

بررسی اثر نوفه غیرفعال در مدل‌های رشد پیوسته سطح

داود رئوفی^{۱*}، محمود رستمی^۱، محسن قاسمی نژاد حقیقی^۲

^۱ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

^۲ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

دریافت: ۱۳۹۴/۰۷/۱۶ ویرایش نهائی: ۱۳۹۵/۰۸/۰۸ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۰۷

چکیده

معادله مولینس-هرینگ یکی از مدل‌های مطرح در رشد سطح می‌باشد. هدف از این پژوهش، بررسی اثر نوفه غیرفعال بر روی این معادله با روشی جدید است. نکته کلیدی در این مدلی که ارائه کردیم، تجمیع نیروی خارجی اعمال شده بر فصل مشترک و نوفه غیرفعال در قالب یک جمله است که بوسیله پارامتر قابل کنترل خارجی g شدت آن تنظیم می‌شود. دینامیک مدل پیشنهادی به‌ازای مقادیر مشخصی از g دارای رفتار بحرانی است. همچنین، محاسبات ما نشان می‌دهند که، به‌ازای مقادیر ۲ و $g=1$ هیچ‌گونه گذار فازی نخواهیم داشت. مهم‌ترین مشخصه بحرانیت، وجود نماهای مقیاس‌بندی است که در این مطالعه به محاسبه عددی این کمیت‌ها پرداخته‌ایم. بر این اساس برای $g=3$ نقطه بحرانی را برابر 0.7604 به‌دست آورده‌ایم. در این نقطه، نمای ناهمواری کل و ناهمواری موضعی به‌ترتیب برابر 1.011 و 1.410 به‌دست آمده است. برابر نبودن این دو مقدار یعنی ناهمواری کل و ناهمواری موضعی یکی از مهم‌ترین اثرات نوفه غیرفعال در مدل‌های رشد است که نشان‌دهنده تغییر در ساختار سطح ایجاد شده می‌باشد.

کلیدواژگان: رشد سطح، مدل مولینس-هرینگ، ناهمواری، بحرانیت، نوفه غیرفعال.

مقدمه

وقتی سطح مورد نظر در یک محیط بی‌نظم (این بی‌نظمی به‌طور مثال در مورد یک تومور سرطانی می‌تواند سیستم ایمنی و یا محیط اطراف آن باشد) قرار بگیرد و تحت تأثیر یک نیروی خارجی (در مورد تومور می‌توان به نیاز سلول به مواد مغذی اشاره کرد) باشد، در این صورت شاهد یک گذار فاز در حرکت سطح خواهیم بود [۲].

مطالعه ویژگی‌های آماری فصل مشترک ایجاد شده در این پدیده‌ها، ما را در شناخت بهتر آنها یاری می‌کند. در این میان مدل‌های فراوانی برای توصیف و مدل‌سازی این پدیده‌ها معرفی شده‌اند که هر کدام

گذار فاز در مدل‌های متفاوت در حضور نوفه غیرفعال^۱ یا به‌عبارتی محیط بی‌نظم، از جمله موضوعات جالبی است که اخیراً توجه زیادی را به‌خود جلب کرده است. نوفه غیرفعال به نوفه‌ای می‌گویند که در زمان ساکن باشد، به‌همین دلیل به آن نوفه منجمد در زمان هم گفته می‌شود [۱]. از جمله پدیده‌های فیزیکی در این مقوله می‌توان به کاهش رشد تومورهای سرطانی در حضور سیستم ایمنی بدن [۲]، نفوذ یک سیال در محیط متخلخل [۳] و شار جریان در ابر رساناها اشاره کرد [۴]، که منشأ همگی آنها انتشار در محیط‌های بی‌نظم است [۵]. ساختار کلی این پدیده‌ها به‌صورتی است که

* نویسنده مسئول: d_raoufi@ymail.com

¹ Quench Noise

نوع فرکتال ایجاد شده را دست خوش تغییراتی کند. دلیل این موضوع را می‌توان از برابر نبودن ناهمواری موضعی و ناهمواری کل در حضور نوفه غیرفعال استنباط کرد، چرا که در نبود این نوع نوفه در اکثر مدل‌های رشد این دو کمیت با هم برابر می‌باشند [۹، ۱۰].

از آنجائی که دینامیک رشد تومور از نظر نرخ رشد و خطی بودن، انتشار سطحی و تکثیر در حاشیه بیرونی به فرآیند برآرایی پرتو مولکولی (MBE) شباهت دارد، از اینرو می‌توان معادلات حاکم بر فرآیند MBE را برای دینامیک رشد تومور (با در نظر گرفتن ملاحظات هندسی در فصل مشترک) نیز به کار برد [۱۱، ۱۲].

