبه مد توضیح داد. با افزایش مرتبه مد (p)، شکل۱، توزیع شدت در صفحه عرضی تغییرات بیشتری نسبت به مد TEM_{00} دارد، به‌عبارت دیگر تعداد لکه‌ها افزایش می‌یابد. این تغییرات نتیجه تغییرات بیشتر میدان الکتریکی در صفحه عرضی است. همچنین توزیع شدت از مرکز باریکه (محور z) دور می‌شود و انرژی پرتو در فضای گسترده‌تری نسبت به مد TEM_{00} پخش می‌شود (شکل۱). از طرف دیگر با توجه به معادلات ۸، ۹ و ۱۰ در محاسبه عامل M^2 توزیع شدت $|E_{p,m}(x,y)|^2$ نقش اساسی دارد و با تغییر آن مقدار عددی عامل M^2 نیز تغییر خواهد کرد. بنابراین با

افزایش مرتبه مد مقدار σ_{0j} و $\sigma_{0\infty}$ به‌ترتیب در فضای مکان و فرکانس افزایش خواهد یافت. پس با افزایش مرتبه مد (p) عامل M^2 نیز افزایش می‌یابد.

بحث و نتیجه‌گیری

پرتوهای اینس–گاوس از جمله پرتوهای هلمهولتز–گاوس به شمار می‌روند که در مشددهای پایدار با تقارن بیضوی انتشار می‌یابند و با توجه به خصوصیات فیزیکی منحصر به‌فردشان، اخیراً کاربردهای آنها در صنایع اپتیک گسترش یافته است. در این مقاله به محاسبه عامل M^2 برای پرتوهای اینس–گاوس پرداخته شده و وابستگی این کمیت به عدد و مرتبهٔ مدها بررسی شده است. با توجه به اینکه محاسبات مربوطه زمان‌بر بوده و نیازمند کامپیوترهای محاسبه‌گر قوی می‌باشد با برازش داده‌های عددی، الگوی محاسباتی برای تخمین عامل M^2 این پرتوها ارائه شده است. نتایج گویای این حقیقت است که رفتار عامل M^2 برحسب مرتبهٔ مد (p) به‌صورت تابع خطی است و این کمیت به عدد مدها (m) وابسته نمی‌باشد. همچنین با توجه به محاسبات انجام شده برای مجموع مربعات خطاها می‌توان نتیجه گرفت که این رابطه برای عدد مدهای بزرگتر از ۷ (برای مدهای زوج) و عدد مدهای بزرگتر از ۳ (برای مدهای فرد) از دقت بسیار خوبی برخوردار است. این الگو می‌تواند به دست‌یابی سریع به عامل M^2 این پرتوها کمک کرده و طراحان سیستم‌های اپتیکی را از محاسبات پیچیده و وقت‌گیر بی‌نیاز گرداند. روند افزایشی عامل M^2 با افزایش مرتبه مد را می‌توان به توزیع شدت عرضی در فضای گسترده‌تر مربوط دانست که با توجه به معادلات ۸، ۹ و ۱۰ مقدار σ_{0j} و $\sigma_{0\infty}$ در فضای مکان و فرکانس افزایش می‌یابد و در نتیجه مقدار عددی عامل M^2 نیز افزایش می‌یابد.

مراجع

[1] M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, Ince-Gaussian beams, *Optics Letters* 29 (2004) 144-146.

[2] M. Woerdemann, C. Alpmann, C. Denz, Optical assembly of microparticles into highly ordered structures using Ince-Gaussian beams, *Applied Physics Letters* 98 (2011) 111101.

[3] U.T. Schwarz, M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega, Observation of Ince–Gaussian modes in stable resonators, *Optics Letters* 29 (2004) 1870-1872.

[4] C. Shu-Chun, O. Kenju, Numerical study for selective excitation of Ince-Gaussian modes in end-pumped solid-state lasers, *Optics Express*, 15 (2007) 16506-16519.

[5] M. Sabaeian, H. Nadgaran, Bessel–Gauss beams: Investigations of thermal effects on their generation, *Optics Communications* 281 (2008) 672-678.

[6] D. Deng, Q. Guo, Ince–Gaussian beams in strongly nonlocal nonlinear media, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 41 (2008) 145401.

[7] H. Nadgaran, M. Servatkhah, The effects of induced heat loads on the propagation of Ince–Gaussian beams, *Optics Communications* 284 (2011) 5329-5337.

