

## شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی در ماده هسته‌ای بر اساس تقریب توماس-فرمی

مهدی غضنفری مجرد\*، مهدخت مینائی بیدگلی

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، کدپستی: ۸۷۳۱۷-۵۱۱۶۷

دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۰۳ ویرایش نهایی: ۱۳۹۵/۰۶/۲۶ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۷/۱۴

### چکیده

با استفاده از تقریب نیمه کلاسیکی توماس-فرمی در چهارچوب یک مدل پدیده شناسی میدان-میانگین، شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی در ماده هسته‌ای به‌ازای دماها و چگالی‌های مختلف به‌دست می‌آید. در دماهای متناهی این شکل صریح بر اساس یک مدل آماری تعمیم‌یافته که مبتنی بر نظریه پدیده شناسی لاندائو است، برحسب کمیت جدیدی تحت عنوان جرم مؤثر تعمیم یافته با تابعیتی برحسب دما، چگالی و پارامتر عدم تقارن، تعیین می‌شود. با مطرح کردن شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی، مدلی جدید برای تعیین معادله حالت ماده هسته‌ای در دماها و چگالی‌های مختلف ارائه می‌شود که رفتار آن در توافق با دیگر مدل‌های مطرح نظری در این زمینه است.

**کلیدواژگان:** تقریب توماس-فرمی، ماده هسته‌ای، نظریه پدیده شناسی لاندائو، جرم مؤثر تعمیم‌یافته، پتانسیل شیمیایی نوکلئونی، معادله حالت

شکل‌گیری ستارگان نوترونی دارد [۷-۱]. ساده‌ترین ساختار برای سیستم ماده هسته‌ای را می‌توان به‌صورت یک سیستم فرضی ایده‌آل آن هم در حد ترمودینامیکی از نوکلئون‌هایی دانست که در مرکز هسته‌های سنگین در حالت اشباع در کنار هم قرار می‌گیرند [۸،۹]. در ماده هسته‌ای به‌دلیل برهم‌کنش قوی بین نوکلئون‌ها، به سادگی می‌توان از نیروی کولنی بین پروتون‌ها صرف نظر کرد. پارامتر عدم تقارن و چگالی کل دو پارامتر مهم در ماده هسته‌ای هستند که به‌صورت زیر معرفی می‌گردند:

۱

$$\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}, \quad \rho = \rho_n + \rho_p$$

### مقدمه

سیستم ماده هسته‌ای<sup>۱</sup> یکی از سیستم‌های بس‌ذره‌ای مطرح است که به‌دلیل تعدد برهم‌کنش بین ذرات و بالا بودن چگالی از ساختار پیچیده‌ای برخوردار است. خواص ترمودینامیکی ماده هسته‌ای یکی از مسائل داغ و چالش برانگیزی است که در طی چند دهه اخیر در حیطه اختر فیزیک هسته‌ای، آنجا که ماده در شرایط بالای حدی از حیث چگالی و دما می‌تواند قرار گیرد، مطرح می‌شود. هدف از این بررسی‌ها پیدا کردن معادله حالت یا همان ارتباط میان کمیت‌های ترمودینامیکی است که نقش به‌سزایی در بررسی و تحلیل پدیده‌هایی نظیر برخورد یون‌های سنگین، انفجار ابرنواخترها و

\*نویسنده مسئول: ghazanfari@kashanu.ac.ir

<sup>1</sup>nuclear matter

فضای فاز را اشغال می‌کنند. در یک تقریب خوب برای حالت پایه، تابع توزیع ذرات در فضای فاز توسط تابع پله‌ای  $\theta(p_{Fi} - p)$  توصیف می‌شود که نشان دهنده پر شدن نوکلئون نام تا یک سطح فرمی معین  $p_{Fi}$  است. بر این اساس برای کمیت انرژی به‌ازای هر ذره در حالت پایه داریم [۲۴،۲۷،۳۱،۳۳،۳۴]:

۲

$$\varepsilon = \frac{v}{\rho h^3} \sum_{i=n,p} \int d^3p \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V_{in}(p) \right] \times \theta(p_{Fi} - p)$$