بنابراین، از مدل مولینس_هرینگ در حضور نوفه غیرفعال که به صورت زیر [۱۳، ۱]:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = -K\nabla^4 h + F + \eta(x, h) \quad ۳$$

تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم. در معادله^۳ $h(x, t)$ ارتفاع موضعی فصل مشترک و یا غشاء در مکان x و زمان t ، و F نیروی خارجی وادارنده اعمال شده به فصل مشترک است. همچنین در این معادله، $\eta(x, h)$ نوفه تصادفی گاوسی مستقل از زمان است و از رابطه‌های زیر [۱، ۶، ۷]:

$$\langle \eta(x, h) \rangle = 0 \quad ۴$$

$$\langle \eta(x, h) \eta(x', h') \rangle \propto \delta(x - x') \delta(h - h')$$

پیروی می‌کند.

گذار فاز مشخصه مهم مدل‌های رشد سطح، در حضور نوفه غیرفعال است که در نقطه بحرانی رخ می‌دهد. کنش بین نوفه تصادفی و نیروی خارجی اعمال شده به فصل مشترک، عامل تعیین کننده برای یافتن نقطه بحرانی است [۷]، به طوری که اگر نیروی F ضعیف‌تر

ویژگی‌های منحصر به فرد خود را دارند. از جمله این مدل‌ها می‌توان به معادله ادواردز_ویلکینسون (EW)،

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \vartheta \nabla^2 h + F + \eta(x, h) \quad ۱$$

معادله کاردر_پاریزی_ژانگ (KPZ)،

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \vartheta \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + F + \eta(x, h) \quad ۲$$

در حضور نوفه غیرفعال [۵-۷] و همچنین معادله مولینس_هرینگ (MH)، معادله^۳ اشاره کرد. هرکدام از این مدل‌ها در یک طبقه جهان شمول مجزا دسته‌بندی می‌شوند. نکته حائز اهمیت درباره این مدل‌ها این است که اگر در حضور نوفه گرمایی (یا به عبارتی نوفه سفید) بررسی شوند، در طبقه جهانی متفاوتی قرار می‌گیرند. مدلی که ما قصد داریم به آن بپردازیم معادله مولینس_هرینگ [۱] می‌باشد که کمتر به آن پرداخته شده است. این مدل با استفاده از تحلیل مقیاس‌بندی نشان می‌دهد که رشد تومورها متعلق به طبقه جهانی برآرایی پرتو مولکولی^۱ (MBE) هستند. این مدل رشد توسط سه ویژگی توصیف می‌شود: الف) نرخ رشد خطی، ب) انتشار سطحی سلول‌ها در لبه در حال رشد و ج) محدودیت تکثیر سلول در حاشیه تومور، که در حضور نوفه گرمایی مدل خطی و مدل گسسته رشد ولف_ویلاین را توصیف می‌کند. مدل خطی MBE شامل اثرات انباشت و پخش ذرات بر روی سطح است و از اثر دفع چشم‌پوشی می‌شود. عنصر اصلی این مدل که آن را از دو مدل EW و KPZ جدا می‌کند، پخش سطحی است [۱، ۸].

وجود نوفه غیرفعال در مدل‌های رشد باعث یک گذار فاز در حرکت سطح می‌شود. این گذار فاز بیانگر نتایج جالبی خواهد بود که اولاً باعث تغییر کامل در اندازه نماهای بحرانی به دست آمده در نبود این نوع نوفه می‌شود و ثانیاً، احتمال دارد خاصیت فرکتالی سطح یا

^۱ Molecular Beam Epitaxy

این نماهای بحرانی به‌طور مستقیم به‌شکل مرزی وابسته هستند. ناهمواری موضعی α_l و ناهمواری کل α_g این دو مورد را شامل می‌شوند. سه تای دیگر از این نماها وابسته به توسعه زمانی هستند که شامل β^* نمای بحرانی، β نماهای رشد و Z نمای دینامیکی می‌باشند. اگر میانگین آماری سرعت رشد فصل مشترک [۲۰۵]:

$$v = \left\langle \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \right\rangle \quad 5$$

را به‌عنوان پارامتر نظم در نظر بگیریم؛ در این صورت

$$v \begin{cases} = 0 & F < F_c \\ \neq 0 & F > F_c \end{cases} \quad 6$$

بیان‌کننده گذار فاز است. در نقطه بحرانی F_c ، بسیاری از کمیت‌های مشاهده‌پذیر تحت تبدیلات مقیاس زمانی و مکانی دارای خاصیت ناوردایی مقیاس هستند. به‌طور نمونه سرعت میانگین v به‌عنوان پارامتر نظم در حالت پایا دارای رفتار توانی به‌صورت

$$v_s \sim (F - F_c)^\theta \quad F > F_c \quad 7$$

است. همچنین در نقطه بحرانی

$$v(t) \sim t^{-\sigma} \quad 8$$

است. لازم به‌ذکر است که به‌ازای $F < F_c$ سرعت سریعاً به مقدار صفر میل کرده و به‌ازای $F > F_c$ پارامتر نظم به مقدار ثابتی میل می‌کند [۲].

