

## مطالعه طیف انرژی زنجیره ایزوتوپی باریم ( $^{124-130}Ba$ ) با استفاده از جبر

### $SU(1,1)$ در ناحیه گذار IBM-1

مسعود صیدی<sup>۱\*</sup>، مهدی امید<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

<sup>۲</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۰۲ ویرایش نهائی: ۱۳۹۵/۰۸/۰۸ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۰/۱۵

#### چکیده

در این مقاله با استفاده از جبر لی  $SU(1,1)$  در هامیلتونی مدل برهم‌کنش بوزونی (IBM-1) طیف انرژی زنجیره ایزوتوپی باریم ( $^{124-130}Ba$ ) محاسبه شده است. ثابت‌های این طیف را از حل معادله بث به کمک روش حداقل مربعات با الگوریتم نیوتون-گاوس و الگوریتم ژنتیک به دست آورده‌ایم. سرانجام نتایج به دست آمده را با طیف‌های تجربی مقایسه کرده و ترازهای مجهول این ایزوتوپ‌ها محاسبه شدند. نتایج نشان داد که الگوریتم ژنتیک دارای انحراف معیار کمتری در مقایسه با الگوریتم نیوتون-گاوس است و همچنین نتایج طیف تئوری با طیف تجربی همخوانی خوبی دارند.

**کلیدواژگان:** مدل برهم‌کنش بوزونی، الگوریتم ژنتیک، زنجیره ایزوتوپی باریم

می‌توان بر اساس جملاتی از عملگرهای کازیمیر مرتبه اول و دوم زیر جبرهای  $U(2l+2)$  و به صورت زیر نوشت [۳]:

$$\hat{H} = A_1 \hat{C}_1(U(2l+2)) + A_2 \hat{C}_2(U(2l+1)) + A_3 \hat{C}_2(O(2l+2)) + B \hat{C}_2(O(2l+1)) + C \hat{C}_2(O(3)) \quad 1$$

در رابطه ۱ تقلیل جبر  $U(2l+2)$  به  $O(3)$  با یکی از زنجیره‌های جبری زیر انجام می‌شود:

$$U(2l+2) \supset \left\{ \begin{matrix} U(2l+1) \\ O(2l+2) \end{matrix} \right\} \supset O(2l+1) \supset O(3) \quad 2$$

در اینجا هامیلتونی IBM حسب دو حد تقارنی  $U(2l+1)$  و  $O(2l+2)$  قطری می‌شود. اگر همه ضرایب ثابت هامیلتونی صفر باشند سیستم در ناحیه گذار  $O(2l+2) \leftrightarrow U(2l+1)$  قرار دارد [۳]. با این حال هامیلتونی ۱ را می‌توان به کمک مولدهای جبر لی

#### مقدمه

در هسته‌های مختلف انرژی ترازهای نوکلئونی و آهنگ گذارهای الکترومغناطیسی ناشی از اثرات جمعی هسته‌ها می‌باشند، لذا در اثر تغییر تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها در هسته‌ها گذار فاز شکلی<sup>۱</sup> اتفاق می‌افتد [۱]. مدل برهم‌کنش بوزونی<sup>۲</sup> (IBM) به خوبی می‌تواند بسیاری از خواص جمعی حالات کم انرژی هسته‌های سنگین و متوسط را در فضای تقارنی  $U(6)$  توصیف کند [۱،۲]. به طور کلی بزرگترین گروه تقارنی تولید شده به کمک عملگرهای  $s$  و  $l$  بوزون (  $l = p, d, f, \dots$  ) می‌باشد. اگر تنها برهم‌کنش‌های یک و دو بوزونی در نظر گرفته شود و تکانه زاویه‌ای  $-sl$  بوزون پایسته باشد، هامیلتونی را

\* نویسنده مسئول: masoudseidi@yahoo.com

1. Shape Phase Transition

2. Interacting Boson Model

جبر لی  $SU(1,1)$  یک نوسانگر کوآنتومی، مدلی برای توصیف دینامیک نوسانگر هماهنگ است [۸]. از این جبر برای به دست آوردن طیف مشاهده پذیرهای مختلف مانند آهنگ گذارهای الکترومغناطیسی، طیف انرژی هسته‌های در ناحیه گذار و غیره استفاده می‌شود. مولدهای جبر  $SU(1,1)$  عبارتند از [۳،۵]:

$$\begin{aligned} S_n^\pm &= c_s^{2n+1} S^\pm(s) + c_d^{2n+1} S^\pm(d) \\ S_n^0 &= c_s^{2n} S^0(s) + c_d^{2n} S^0(d) \end{aligned} \quad ۳$$