ضریب  $\frac{1}{2}$  در رابطه ۲ برای جلوگیری از دو بار شمارش برهم‌کنش هسته‌ای بین ذرات وارد می‌شود. در اینجا  $V_{12}$  پتانسیل برهم‌کنش دو جسمی موسوم به پتانسیل مایرز و شواتکی است [۳۱،۳۴]:

$$V_{12} = -\frac{2T_b}{\rho_0} g \left( \frac{r_{12}}{a} \right) \left\{ \frac{1}{2} (1 \mp \xi) \alpha - \frac{1}{2} (1 \mp \zeta) \left[ \beta \left( \frac{p_{12}}{p_b} \right)^2 - \gamma \frac{p_b}{|p_{12}|} + \sigma \left( \frac{2\bar{p}}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \right\} \quad ۳$$

که در آن

$$g \left( \frac{r_{12}}{a} \right) = \frac{1}{4\pi a^3} \frac{e^{-\frac{r_{12}}{a}} - \frac{r_{12}}{a}}{-\frac{r_{12}}{a}} \quad ۴$$

$$p_b = \hbar \left( \frac{3}{2} \pi^2 \rho_0 \right)^{\frac{1}{3}} \quad ۵$$

$$T_b = \frac{p_b^2}{2m} \quad ۶$$

و

$$\rho_0 = \left( \frac{4}{3} \pi r_0^3 \right)^{-1}, \quad r_0 = 1/14 \text{ fm} \quad ۷$$

در رابطه ۳،  $T_b$  انرژی جنبشی در نقطه اشباع و  $p_b$  تکانه فرمی در این نقطه است. برای تمایز برهم‌کنش مؤثر میان جفت ذرات مشابه و نامشابه دو عامل  $\frac{1}{2}(1 \mp \zeta)$  و  $\frac{1}{2}(1 \mp \xi)$  وارد شده است. علامت منفی به برهم‌کنش میان دو ذره مشابه و علامت مثبت به برهم‌کنش میان دو ذره نامشابه اشاره دارد. پارامتر جاذبه  $\alpha$  در تعیین خواص قیدی سیستم نقش دارد. پارامتر  $\beta$  نقش دافعه‌ای برای رسیدن به نقطه اشباع ماده هسته‌ای را دارد. پارامترهای جاذبه‌ای  $\gamma$  و دافعه‌ای  $\sigma$

$\rho_p$  چگالی پروتون و  $\rho_n$  چگالی نوترون است. به‌ازای  $\delta = 0$  ماده هسته‌ای متقارن،  $0 < \delta < 1$  ماده هسته‌ای نامتقارن و  $\delta = 1$  ماده نوترونی داریم. مدل‌های متعددی برای تعیین معادله حالت ارائه گردیده است که با بهره‌گیری از روش‌های نسبیتی و یا غیر نسبیتی به دو دسته میکروسکوپی [۲۳-۱۰] و پدیده شناسی [۴۳،۲۴] تقسیم می‌شوند. در این میان پتانسیل شیمیایی نوکلئونی که ارتباط تنگاتنگی با انرژی آزاد هلمهولتز سیستم دارد، در تعیین معادله حالت سیستم نقشی کلیدی ایفا می‌کند. در این تحقیق براساس یک مدل آماری تعمیم‌یافته در چهارچوب تقریب نیمه کلاسیکی توماس-فرمی که به‌عنوان یک مدل پدیده شناسی کار آمدی خود را در توصیف خواص ترمودینامیکی ماده هسته‌ای به‌خوبی نشان داده است [۳۴]، به‌شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی در دماها و چگالی‌های مختلف دست پیدا می‌کنیم. اهمیت دستیابی به این شکل صریح، دستیابی به معادله حالتی پیشرفته با قابلیت تعمیم یافتگی برای ساختارهای پیچیده باریونی در دماها و چگالی‌های مختلف است. در بخش دوم این مقاله به ارائه مدل جدید در تعیین شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی می‌پردازیم. در بخش سوم نتایج حاصل از این مدل به‌منظور دستیابی به شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی و بررسی نقش آن در تعیین معادله حالت مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و در نهایت بخش چهارم به جمع بندی و نتیجه‌گیری در مورد دستاوردهای حاصل از این تحقیق اختصاص می‌یابد.