[8] H. Nadgaran, M. Servatkhah, M. Sabaeian, Mathieu-Gauss beams: A thermal consideration, *Optics Communications* 283 (2010) 417-426.

[9] G. Zhou, K. Zhu, F. Liu, Vectorial structure of Ince–Gaussian beam in the far field *Journal of Modern Optics*, 54 (2007) 2807-2817.

[10] A. Mathew, K. Choudhury, A. Garg, S. Kanojia, P. Sen, T.J. Andrews, Generation and Propagation of Higher order Gaussian Beams, *International Conference on Optics and photonics*, CSIO, Chandigarh, India, 30 Oct.-1 Nov.(2009).

[11] D. Aguirre-Olivas, G. Mellado-Villaseñor, D. Sánchez-de-la-Llave, V. Arrizón, Efficient generation of Hermite–Gauss and Ince–Gauss beams through kinoform phase elements, *Applied Optics*, 54 (2015) 8444-8452.

[12] Y. Ren, Z. Fang, L. G, Kun Huang, Y. Chen, R. Lu, Dynamic generation of Ince-Gaussian modes with a digital micromirror device, *Journal of Applied Physics* 117 (2015) 133106.

[13] H. Eyyuboğlu, Propagation analysis of Ince–Gaussian beams in turbulent atmosphere, *Applied Optics* 53 (2014) 2290-2296.

[14] L. Carbone, P. Fulda, C. Bond, F. Brueckner, D. Brown, M. Wang, D. Lodhia, R. Palmer, A. Freise, "The generation of higher-order Laguerre-Gauss optical beams for high-precision interferometry, *Journal of Visualized Experiments.* 78 (2013) 50564.

[15] R. Borghi, and M. Santarsiero, M^2 factor of Bessel–Gauss beams, *Optics Letters* 22 (1997) 262-264.

[16] A. Siegman, New developments in laser resonators, *Proceedings of SPIE*, 1224 (1990) 2.

[17] P.A. Belanger, Beam propagation and the ABCD ray matrices, *Optics Letters* 16 (1991) 196-198.

[18] M. Mahdieh, Numerical approach to laser beam propagation through turbulent atmosphere and evaluation of beam quality factor, *Optics Communications* 281 (2008) 3395–3402.

[19] K. Xiaoping, L. Baida, The Beam Propagation Factor of Nonparaxial Truncated Flattened Gaussian Beams, *Optical and Quantum Electronics*, 38 (2006) 547-556.

[20] G. Wu, Q. Lou, J. Zhou, J. Dong, Y. Wei, Z. Su, Propagation of flat-topped beams, *Optics & Laser Technology*, 40 (2008) 494-98.

[21] X. Kang, B. Lu, The M^2 factor of nonparaxial Hermite-Gaussian beams and related problems, *Optik*, 116 (2005) 232-236.

[22] Z. Guo-Quan and F. Yan, M2 factor of four-petal Gaussian beam, *Chinese Physics B*, 17 (2008) 3708.

[23] A. Chafiq, Z. Hricha, A. Belafhal, Parametric characterization of Mathieu–Gauss beams, *Optics Communications* 282 (2009) 2590-2594.

[24] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B. Flannery, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific, *Cambridge University Press* (1992).

Numerical investigation of the M^2 factor of paraxial Ince-Gaussian beams

Mojtaba Servatkhah[1,*], Rahele Pourmand [2], Hamid Nadgaran [3]

[1] Department of Physics, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marvdasht, Iran

[2] Department of Physics, Estahban Higher Educational Center, Estahban, Iran

[3] Physics Department, College of Science, University of Shiraz, Shiraz 71454, Iran

Abstract

Ince-Gaussian beams are a complete member of Helmholtz-Gauss beams and are exact and orthogonal solution of paraxial wave equation in elliptical cylindrical coordinates. In this paper, numerical evaluation of the M2 factor of Ince-Gaussan beams based on second order moments of intensity is presented. The results show that the M2 factor is an increasing function of mode order whereas it is independent of mode number. These calculations can help optical system designers to compute the quality factor of these beams very easily without the need to use other complex calculations.

Keywords: Paraxial wave equation, Helmholtz gauss beams, Ince-gaussian beams, M^2 factor

[*]Corresponding Author: servatkhah@yahoo.com