که در آن  $c_s, c_d \in \mathbb{R}$  و  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . این عملگرها در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند:

$$[S_m^0, S_n^\pm] = \pm S_{m+n}^\pm, [S_m^+, S_n^-] = -2S_{m+n}^0 \quad ۴$$

همایلتونی IBM-1 با استفاده از جبر لی  $SU(1,1)$  در ناحیه گذار  $U(5) \leftrightarrow SO(6)$  به صورت زیر است [۳،۵]:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= g S_0^+ S_0^- + \varepsilon S_1^0 \\ &+ \gamma \hat{C}_2(SO(5)) + \delta \hat{C}_2(SO(3)) \end{aligned} \quad ۵$$

در رابطه ۵ ثابت‌های  $g, \varepsilon, \gamma$  و  $\delta$  پارامترهای حقیقی و  $\hat{C}_2(SO(3))$  و  $\hat{C}_2(SO(5))$  عملگرهای کازیمیر این گروه‌ها می‌باشند. می‌توان ثابت کرد برای  $c_s = c_d$  همایلتونی رابطه ۵ هم‌ارز با همایلتونی  $SO(6)$  می‌باشد. همچنین به‌ازای  $c_s = 0$  و  $c_d \neq 0$  این رابطه هم‌ارز با همایلتونی  $U(5)$  است. بنابراین وقتی که  $c_s \neq c_d \neq 0$  باشد، همایلتونی مربوط به ناحیه گذار  $U(5) \leftrightarrow SO(6)$  خواهد بود [۱،۳،۵]. در محاسبات حاضر  $c_d = 1$  و  $0 \leq c_s \leq 1$  در نظر گرفته شده که  $C_s$  پارامتر کنترل می‌باشد و مقدار آن بیانگر گذار بین این دو حد می‌باشد. برای به دست آوردن ویژه‌حالات همایلتونی ۵، با استفاده از بسط لوران-فوریه، ویژه‌حالات و مولدها به صورت جملاتی از

$SU(1,1)$  قطری کرد [۴]. همایلتونی IBM متشکل از عملگرهای  $d$  و  $s$  می‌باشد که یک فضای برداری شش بعدی را ایجاد می‌کند لذا تقارن‌های حاکم، به کمک جبر  $U(6)$  توصیف می‌شوند [۵]. همایلتونی IBM دارای سه جواب تحلیلی دقیق با عنوان حدهای تقارنی دینامیکی می‌باشد که عبارتند از:  $U(5)$ ،  $SU(3)$  و  $SO(6)$ . این حدها به لحاظ هندسی به ترتیب قابل قیاس با هسته‌های کروی شکل، تغییر شکل یافته محوری و چرخنده  $\gamma$ -ناپایدار<sup>۱</sup> می‌باشند [۶-۴]. در هر کدام از این حدها می‌توان به کمک نظریه نمایش‌های گروهی، طیف انرژی را به دست آورد. گذار فاز کوآنتومی  $SO(6) \leftrightarrow U(5)$  تغییرات شکلی هسته‌ها را از حالت کروی به حالت چرخنده  $\gamma$ -ناپایدار را توصیف می‌کند [۷]. در این مقاله برای توصیف هسته‌های در ناحیه گذار  $U(5) \leftrightarrow O(6)$  از معادله بث<sup>۲</sup> درون چارچوب جبر لی  $SU(1,1)$  برای قطری کردن همایلتونی IBM-1 استفاده شده است [۴]. طیف انرژی به دست آمده در این مدل برای زنجیره ایزوتوپی  $^{124-130}Ba$  بررسی شده، سپس ضرایب ثابت طیف انرژی را با استفاده از الگوریتم‌های نیوتن-گاوس و الگوریتم ژنتیک محاسبه و نتایج به دست آمده در این دو الگوریتم مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند. با توجه به زیاد بودن تعداد پارامترهای این تابع و زمان‌بر بودن محاسبه برآوردها در مینیمم کردن تابع مقدار توان‌های درجه دوم خطا و تأثیر گذاری دقت مقادیر به دست آمده در بهبود ساختار مدل IBM-1 از الگوریتم ژنتیک دودویی استفاده شده است