## فرمولبندی

در ابتدا به ارائه مدل برای ماده هسته‌ای در حالت پایه و یا به اصطلاح در دمای صفر می‌پردازیم و سپس آن را به دماهای متناهی تعمیم می‌دهیم. با رعایت اصل طرد پائولی، نوکلئون‌ها حالت‌های مختلف تک ذره در

حال به تعیین کمیت انرژی نهان بر نوکلئون در دماهای متناهی می‌پردازیم. با افزایش دما حالت‌های خارج از سطح فرمی بیش از پیش توسط ذرات اشغال می‌شوند. از این رو تابع توزیع فرمی-دیراک جایگزین تابع توزیع پله‌ای در دمای صفر برای نوکلئون نام می‌گردد [۲۸،۳۳،۳۴]:

۱۲

$$f_i(p) = \frac{1}{1 + \exp[\beta(\varepsilon_i(p) - \mu_i)]}$$

$\varepsilon_i(p)$  انرژی مؤثر تک‌ذره‌ای است که به صورت زیر در فضای فاز مطرح می‌شود:

۱۳

$$\varepsilon_i(p) = \frac{p^2}{2B_i} + V_i(p)$$

جمله اول در  $\varepsilon_i(p)$  انرژی جنبشی با جرم مؤثر  $B_i$  و جمله دوم پتانسیل مؤثر تک ذره‌ای  $V_i(p)$  است.  $\mu_i$  در رابطه ۱۲ ضریب نامعین لاگرانژی است که یک پارامتر قابل تنظیم در دمای  $T = \frac{1}{\beta}$  و چگالی  $\rho_i$  محسوب می‌شود.  $V_i(p)$  از طریق قانون دوم ترمودینامیک به دست می‌آید. اعمال این قانون منوط به تعیین آنتروپی کل سیستم است. آنتروپی نشان‌دهنده بی‌نظمی و درجه آزادی سیستم در اشغال حالت‌های مختلف است. آنتروپی به‌ازای هر نوکلئون برحسب تابع توزیع در فضای فاز به صورت زیر به دست می‌آید [۲۸،۳۳،۳۴]:

۱۴

$$s = -\frac{\nu}{\rho h^3} \sum_{i=n,p} \int [f_i(p) \ln f_i(p) + (1 - f_i(p)) \ln(1 - f_i(p))] d^3p$$

برای تعیین تابع توزیع  $f_i(p)$  به‌ازای ثابت ماندن انرژی داخلی کل سیستم  $E$  و تعداد کل ذرات  $N$ ، آنتروپی کل سیستم (سیستم جهان) طبق قانون دوم ترمودینامیک باید بیشینه شود. بنابراین از طریق وردش تابعی آنتروپی کل نسبت به تابع توزیع با ثابت نگه داشتن  $N$  و  $E$ ، حالت تعادل ترمودینامیکی سیستم به دست می‌آید.

نیز می‌توانند در توصیف خواص هسته‌های متناهی مؤثر واقع شوند. در نهایت رقابت بین تمامی جملات دافعه‌ای و جاذبه‌ای شرایط را برای رسیدن به حالت اشباع هسته‌ای مهیا می‌کند. همچنین در عبارت برهم‌کنش برای پارامترهای بدون بعد ذرات مشابه و نامشابه، می‌توان از عبارت‌های جایگزین زیر استفاده کرد [۳۴]:

۸

$$\alpha_{l(u)} = \frac{1}{2}(1 \mp \xi)\alpha, \quad \gamma_{l(u)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\gamma, \\ \beta_{l(u)} = \frac{1}{2}(1 \mp \zeta)\beta, \quad \sigma_{l(u)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\sigma$$