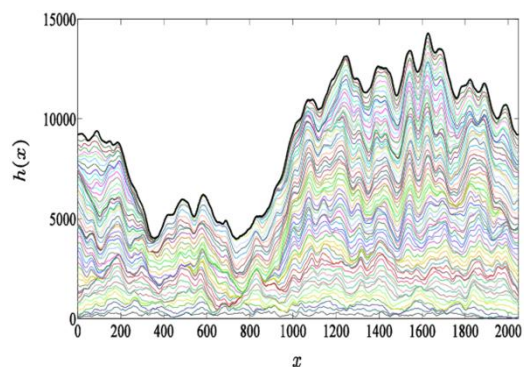
یکی از مهمترین کمیت‌ها برای دسته‌بندی و بررسی خواص آماری در مدل‌های رشد، پهنای فصل مشترک [۷، ۱۴]:

$$W = \sqrt{\langle (h(x,t) - \bar{h}(t))^2 \rangle} \quad 9$$

است، که در آن $\langle \rangle$ به‌معنای میانگین‌گیری آماری و \bar{X} به‌معنای میانگین‌گیری بر روی مکان است. این کمیت در بسیاری از مدل‌های رشد با طول محدود L ، دارای رفتاری به‌صورت [۶، ۷]:

از نوفه غیرفعال باشد، شاهد هیچ گونه رشدی نخواهیم بود.

رقابت بین نیروی اعمال شده با نوفه باعث گیر افتادن سطح و رشد نکردن در نقاطی که نیرو نتواند بر نوفه غلبه کند، می‌شود. البته به‌دلیل اینکه مدل رشدی که بررسی می‌کنیم از نوع محلی است، یعنی اینکه رشد یک نقطه از سطح به نزدیک‌ترین همسایه‌های آن وابسته است، پس این خاصیت می‌تواند بر فرآیند رشد تأثیر گذار باشد.



شکل ۱. نحوه رشد فصل مشترک شبیه‌سازی شده در $p_c = 0.7504$ برای $g = 3$ برای سطحی با اندازه 2048 در 30000 گام زمانی که فاصله هر نمودار با نمودار بعدی 500 گام می‌باشد.

در شکل ۱ می‌توان به‌خوبی درگیری بین نوفه و نیروی خارجی را مشاهده کرد که در بعضی نقاط پس از چندین گام زمانی سطح گیر افتاده یا به‌عبارت دیگر به یک نقطه سنجاق شده است و رشد نمی‌کند. بر این اساس، هدف اصلی یافتن F_c یعنی مقدار نیرو در نقطه بحرانی است. البته در روش ما این تعبیر کمی متفاوت خواهد بود.

برای اینکه بتوان توصیفی صحیح از فصل مشترک داشته باشیم، نیاز است که نماهای بحرانی را تعریف و به‌صورت دقیق محاسبه کنیم. دینامیک و مکانیسم اساسی فرآیند رشد می‌تواند به‌طور کامل توسط مجموعه‌ای از پنج نمای بحرانی توصیف شود. دو تا از

و وجود نوفه غیرفعال باعث تغییر اساسی در شکل سطح فرکتالی آن‌ها می‌شود [۱۰، ۱۷]. در نزدیکی نقطه بحرانی F_c طول همبستگی افقی ξ_x ، طول همبستگی عمودی ξ_h و طول همبستگی زمانی ξ_t طبق رابطه‌های زیر مقیاس می‌شود [۶].

$$\xi_h(F) \sim |F - F_c|^{-\nu_h} \quad ۱۲$$

$$\xi_t(F) \sim |F - F_c|^{-\nu_t}$$

$$\xi_x(F) \sim |F - F_c|^{-\nu_x}$$

نماهای بحرانی ν_x, ν_t, ν_h را می‌توان به صورت مستقیم و یا طبق روابط ۱۳ محاسبه کرد [۱، ۶].

$$\beta = \frac{\nu_h}{\nu_t}, \quad \alpha = \frac{\nu_h}{\nu_x} \quad ۱۳$$

$$\theta = \nu_t - \nu_h, \quad z = \frac{\nu_t}{\nu_x}, \quad \sigma = \frac{\theta}{\nu_t}$$