## همایلتونی و طیف انرژی IBM-1 با استفاده

از جبر لی  $SU(1,1)$

<sup>2</sup>. Bethe Equation

<sup>1</sup>.  $\gamma$ -unstable Rotor

تعیین ریشه‌های معادله بث در رابطه ۱۲ با مقادیر معین  $\epsilon, c, v_s$  و  $v$  برای  $k$  های بزرگ تنها به صورت عددی میسر است. در ادامه می‌توان ثابت‌های معادله ۹ را با استفاده از برچسب‌های کوانتومی مناسب و مقادیر تجربی انرژی محاسبه کرد. این کار با روش حداقل مربعات امکان پذیر می‌باشد. انحراف معیار استاندارد در برآورد طیف تجربی نسبت به طیف تئوری به کمک رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma = \left( \frac{1}{N_{tot}} \sum_{i, tot} |E_{exp}(i) - E_{cal}(i)|^2 \right)^{1/2} \quad ۱۳$$

که در آن  $N_{tot}$  تعداد کل ترازهای انرژی مورد بررسی می‌باشد.

### الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک توسط هولند [۹] معرفی شد. هاپت و هاپت [۱۰] کاربرد الگوریتم‌های ژنتیک و به طور مشخص الگوریتم ژنتیک دودویی را در مسائل بهینه سازی مورد بررسی قرار دادند. دو ویژگی همبرگی<sup>۱</sup> اعداد و جهش ژنتیکی<sup>۲</sup> از ویژگی‌های قدرت این الگوریتم برای اجتناب از مقادیر اکسترمم نسبی است. قدرت الگوریتم ژنتیک در بهینه‌سازی توابع مختلف باعث کاربرد روزافزون این الگوریتم در شاخه‌های علمی مختلف شد که از جمله آن‌ها می‌توان به کوزا [۱۱] در مسائل پیشرفته مهندسی، مینایی بیدگلی و پانچ [۱۲] در داده کاوی، مرزوکوی و همکاران [۱۳] در بهینه‌سازی مجموعه‌های فازی و امیدی و محمدزاده [۱۴] در بهینه‌سازی توابع پیچیده زمین آماری اشاره نمود. مراحل اجرای الگوریتم ژنتیک در قالب گام‌های زیر قابل انجام است.

پارامترهای حقیقی  $c$  و  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) نوشته می‌شوند:

$$|k; v_s, v_n, \Delta, LM\rangle = NS_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle \quad ۶$$

در رابطه ۶،  $N$  فاکتور بهنجارش می‌باشد و  $S_{x_i}^+$  عبارت است از:

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1 - c_s^2 x_i} S^+(s) + \frac{c_d}{1 - c_d^2 x_i} S^+(d) \quad ۷$$

پارامترهای  $c$  و  $x_i$  به وسیله مجموعه معادلات بث تعیین می‌شوند. شکل کلی این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\epsilon}{x_i} = \frac{gc_s^2(v_s + \frac{1}{2})}{1 - c_s^2 x_i} + \frac{gc_d^2(v + \frac{5}{2})}{1 - c_d^2 x_i} \quad ۸$$

$$- \sum_{i \neq j} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad i=1, 2, \dots, k$$

طیف انرژی هامیلتونی IBM-1 (۵) یعنی  $E^{(k)}$  به صورت زیر است:

$$E^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{x_i} + \gamma v(v+3) + \delta L(L+1) \quad ۹$$

$$+ \epsilon \frac{1}{2} [c_s^2(v_s + \frac{1}{2}) + c_d^2(v + \frac{5}{2})]$$

در رابطه ۹ عدد کوانتومی  $k$  وابسته به تعداد کل بوزون‌ها ( $N$ ) است تعداد کل بوزون‌ها در چارچوب IBM-1 از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$N = 2k + v_s + v \quad ۱۰$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{g} (g=1 \text{ kev}), \quad c = \frac{c_s}{c_d} \leq 1, \quad y_i = c_d^2 x_i \quad ۱۱$$