برای تعیین انرژی نهان بر نوکلئون در دمای صفر ابتدا کمیت‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\kappa_i = \left( \frac{4\pi\nu}{h^3} \frac{1}{p_b^2} \right) \frac{p_{Fi}^5}{5}, \\ \rho_i = \frac{4\pi\nu}{h^3} \left( \frac{p_{Fi}^3}{3} \right), \quad i = n, p, \quad \nu = 2 \quad 9$$

و سپس این کمیت را برحسب جملات زیر تعیین می‌کنیم:

۱۰

$$\varepsilon = \varepsilon_{K,n} + \varepsilon_{K,p} + \varepsilon_{nn} + \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{pn} + \varepsilon_{np},$$

که در آن  $\varepsilon_{K,p}$  و  $\varepsilon_{K,n}$  به ترتیب انرژی جنبشی ناشی از نوترون‌ها و پروتون‌ها،  $\varepsilon_{nn}$  و  $\varepsilon_{pp}$  انرژی برهم‌کنش بین ذرات متشابه و همچنین  $\varepsilon_{pn}$  و  $\varepsilon_{np}$  انرژی برهم‌کنش بین ذرات نامشابه است. در نهایت پس از محاسبه هر یک از این جملات به رابطه زیر می‌رسیم

[۳۴]:

۱۱

$$\varepsilon = \sum_{i=n,p} \frac{2T_b}{\rho\rho_0} \left\{ \frac{\rho_0\kappa_i}{2} - \alpha_l \frac{\rho_i^2}{2} - \alpha_u \frac{\rho_i\rho_j}{2} + \beta_l \rho_i\kappa_i + \beta_u \rho_i\kappa_j - \frac{32\pi^2 p_b}{h^6} \left[ \frac{2\gamma_l p_{Fi}^5}{15} + \gamma_u \left( \frac{p_{F>}^3}{6} - \frac{p_{F<}^5}{30} \right) \right] + \frac{\sigma_l \rho_0}{4} \left[ \left( \frac{2\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{5}{3}} \rho_i \right] + \frac{\sigma_u \rho_0}{4} \left[ \left( \frac{2\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{5}{3}} \rho_j \right] \right\}$$

وردش تابعی  $\delta f_i(p)$  را می توان متناظر با خلق نوکلئون  $i$ ام در فضای فاز در نظر گرفت [۲۸،۳۴]:

۱۵

$$\delta f_i(p) = \frac{h^3}{v} \delta_i(\vec{p} - \vec{p}_0) \delta_i(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{h^3}{v} \frac{\delta_i(p-p_0)}{4\pi p^2} \delta_i(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

شرط بیشینه آنتروپی کل به کمک روش ضرایب نامعین لاگرانژی به صورت زیر مطرح می شود [۳۴]:

۱۶

$$\delta S + \sum_{i=n,p} \beta \mu_i \delta N_i - \beta \delta E = 0, \quad \sum_{i=n,p} \delta N_i = N$$

شکل تابعی هریک از کمیت های وردش یافته در عبارت ۱۶ را می توان به صورت زیر به دست آورد:

۱۷

$$\delta S = \sum_{i=n,p} \int \ln \frac{1-f_i(p_0)}{f_i(p_0)} \delta \rho_i d^3 r, \quad \delta N_i = \int \delta \rho_i d^3 r, \quad \delta E = \sum_{i=n,p} \int \left[ \frac{p_0^2}{2B_i} + V_i(p) \right] \delta \rho_i d^3 r$$

که در آن:

۱۸

$$\delta \rho_i = \frac{v}{h^3} \int_0^\infty \delta f_i(p) d^3 p = \delta_i(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

نتیجتاً، برای نوکلئون ها تابع توزیعی از نوع فرمی-دیراک به دست می آید:

۱۹

$$f_i(p_0) = \frac{1}{e^{\beta \left( \frac{p_0^2}{2B_i} + V_i(p_0) - \frac{\mu_i}{\delta E_\alpha + \delta E_\sigma} \right)} + 1}$$

در این تابع توزیع، جرم مؤثر تعمیم یافته  $B_i$  صرفاً تابع چگالی نوکلئونی است و پتانسیل مؤثر تک ذره ای  $V_i(p_0)$  از وابستگی توامان چگالی و دما برخوردار است [۳۴]:

۲۰

$$B_i = \frac{\bar{m}}{\left[ 1 + \frac{2\rho_i}{\rho_0} \beta_l + \frac{2\rho_j}{\rho_0} \beta_u \right]}, \quad V_i(p_0) = \left( \frac{-16\pi T_b p_b}{\rho_0 h^3} \right) \times$$

$$\left[ \gamma_l \left( \frac{\Gamma_1^i(p_0)}{p_0} + \Gamma_2^i(p_0) \right) + \gamma_u \left( \frac{\Gamma_1^j(p_0)}{p_0} + \Gamma_2^j(p_0) \right) \right], \quad j \neq i$$

که در آن:

۲۱

$$\Gamma_1^{i(j)}(p_0) = \int_0^{p_0} p_1^2 f_{i(j)}(p_1) dp_1, \quad \Gamma_2^{i(j)}(p_0) = \int_{p_0}^\infty p_1 f_{i(j)}(p_1) dp_1$$

حال با الهام گرفتن از نظریه پدیده شناسی لاندائو که در حیطه نظریه مایعات کوانتومی برای سیستم های چگال مطرح می شود [۳۵]، به جای  $V_i(p_0)$  در تابع توزیع به عبارتی جدید در قالب انرژی جنبشی به صورت  $\frac{p_0^2}{2B_i}$  برحسب رفتار مشتق پتانسیل مؤثر نوترون در تکانه فرمی آن دست پیدا می کنیم:

$$V_n(p_0) \rightarrow \frac{p_0^2}{2B_n} \Rightarrow \partial V_n(p_0) \rightarrow \frac{2p_0 \partial p_0}{2B_n} \Rightarrow \bar{B}_n(\rho, \delta, T) = \left( \frac{1}{p_0} \frac{\partial V_n(p_0)}{\partial p_0} \right)_{p_{Fn}}^{-1} \propto B_n(\rho, \delta) = \alpha(\rho, T) B_n(\rho, \delta)$$

$$\bar{B}_p \propto B_p = \alpha B_p \Rightarrow \bar{B}_p = B_p \frac{\bar{B}_n}{B_n} \quad ۲۲$$

بنابراین عبارت انرژی مؤثر تک ذره در تابع توزیع به صورت یک جمله جنبشی تعمیم یافته در فضای فاز در می آید:

۲۳

$$\varepsilon_i(p_0) \rightarrow \frac{p_0^2}{2B_i^*}, \quad \frac{1}{B_i^*} = \frac{1}{B_i} + \frac{1}{B_i}$$

$B_i^*$  جرم مؤثر تعمیم یافته نامیده می شود که علاوه بر چگالی و پارامتر عدم تقارن به دما نیز بستگی دارد. با تعیین این کمیت از طریق روش تکرار کامپیوتری بر روی تابع توزیع هر نوکلئون و ارتباطی که این تابع توزیع با چگالی نوکلئون متناظر دارد، قادر به بررسی خواص ترمودینامیکی ماده هسته ای در دماهای متناهی هستیم. برای سیستم جهانی که در حالت تعادل

در آن پتانسیل شیمیایی هر ذره نیز ظاهر می‌شود، دست می‌یابیم:

۲۶

$$f_i(p_0) \stackrel{j \neq i}{=} \frac{1}{e^{\beta \left[ \frac{p_0^2}{2m} + V_i(p_0) + \bar{V}_i(\rho_i, \rho_j) - \mu_{ci} \right] - \frac{p_0^2}{2B_i^*}} + 1}$$

که در آن پتانسیل تک ذره‌ای غیر وابسته به تکانه  $\bar{V}_i$  به صورت زیر برحسب چگالی نوکلئون‌ها به دست می‌آید:

۲۷

$$\begin{aligned} \bar{V}_i(\rho_i, \rho_j) = & -2\alpha_l \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \rho_i - 2\alpha_u \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \rho_j \\ & + 2\beta_l \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \kappa_i + 2\beta_u \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \kappa_j + \\ & + 2\sigma_l \rho_i \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left( \frac{2\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \\ & + \sigma_u \rho_j \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left[ \left( \frac{2\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{2\rho_j}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ & + 2\sigma_l \rho_i^2 \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\rho_i)^{-\frac{1}{3}}}{3} \\ & + 2\sigma_u \rho_i \rho_j \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\rho_i)^{-\frac{1}{3}}}{3} \end{aligned}$$

در نهایت به ایده جایگزین رابطه ۲۴ که همان شکل صریح پتانسیل شیمیایی هر نوکلئون است، بدون نیاز به مشتق‌گیری عددی دست پیدا می‌کنیم:

۲۸

$$\mu_{ci} = \bar{V}_i(\rho_i, \rho_j) + \mu_i$$

ترمودینامیکی قرار می‌گیرد علاوه بر دما که تعادل در تبادل انرژی در بین زیر سیستم‌ها را مشخص می‌کند، پتانسیل شیمیایی مشخص کننده تعادل در تبادل ذره است. تعیین پتانسیل شیمیایی نوکلئونی گامی مؤثر و مفید در دستیابی همه جانبه به معادله حالت ماده هسته‌ای می‌تواند به شمار رود. پتانسیل شیمیایی هر نوکلئون از طریق مشتق چگالی انرژی آزاد هلمهولتز نسبت به چگالی آن نوکلئون تعیین می‌شود:

۲۹

$$\mu_{ci} \stackrel{F_r = \rho f_r}{=} \frac{\partial F_r}{\partial \rho_i} = \sum_{i=n,p} \rho_i \frac{\partial f_r}{\partial \rho_i} + f_r$$

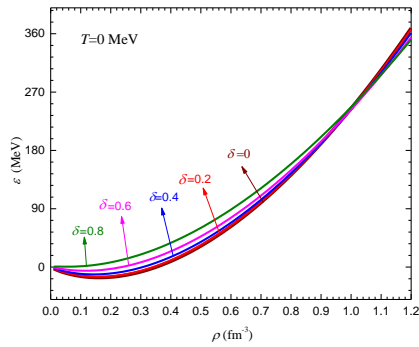
در حالت پایه  $\mu_{ci}$  به صورت زیر مطرح می‌شود:

۳۰

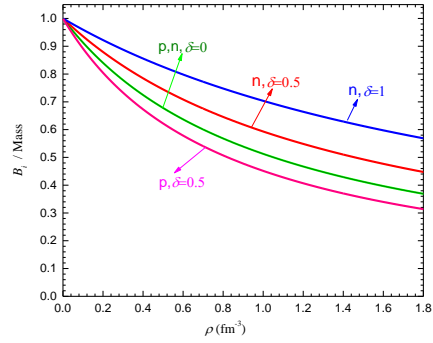
$$\begin{aligned} \mu_{ci} \stackrel{e = \rho \varepsilon}{=} \frac{\partial (e)}{\partial \rho_i} \stackrel{j \neq i}{=} \frac{p_{Fi}^2}{2m} - \left( \frac{2T_b}{\rho_0} \right) (\alpha_l \rho_i + \alpha_u \rho_j) \\ + \frac{2T_b}{\rho_0} \left\{ \left( \frac{p_{Fi}^2}{p_b^2} \rho_i + \kappa_i \right) \beta_l \right. \\ \left. + \left( \frac{p_{Fi}^2}{p_b^2} \rho_j + \kappa_j \right) \beta_u \right\} \\ - \frac{2T_b p_b \rho_i \gamma_l}{\rho_0 p_{Fi}} \\ - \frac{8\pi v T_b p_b \rho_i \gamma_u}{\rho_0 h^3} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_{Fj}^3}{3p_{Fi}} \quad p_{Fi} \geq p_{Fj} \\ \left[ -\frac{p_{Fi}^2}{6} + \frac{p_{Fj}^2}{2} \right] \quad p_{Fi} < p_{Fj} \end{array} \right\} \\ + 2\sigma_l \rho_i \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left( \frac{2\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \\ + \sigma_u \rho_j \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left[ \left( \frac{2\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{2\rho_j}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ + 2\sigma_l \rho_i^2 \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\rho_i)^{-\frac{1}{3}}}{3} \\ + 2\sigma_u \rho_i \rho_j \left( \frac{T_b}{\rho_0} \right) \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\rho_i)^{-\frac{1}{3}}}{3} \end{aligned}$$