همچنان‌که ذکر شد، تاکنون روش‌های محاسباتی متعددی برای بررسی ویژگی‌های مدل‌های رشد، معرفی و بررسی شده است که دلالت بر اهمیت این موضوع دارد. بیشتر این روش‌های محاسباتی به‌طور خاص برای بررسی بحرانیت و گذار فاز در مدل ادواردز-ویلکینسون به‌کار رفته‌اند. بدین منظور می‌توان برای حل عددی معادلهٔ ۳ از روش‌های مرسوم محاسباتی مانند روش رانگ-کوتا و سایر روش‌های گسسته‌سازی مشتقات فضایی و زمانی بر روی شبکه استفاده کرد. همچنین روش‌های دیگری نیز ارائه شده است که به نتایج مشابه می‌انجامد. برای مثال، لِشورن^۱ [۱۸] مدلی را ارائه کرد که به‌کمک آن نتایج قابل قبولی برای نماهای بحرانی مدل ادواردز-ویلکینسون در حضور نوفه غیرفعال، در نقطه بحرانی، به‌دست می‌آید. در ادامه قصد داریم ضمن کمک گرفتن از این مدل، مدل پیشنهادی خود را ارائه کنیم.

$$W \sim \begin{cases} t^\beta & t \ll L^z \\ L^{\alpha_g} & t \gg L^z \end{cases} \quad ۱۰$$

است. این رابطه به رابطه مقیاس بندی فامیلی-ویچک معروف است [۱۵، ۱۶]. ضرایب β, α_g و Z نماهای مقیاس بندی هستند و به ترتیب با نام‌های نمای رشد، نمای ناهمواری کل و نمای دینامیکی، نام‌گذاری می‌شوند. هرچه مقدار نمای دینامیکی بزرگتر باشد، گذار به حالت پایدارتر، دیرتر اتفاق می‌افتد و حالت دینامیکی سیستم بیشتر است. لازم به ذکر است که نماهای مذکور از هم مستقل نبوده و در رابطه $Z = \alpha_g/\beta$ صدق می‌کنند [۱].

با توجه به اینکه پهنای فصل مشترک W به نوعی هم ارز با میانگین ارتفاع $H(t) = \langle h(x, t) \rangle$ است، و با توجه به رابطهٔ ۸ که $v(t) \sim dH(t)/dt \sim t^{-\sigma}$ لذا می‌توان نتیجه گرفت که با توجه به رابطه $\frac{dH(t)}{dt} \sim t^{\beta-1}$ ، نماهای β و σ در رابطه $\sigma + \beta = 1$ صدق می‌کنند.

یکی دیگر از کمیت‌های مورد استفاده برای پارامتری کردن مدل‌های مختلف، تابع همبستگی اختلاف-ارتفاع [۷، ۱۵]:

$$C(r) = \langle (h(x, t) - h(x + r, t))^2 \rangle \quad ۱۱$$

است، که در حالت پایا ($t > t_g = L^z$) در نقطه بحرانی به صورت $C(r) \propto r^{2\alpha_l}$ رفتار می‌کند. در این رابطه α_l نمای ناهمواری موضعی نام دارد. نمای دیگری که قبلاً به آن اشاره شد، نمای بحرانی β^* است که به صورت $\beta^* = \frac{\alpha_g - \alpha_l}{z}$ تعریف می‌شود. این نما برای سطوحی که رشد غیر معمول دارند تعریف می‌شود.

در اکثر مدل‌های رشد سطح، نماهای ناهمواری کل α_g و محلی α_l با هم برابرند اما در تحول فصل مشترک در محیط‌های بی‌نظم $\alpha_l \neq \alpha_g$ گزارش شده است. به سطوحی که $\alpha_l = \alpha_g$ داشته باشند فرکتال می‌گویند،

¹ Leschhorn

مدل پیشنهادی

تحول زمانی فصل مشترک را بر روی یک شبکه یک بعدی به طول L و متشکل از N نقطه ($N = L/a$)، در نظر می‌گیریم. به طور معمول ثابت شبکه برابر $a = 1$ انتخاب می‌شود. فرض کنیم که ارتفاع فصل مشترک مقادیر صحیح و مثبت h داشته باشد. در زمان $t = 0$ تمامی نقاط هم‌ارتفاع، $h_i(t) = 0$ است. در این صورت قاعده رشد فصل مشترک، به‌ازای تمامی نقاط مکان $i \in [1, L]$ به صورت رابطه ۱۴ تعریف می‌شود:

$$h_i(t+1) = \begin{cases} h_i(t) + 1, & v_i > 0 \\ 0, & v_i \leq 0 \end{cases} \quad 14$$