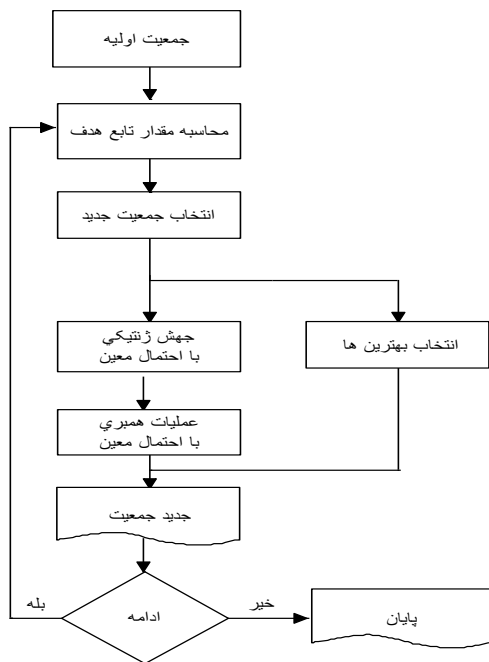
معادله بث به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\epsilon}{y_i} = \frac{c^2(v_s + \frac{1}{2})}{1 - c^2 y_i} + \frac{(v + \frac{5}{2})}{1 - y_i} \quad ۱۲$$

$$- \sum_{i \neq j} \frac{2}{y_i - y_j}, \quad i=1, 2, \dots, k$$

<sup>2</sup> Mutation

<sup>1</sup> Cross Over



شکل ۱. فلوچارت الگوریتم ژنتیک

## نتایج

در این مقاله انرژی ۱۲ تراز برانگیخته شامل  $0_1^+$  تا  $0_4^+$ ,  $2_1^+$  تا  $2_4^+$ ,  $3_1^+$ ,  $4_1^+$  و  $4_2^+$  به عنوان نمونه مورد بررسی قرار گرفت. جدول ۱ حاوی مقادیر تجربی انرژی این ۱۲ تراز برای ایزوتوپهای باریوم ( $Ba^{124-130}$ ) است، که از منابع [۱۵-۱۸] جمع آوری شده‌اند. این مقادیر تجربی جدیدترین داده‌های تجربی انرژی را تشکیل می‌دهند و همان‌طور جدول ۱ نشان می‌دهد مقادیر انرژی مربوط به برخی از ترازها مجهول است.

جدول ۱. مقادیر تجربی انرژی ترازهای ایزوتوپهای مربوطه [۱۵-۱۸].

Experimental Energy (Kev)				
Level	$^{124}Ba$	$^{126}Ba$	$^{128}Ba$	$^{130}Ba$
$0_1^+$	0	0	0	0
$0_2^+$	898	983.4	284	1179
$2_1^+$	229.9	256.0	942.2	888.9
$2_2^+$	873.2	873.6	884.5	908.2
$4_1^+$	651.7	817.1	763.3	901.8

گام ۱: انتخاب جمعیت اولیه به صورت تصادفی و تبدیل اعداد به فرم دودویی و محاسبه مقادیر تابع هدف و مرتب کردن مقادیر به ترتیب صعودی.

گام ۲: از کل جمعیت مرحله یک، ۲ درصد از بهترین مقادیر، ۸ درصد تصادفی همانند گام ۱ و ۹۰ درصد مابقی وارد برنامه الگوریتم ژنتیک شوند.

گام ۳: ۹۰ درصد داده‌های گام ۲ به عنوان والد وارد استخر جفت‌یابی می‌شوند، در این مرحله، بر اساس دو مکانیسم زیر ۹۰ درصد از والدین ترکیب شده و تشکیل ۹۰ درصد نسل جدید از کل نمونه اولیه را می‌دهند.

الف) انجام عملیات همبندی با احتمال ۸۵ درصد بر روی هر جفت عدد انتخاب شده.

ب) انجام عمل جهش ژنتیکی با احتمال ۰/۱ درصد.

گام ۴: ۹۰ درصد داده‌های تولید شده در گام ۳ به همراه جمعیت تشکیل شده در گام ۲ جمعیت صد در صدی را تشکیل داده و جایگزین جمعیت اولیه می‌شوند.

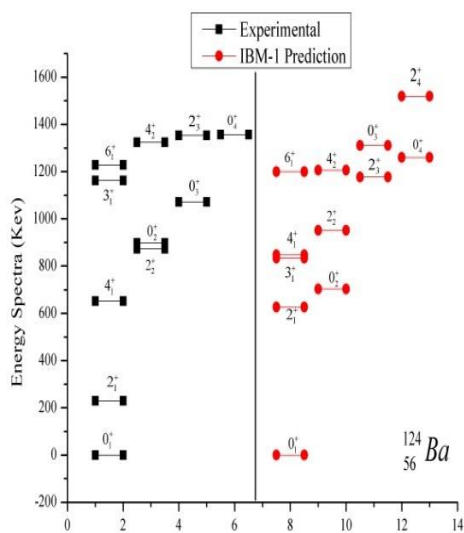
گام ۵: برگشت به گام ۱.

برای اطمینان از دقت الگوریتم ژنتیک در یافتن جواب‌های بهینه از نمودار همگرایی کمترین مقادیر انحراف معیارها استفاده می‌شود، که در آن تعداد نسل‌ها به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که این کمترین مقادیرها از نسلی خاص به بعد برابر بوده که بیانگر همگرایی پاسخ‌ها است. شکل ۱ فلوچارت گام‌های اجرای الگوریتم ژنتیک را نشان می‌دهد.

$6_1^+$	1277.4	1199.6	1255.9	1348.4
$0_4^+$	1298.5	1259.8	1097.4	1414
$2_4^+$	1544.0	1519.2	1641.3	1641.2
$0_1^+$	0	0	0	0
$0_2^+$	639.1	645.02	893.0	1348.1
$2_1^+$	726.1	655.6	1575.3	1503.9
$2_2^+$	1148.2	1157.6	1603.7	1686.1
$4_1^+$	944.9	936.1	756.9	696.8
$0_3^+$	1654.6	1697.3	1242.2	1176.2
$2_3^+$	1251.3	1224.2	1466.7	1452.9
$3_1^+$	1264.3	1210.3	1967.7	1554.6
$4_2^+$	1486.6	1353.7	1118.9	848.8
$6_1^+$	1393.0	1334.8	1551.3	1251
$0_4^+$	1299.5	1727	1065.1	1600
$2_4^+$	1724.7	1302.4	1560.1	1708

$0_3^+$	1071.3	-	1710.1	-
$2_3^+$	1353.3	1236.2	1324.4	1557.6
$3_1^+$	1162.5	1345.4	1321.1	1361.1
$4_2^+$	1324.8	1332.4	1372.3	1477.6
$6_1^+$	1228.4	1296	1406.9	1592.8
$0_4^+$	1356.9	-	-	-
$2_4^+$	-	1717.6	-	1883

شکل‌های ۱ تا ۴ طیف انرژی ایزوتوپ‌های باریم را نشان می‌دهند. با توجه به شکل‌های ۱ تا ۴ نتایج حاصل از مدل IBM-1 با استفاده از جبر  $SU(1,1)$  با نتایج تجربی همخوانی خوبی دارد. به علاوه انرژی ترازهای مجهول در هر مورد پیش‌بینی شده است. مقادیر انرژی ترازهای مجهول با استفاده از روش حداقل مربعات و به‌کارگیری الگوریتم نیوتون گاوس (NGA) و الگوریتم ژنتیک (GA) در جدول ۲ آمده است.

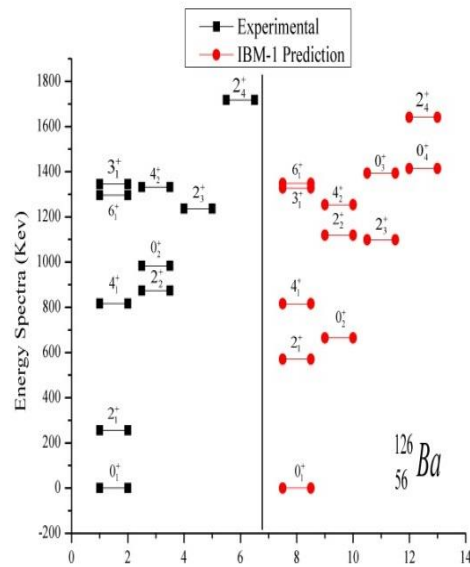
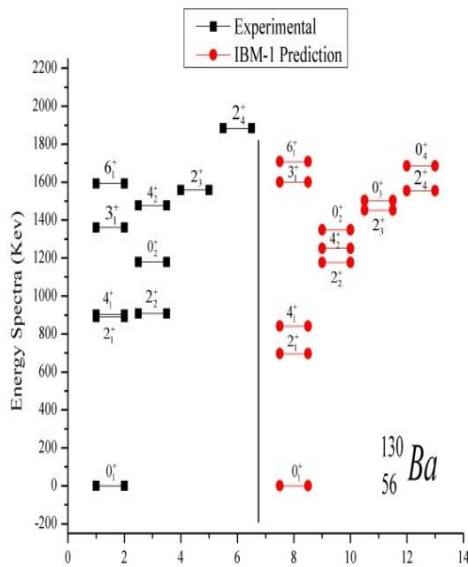


شکل ۱. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف انرژی مدل IBM-1 با استفاده از جبر  $SU(1,1)$  برای  $^{124}Ba$ .