در عبارت بالا v_i شکل گسسته شده معادله ۴ است که به صورت

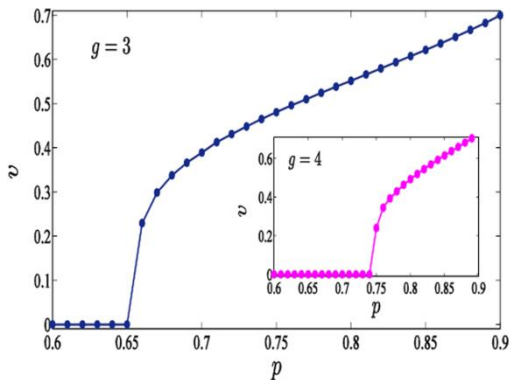
$$v_i = -[h_{i-2}(t) - 4h_{i-1}(t) + 6h_i(t) - 4h_{i+1}(t) + h_{i+2}(t)] + g\eta_{i,h} \quad 15$$

تعریف می‌کنیم. نکته مهم در عبارت ۱۵ این است که نوفه غیرفعال و نیروی وادارنده خارجی در قالب یک جمله تجمیع شده است و بدین صورت تعریف می‌شود که به‌ازای هر یک از مقادیر مکان و ارتفاع (i, h) ، $\eta_{i,h}$ با احتمال p دارای مقدار $+1$ و با احتمال $q = 1 - p$ مقدار -1 اختیار می‌کند. پارامتر g کمیت مثبت و ثابت است و قدرت نیروی تصادفی را در مقابل نیروی خارجی اعمالی که متناسب با $p - q$ است، مشخص می‌کند. در حین محاسبه رابطه ۱۴ از شرط مرزی دوره‌ای استفاده کرده‌ایم.

نتایج محاسباتی

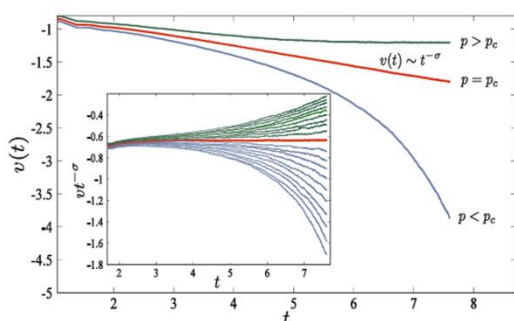
در این قسمت به بررسی نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی مدل مولینس-هرینگ غیرفعال می‌پردازیم و نتایج حاصله را با مدل‌هایی که تاکنون ارائه شده، مقایسه خواهیم کرد. برای شبیه‌سازی این مدل از روشی

که در بخش قبل توضیح داده شد، (رابطه‌های ۱۴ و ۱۵)، استفاده شده است. این مدل به‌ازای مقادیر مختلف g در رابطه ۱۵ مورد بررسی قرار گرفته است. نکته بسیار جالبی که ما به آن برخوردیم، این بود که برای $g=1$ و $g=2$ فصل مشترک دچار هیچ گونه تحولی نمی‌شود و شاهد رشدی نخواهیم بود، برخلاف آنچه که لیشورن برای معادله EW انجام داده است.



شکل ۲. سرعت رشد فصل مشترک v برحسب احتمال p نشان دهنده گذار فاز در مدل مولینس-هرینگ غیرفعال است. سرعت رشد فصل مشترک به‌ازای $p < p_c$ صفر و به‌ازای $p > p_c$ مقدار غیر صفر اختیار می‌کند.

همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، سرعت میانگین v به‌عنوان پارامتر نظم به‌ازای $p < p_c$ دارای مقدار صفر و به‌ازای $p > p_c$ مقدار غیر صفر اختیار می‌کند که هم‌ارز با گذار فاز در این مدل است. مقدار p_c برای $g = 3$ برابر 0.6504 به‌دست آمد. پدیده گذار فاز اگرچه به انتخاب ثابت‌های مسأله مانند g بستگی ندارد، اما مقدار p_c به‌ازای مقادیر متفاوت g متفاوت است. در این شبیه‌سازی‌ها از اندازه‌های متفاوتی برای طول فصل مشترک (L) استفاده کرده‌ایم که نتایج به‌طور چشمگیری یکسان به‌دست می‌آید. با این تفاسیر می‌توان نتیجه گرفت که نتایج مستقل از طول فصل مشترک است. البته هرچقدر L بزرگتر باشد، نتایج از نقطه نظر آماری دقیق‌تر و خطای محاسباتی کمتر است. همچنین بوسیله بالا بردن آنسامبل گیری، سعی کرده‌ایم خطای محاسباتی به حداقل برسد. در ادامه مطلب