در شکل ۲ مقادیر مربوط به پیش‌بینی مقادیر انرژی آمده‌است که به صورت پررنگ نمایش داده شده‌اند.

جدول ۲. مقادیر تئوری انرژی ترازهای ایزوتوپ‌های مربوطه با استفاده از NGA و GA

Level	GA	NGA	GA	NGA
	$^{124}_{56}Ba$	$^{124}_{56}Ba$	$^{126}_{56}Ba$	$^{126}_{56}Ba$
$0_1^+$	0	0	0	0
$0_2^+$	723.3	703.6	638.8	665.0
$2_1^+$	654.5	626.5	500.2	570.6
$2_2^+$	1018.4	950.9	1080.2	1118.9
$4_1^+$	905.9	847.0	988.8	816.2
$0_3^+$	1329.1	1310.4	1444.5	1393.5
$2_3^+$	1223.0	1177.2	1303.8	1099.2
$3_1^+$	907.4	833.8	1304.2	1327.7
$4_2^+$	1289.3	1205.9	1411.8	1253.5



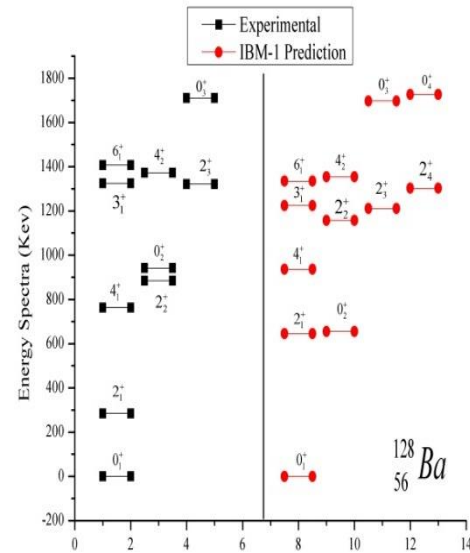
شکل ۴. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف انرژی مدل IBM-1 با استفاده از جبر  $SU(1,1)$  برای  $^{130}Ba$ .

شکل ۲. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف انرژی مدل IBM-1 با استفاده از جبر  $SU(1,1)$  برای  $^{126}Ba$ .

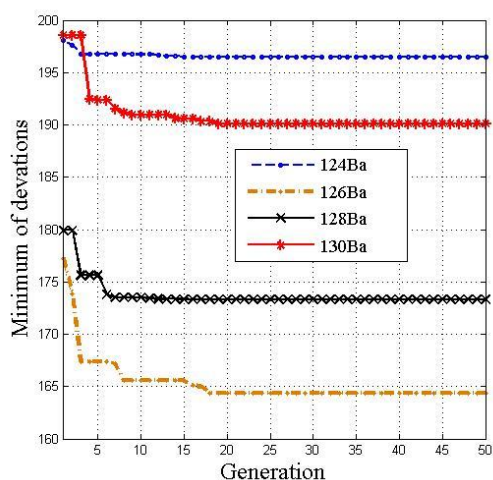
انحراف معیار استاندارد یکی از مهم ترین شاخص های انحراف از مقدار واقعی یک پارامتر می باشد. در محاسبات تئوریک صرفاً مدل حائز اهمیت نیست بلکه در مواردی روش محاسبه ضرایب ثابت طیف نیز حائز اهمیت می باشد. بنابراین ما در اینجا برای اثبات این موضوع، ضرایب ثابت طیف انرژی در رابطه ۹ را به کمک روش حداقل مربعات یا GA و NGA محاسبه کرده ایم.

جدول ۳. ثابت های طیف انرژی و انحراف معیار ایزوتوپ ها.

Algorithm	Isotopes	N	$\gamma$	$\delta$
NGA	$^{124}_{56}Ba$	10	-10.01	12.19
GA	$^{124}_{56}Ba$	10	-10.31	12.24
NGA	$^{126}_{56}Ba$	9	21.97	-3.37
GA	$^{126}_{56}Ba$	9	15.34	9.88
NGA	$^{128}_{56}Ba$	8	21.98	3.68
GA	$^{128}_{56}Ba$	8	10.02	6.00
NGA	$^{130}_{56}Ba$	7	-17.82	3.58
GA	$^{130}_{56}Ba$	7	-10.24	16.50



شکل ۳. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف انرژی مدل IBM-1 با استفاده از جبر  $SU(1,1)$  برای  $^{128}Ba$ .



شکل ۵. نمودار همگرایی مقادیر انحرافات برای هر نسل.

نتایج مربوط به انحرافات به تفکیک روش‌های انجام شده در جدول ۳ خلاصه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود انحراف معیار استاندارد حاصل از الگوریتم ژنتیک کمتر از الگوریتم مرسوم نیوتون-گاوس می‌باشد. شکل ۵ مقایسه انحراف معیار استاندارد حاصل از الگوریتم ژنتیک و الگوریتم مرسوم نیوتون-گاوس را نشان می‌دهد که حاکی از عملکرد بهتر الگوریتم ژنتیک نسبت به الگوریتم نیوتون-گاوس است. بنابراین پیشنهاد می‌شود از الگوریتم ژنتیک برای محاسبه ضرایب طیف انرژی حاصل از مدل IBM-1 استفاده شود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله طیف‌های انرژی مربوط به ایزوتوپ‌های  $^{124-130}\text{Ba}$  به کمک جبر  $SU(1,1)$  در ناحیه گذار هامیلتونی مدل IBM-1 محاسبه شدند. برای این منظور ۱۲ تراز تجربی مربوط به حالات کم انرژی این هسته‌ها مورد بررسی قرار گرفت. از بین این تعداد تراز در هر ایزوتوپ تعدادی تراز وجود داشت که مقادیر تجربی آنها اندازگیری نشده بودند، با این حال به کمک مدل IBM-1 انرژی‌های تمام این ترازها محاسبه

NGA	$^{124}_{56}\text{Ba}$	0.48	284.8	197.5
GA	$^{124}_{56}\text{Ba}$	0.42	294.5	196.5
NGA	$^{126}_{56}\text{Ba}$	0.60	251.3	171.6
GA	$^{126}_{56}\text{Ba}$	0.64	238.3	164.5
NGA	$^{128}_{56}\text{Ba}$	0.41	268.9	185.1
GA	$^{128}_{56}\text{Ba}$	0.50	297.9	173.3
NGA	$^{130}_{56}\text{Ba}$	0.38	391.6	195.1
GA	$^{130}_{56}\text{Ba}$	0.36	367.3	190.7

نتایج شبیه‌سازی اولیه در مینیمم کردن تابع حداقل مربعات نشان داد محاسبه ضرایب ثابت طیف به‌راحتی با در نظر گرفتن جمعیت اولیه ۱۰۰ هسته از هر ضریب و در ۲۰ نسل قابل محاسبه است. با توجه به تصادفی بودن انتخاب جمعیت اولیه در الگوریتم ژنتیک و تأثیر گذاشتن این انتخاب‌ها در روند یافتن نقاط اکسترمم مطلق و برای اطمینان از صحت و دقت الگوریتم و کنترل اثرات انتخاب‌های تصادفی در محاسبه ضرایب ثابت در هر کدام از ایزوتوپ‌ها ۵۰ نسل در نظر گرفته شد که در آن مقدار ثابت‌ها طوری در نظر گرفته شد که کمترین مقدار انحرافات در تکرارهای مختلف همگرا شوند. شکل ۵ نمودار همگرایی را به تفکیک ایزوتوپ‌ها نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در همه ایزوتوپ‌ها حداکثر قبل از ۲۰ نسل که حدوداً در ۱۰ ثانیه اجرا می‌شود نمودارها تقریباً همگرا شده، که این حاکی از رسیدن الگوریتم به مقدار مینیمم تابع حداقل مربعات است. مقادیر محاسبه ثابت‌ها به تفکیک الگوریتم‌های NGA و GA در جدول ۳ خلاصه شده‌اند.

[6] J.M. Arias, E2 transitions and quadrupole moments in the E(5) symmetry, *Physical Review C* **63** (2001) 034308-5.

[7] M.W. Kirson, Comment on Searching for E(5) behavior in nuclei, *Physical Review C* **70** (2004) 049801-2.

[8] E.I. Jaforov, N.I. Stoilova, J.V.D. Jeugt, Deformed su(1,1) Algebra as a Model for Quantum Oscillators, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **8** (2012) 025-040.