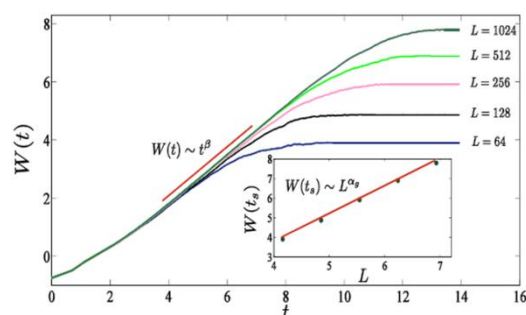
شکل ۴. میانگین آماری سرعت رشد فصل مشترک برحسب زمان. در نقطه گذار فاز، دارای رفتار مقیاسی $v(t) \sim t^{-\sigma}$ است که با رنگ قرمز مشخص شده است. شکل درونی: نمودار $vt^{-\sigma}$ برحسب t برای $\sigma = 0.154$ و $p = 0.760$ تا $p = 0.700$ با فاصله 0.005 می‌باشد.

برای $p \gg p_c$ ، یعنی زمانی که اندازه نوفه غیرفعال در مقابل نیروی وادارنده ناچیز باشد، نمای ناهمواری و نمای رشد به ترتیب برابر 0.36 و $1/47$ محاسبه شدند، و همانطور که انتظار می‌رود از مقادیر معادله MH در حضور نوفه گرمایی پیروی می‌کنند [۱].

با توجه به شکل ۴، سرعت رشد فصل مشترک $v(t)$ که از رابطه ۵ قابل محاسبه است به ازای مقادیر مختلف p دارای رفتارهای متفاوتی است. در نقطه بحرانی این کمیت به صورت توانی و از رابطه ۸ پیروی می‌کند که در شکل ۴ با رنگی متفاوت مشخص شده است. شیب این خط برابر σ است که مقدار آن برابر 0.154 به دست آمد. شکل درونی شکل ۴ را به این دلیل رسم کرده‌ایم که صحت درستی شیب σ را مورد ارزیابی قرار دهیم، چرا که با مقیاس $vt^{-\sigma}$ برای $p_c = 0.7604$ و $\sigma = 0.154$ باید تبدیل به یک خط راست شود که با دقت نسبتاً خوبی این امر محقق شده است. در زیر نقطه بحرانی، $p < p_c$ ، کمیت $v(t)$ سریعاً به سمت صفر و به ازای $p > p_c$ به مقدار غیر صفر میل می‌کند. در شکل ۲ نیز این اتفاق به وضوح دیده می‌شود.

به طور ویژه مقادیر محاسبه شده برای $g = 3$ را با نتایج دیگران مقایسه خواهیم کرد.

پهنای سطح که برابر با انحراف معیار استاندارد از مقدار میانگین است. مطابق با رابطه ۹ محاسبه شده و در شکل ۲ نمایش یافته است. همانطور که مشاهده می‌شود این کمیت به ازای مقادیر مختلف اندازه سیستم در زمان‌های کوتاه دارای رفتار مقیاس‌بندی به صورت $W(t) \sim t^\beta$ است. نتایج ما نشان داد که برای $g = 3$ و $p_c = 0.7604$ ، مقدار نمای رشد β برابر $\beta \approx 0.840$ می‌باشد که با آنچه دیگران [۱۳، ۱۹] محاسبه کرده‌اند (تقریباً برابر 0.844 و 0.841)، تطابق بسیار خوبی دارد. به ازای زمان‌های طولانی‌تر، کمیت پهنای سطح به مقدار اشباع خود رسیده و با اندازه سیستم به صورت $W(t_s) \sim L^\alpha g$ مقیاس می‌شود.



شکل ۳. پهنای سطح در نقطه بحرانی $p = p_c$ دارای رفتار توانی $W(t) \sim t^\beta$ است. (شکل داخل) پهنای سطح در زمان‌های بزرگتر از زمان اشباع با ابعاد سیستم به صورت $W(t_s) \sim L^\alpha g$ رفتار می‌کند.

با توجه به شکل ۳، مشاهده می‌شود که برای L ‌های متفاوت پهنای سطح مقطع به اشباع می‌رسد. همچنین، با توجه به شکل داخلی شکل ۳ نمای ناهمواری کل برابر $\alpha_g = 1/41$ به دست می‌آید. دیگران [۱۳، ۱۹] این مقدار را برابر $1/50$ و $1/35$ به دست آورده‌اند.

به صورت توانی $C(r) \propto r^{2\alpha_l}$ مقیاس می‌شود و مقدار محاسبه شده برای آن برابر ۱٫۰۱۱ است (شکل درونی شکل ۶). بدین صورت مشاهده می‌شود که نمای ناهمواری موضعی (α_l) برابر نمای ناهمواری کل (α_g) نمی‌باشد که به وضوح می‌توان اثر نوفه غیرفعال بر مدل مربوطه را دید. در جدول ۱ نماهای بحرانی، برای سه g متفاوت محاسبه شده، گردآوری شده است.