[9] H.J. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, Ann Arbor: The University of Michigan Press (1975).

[10] R.L. Haupt, S.E. Haupt, *Practical Genetic Algorithms*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York (2004).

[11] J.R. Koza, *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*, MIT Press (1992).

[12] B. Minaei-Bidgoli, F.W. Punch, *GECCO 2003 Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Springer-Verlag (2003) 2252-2263.

[13] K. Marzuki, M.F. Ibrahim, R. Yusof and R.Z. Abdul Rahman, Optimization of fuzzy model using genetic algorithm for process control application, *Journal of the Franklin Institute* **348** (2011) 1717-1737.

[14] M. Omid, M. Mohammadzadeh, A new method to build spatio-temporal covariance functions: analysis of ozone data, *Statistical Papers* **57** (2016) 689-703.

[15] J. Katakura, Z.D. Wu, Nuclear Data Sheets for A = 124, *Nuclear Data Sheets* **109** (2008) 1655-1877.

[16] J. Katakura, K. Kiato, Nuclear Data Sheets for A = 126, *Nuclear Data Sheets* **97** (2002) 765-926.

[17] M. Kanbe, K. Kiato, Nuclear Data Sheets for A=128, *Nuclear Data Sheets* **94** (2001) 227-396.

شدند. ثابت‌های این طیف‌ها به‌کمک روش حداقل مربعات با الگوریتم‌های گاوس جردن و ژنتیک محاسبه شدند. نتایج نشان داد که الگوریتم ژنتیک دقیق‌تر از الگوریتم گاوس جردن می‌باشد. همخوانی طیف تجربی و تئوری با هر دو الگوریتم حاکی از پیش‌بینی خوب این مدل می‌باشد. علی‌رغم همخوانی نتایج این مدل با نتایج تجربی ولی در مواردی اختلاف زیاد است و دلیل این اختلاف مربوط به ماهیت مدل می‌باشد. در مدل IBM-1 هیچ تفاوتی بین بوزون پرتونی و نوترونی قائل نشدیم و این منشاء اختلاف می‌باشد. البته در مدل IBM-2 این ایراد حل شده است.

#### مرجع‌ها

[1] H. Sabri, A theoretical study of energy spectra and two-neutron separation energies of 106–122Cd isotopes in the transitional region of IBM, *The European Physical Journal Plus* **7** (2014) 129-138.

[2] F. Iachello, A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

[3] F. Pan, J.P. Draayer, Algebraic solutions of an *sl*-boson system in the  $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$  transitional region, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** (2002) 7173-7185.

[4] E. Santapointo, R. Bijker, F. Iachello, Transformation brackets between  $U(v+1) \supset U(v) \supset SO(v)$  and  $U(v+1) \supset SO(v+1) \supset SO(v)$  *Journal of Mathematical Physics* **37** (1996) 2674-2681.

[5] F. Pan, J.P. Draayer, New algebraic solutions for SO(6)-U(5) transitional nuclei in the interacting boson model, *Nuclear Physics A* **636** (1998) 156-168.



[18] B. Singh, Nuclear Data Sheets for  $A=130$ , *Nuclear Data Sheets* **93** (2001) 33-242.

# Studying energy spectrum of chain Barium isotopes ( $^{124-130}\text{Ba}$ ) using $SU(1,1)$ algebra in the transitional region of IBM-1

Masoud Seidi<sup>\*1</sup>, Mehdi Omid<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran

Received: 23.12.2015    Final revised: 29.10.2016    Accepted: 04.01.2017

## Abstract

In this study, using a  $SU(1,1)$  Lie algebra in the Hamiltonian of Interacting Boson Model (IBM-1), we have calculated the energy spectrum of chain Barium isotopes ( $^{124-130}\text{Ba}$ ). We have obtained the constants of this spectrum by solving the Bethe equation using the Least Squares method with the Newton-Gauss and Genetic algorithms. Finally, we have compared the results of experimental spectra with theoretical spectra and undefined levels of these isotopes were calculated. The results showed that the genetic algorithm has a lower standard deviation compared with the Newton-Gauss algorithm, and also the results of experimental spectra are in good agreement with the theoretical spectra.

**Keywords:** Interacting Boson Model, Genetic algorithms, Chain Barium isotopes

---

\* Corresponding Author: masoudseidi@yahoo.com