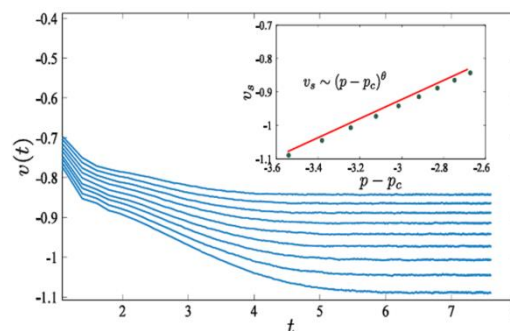
این نتایج بیان می‌کنند که گذار فاز در مدل مولینس-هرینگ تقریباً مستقل از پارامتر g (شدت بی‌نظمی) است، اما برای g های مختلف کمیت p_c متفاوت خواهد بود.

جدول ۱. نماهای مقیاس‌بندی برای مدل مولینس-هرینگ.

	$g = 3$	$g = 4$	$g = 5$
p_c	0.6504 ± 0.0005	0.7435 ± 0.0005	0.7980 ± 0.0005
β	0.842 ± 0.002	0.840 ± 0.002	0.846 ± 0.002
α_g	1.41 ± 0.02	1.48 ± 0.02	1.45 ± 0.02
Z	1.67 ± 0.02	1.76 ± 0.02	1.71 ± 0.02
σ	0.154 ± 0.001	0.158 ± 0.001	0.161 ± 0.001
α_l	1.011 ± 0.002	1.065 ± 0.002	1.003 ± 0.002
θ	0.285 ± 0.001	0.306 ± 0.001	0.330 ± 0.001
β^*	0.238	0.235	0.261
v_t	1.85	1.93	2.04

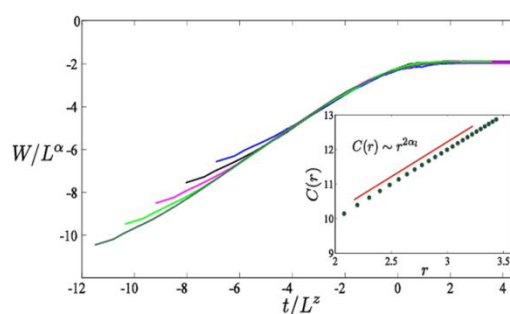
نتیجه‌گیری

در این مطالعه با بهره‌گیری از روشی ساده، به بررسی گذار فاز مدل مولینس-هرینگ در حضور نوفه غیرفعال پرداختیم. با توجه به محاسبات عددی، نماهای بحرانی به دست آمده در این مطالعه با آنچه دیگران [۱۳، ۱۹] به کمک روش مستقیم حل عددی معادله ۳ به دست آورده‌اند، هم‌خوانی دارد. از طرف دیگر با توجه به نتایج حاصله می‌توان پی برد که این مدل در حضور



شکل ۵. نمودار سرعت رشد فصل مشترک بر حسب زمان برای $p = 0.720$ تا $p = 0.780$ با فاصله 0.005 . نمای θ طبق رابطه $v_s \sim (p - p_c)^\theta$ مقیاس می‌شود (شکل درونی).

نمای بحرانی دیگر، نمای سرعت (θ) است که طبق رابطه $v_s \sim (p - p_c)^\theta$ تعریف می‌شود. در شکل ۵ برای $p > p_c$ نمودار سرعت بر حسب زمان رسم شده است. مشاهده می‌شود که سرعت اشباع بعد از مدتی به اشباع می‌رسد. اگر این سرعت اشباع را بر حسب $p - p_c$ ، برای p های متفاوت رسم کنیم، شیب این نمودار θ را می‌دهد که مقدار آن برابر 0.285 به دست آمد (شکل درونی شکل ۵).



شکل ۶. نمودار W/L^α بر حسب t/L^z در نقطه بحرانی با 1.73 $Z =$ و $\alpha = 1.36$ برای سطوحی با اندازه‌های $64, 128, 256, 512$ و 1024 . شکل درونی: تابع همبستگی دو نقطه‌ای ارتفاع فصل مشترک $C(r)$ بر حسب فاصله در نقطه بحرانی به صورت توانی $C(r) \propto r^{2\alpha_l}$ رفتار می‌کند.

همچنین محاسبه تابع همبستگی دو نقطه‌ای ارتفاع فصل مشترک در نقطه بحرانی و در حالتی که سطح به اشباع رسیده است ($t > t_s$)، نشان می‌دهد که این کمیت

[10] A. Bunde, S. Havlin, *Fractals in science*, Springer, Berlin, (1994).

[11] C. Escudero, Geometrical approach to tumor growth, *Physical Review E*, **74** (2006) 1-7.

[12] C. Escudero, Stochastic models for tumoural growth, *Physical Review E*, **73** (2006) 1-4.

[13] H. Liu, W. Zhou, Q.-M. Nie, Q.-H. Chen, Depinning transition of the quenched Mullins–Herring equation: A short-time dynamic method, *Physics Letters A*, **372** (2008) 7077-7080.

[14] D. Raoufi, A. Kiasatpour, H.R. Fallah, A.S.H. Rozatian, Surface characterization and microstructure of ITO thin films at different annealing temperatures, *Applied Surface Science*, **253** (2007) 9085-9090.

[15] J.M. López, M.A. Rodríguez, R. Cuerno, Superroughening versus intrinsic anomalous scaling of surfaces, *Physical Review E*, **56** (1997) 3993-3998.

[16] F. Family, T. Vicsek, Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **18** (1985) L75-L81.

[17] B.B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, (1977).

[18] H. Leschhorn, Interface depinning in a disordered medium: Numerical results, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **195** (1993) 324-335.

[19] H.S. Song, J.M. Kim, Depinning transition of the quenched mullins-herring equation, *Journal of the Korean Physical Society*, **49** (2006) 1520-1523.

نوفه غیرفعال دارای یک رشد غیرمعمول است که ساختار سطح نهایی را دچار تحولاتی خواهد کرد. هدف بعدی ما کاربرد این مدل برای معادله کاردِر-پاریزی-ژانگ است که معادله‌ای غیرخطی و بسیار مهم می‌باشد.

مرجع‌ها

[1] A.-L. Barabási, H.E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth*, Cambridge university press, New York, (1995).

[2] A. Brú, S. Albertos, J.L. García-Asenjo, I. Brú, Pinning of Tumoral Growth by Enhancement of the Immune Response, *Physical Review Letters*, **92** (2004) 238101-4.

[3] M.A. Rubio, C.A. Edwards, A. Dougherty, J.P. Gollub, Self-affine fractal interfaces from immiscible displacement in porous media, *Physical Review Letters*, **63** (1989) 1685-1688.

[4] G. Blatter, M.V. Feigel'Man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, V.M. Vinokur, Vortices in high-temperature superconductors, *Reviews of Modern Physics*, **66** (1994) 1125-1388.

[5] L.A.N. Amaral, A.-L. Barabási, H.A. Makse, H.E. Stanley, Scaling properties of driven interfaces in disordered media, *Physical Review E*, **52** (1995) 4087-4104.

[6] J.M. Kim, H. Choi, Depinning Transition of the Quenched Edwards-Wilkinson Equation, *Journal of the Korean Physical Society*, **48** (2006) S241-S244.

[7] M.-P. Kuittu, M. Haataja, T. Ala-Nissila, Dynamics of driven interfaces in algebraically correlated random media, *Physical Review E*, **59** (1999) 2677-2682.

[8] Z.-F. Huang, B.-L. Gu, Growth equations for the Wolf-Villain and Das Sarma-Tamborenea models of molecular-beam epitaxy, *Physical Review E*, **54** (1996) 5935-5941.

[9] J.M. López, M.A. Rodríguez, Interface dynamics at the depinning transition, *Journal of Physics I*, **7** (1997) 1191-1200.

Investigating the effect of quenched noise in continuous surface growth models

Davood Raoufi*¹, Mahmood Rostami¹, Mohsen Ghasemi Nezhadhighi²

¹Department of Physics, Faculty of Science, Bu Ali Sina University, Hamedan, Iran

² Department of Physics, Faculty of Science, Shiraz University, Shiraz, Iran

Received: 08.10.2015

Final revised: 29.10.2016

Accepted: 27.11.2016

Abstract

The Mullins–Herring equation is an important model in surface growth. This research aimed to explore quenched noise on this model using a new approach. The key point in this model is combination of the external force on the interface and quenched noise on one part with its strength adjusted with an external controllable parameter, g . It is shown that the dynamics of this model for some values of g have critical behavior. Also, our calculations show that, for $g = 1$ and 2 values there is no phase transition. The important feature of criticality is the existence of scaling exponents which in this study were computed numerically. As a result, for $g = 3$ the critical point was obtained (0.6504). At this point, the total roughness exponent and local roughness exponent were obtained (1.410 and 1.011), respectively. The inequality of these two values, that is the total and local roughness exponents, is one of the most important effects of quenched noise in growth models which indicates the variation in structure of the produced surface.

Keywords: Surface growth, Mullins–Herring model, Roughness, Criticality, Quenched noise

*Corresponding Author: d_raoufi@ymail.com