در ادامه برای دماهای متناهی، از طریق تابع توزیع هر ذره در فضای فاز به شکل صریحی از پتانسیل شیمیایی نوکلئونی دست پیدا می‌کنیم. بدین منظور وردش انرژی کل  $\delta E$  در رابطه ۱۷ را علاوه بر جملات وابسته به تکانه به جملات وابسته به چگالی نوکلئونی نیز بسط می‌دهیم و سرانجام به شکل جدید تابع توزیع که

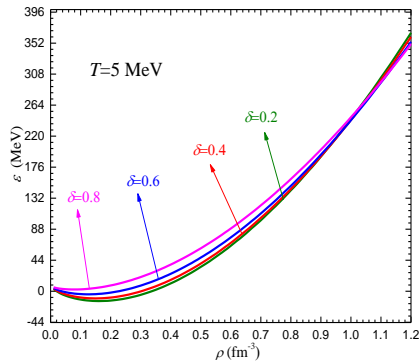
نتایج عددی و بحث در مورد آنها



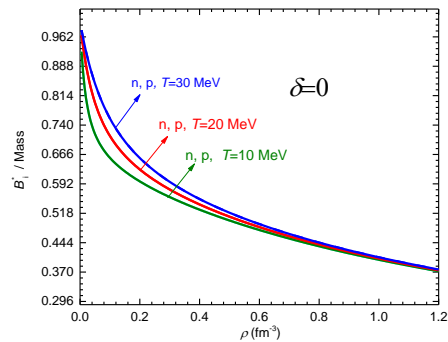
شکل ۴. انرژی نهان به‌ازای هر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=0$  MeV و به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن.



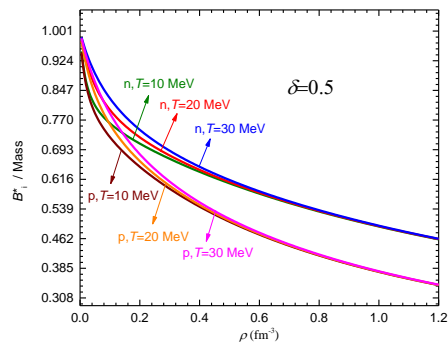
شکل ۱. جرم مؤثر نوترون و پروتون نسبت به جرم متوسط نوکلئونی برحسب چگالی نوکلئونی.



شکل ۵. انرژی نهان به‌ازای هر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=5$  MeV و به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن.

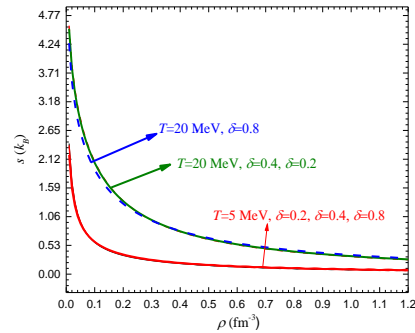


شکل ۲. جرم مؤثر تعمیم یافته نوترون و پروتون نسبت به جرم متوسط نوکلئونی برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف به‌ازای  $\delta = 0$ .

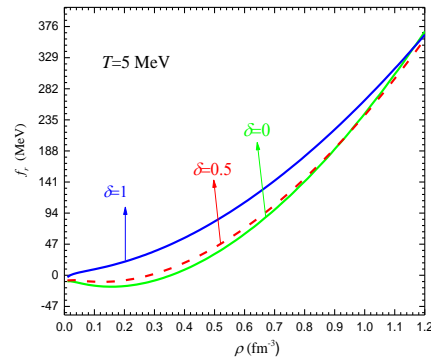


شکل ۳. جرم مؤثر تعمیم یافته نوترون و پروتون نسبت به جرم متوسط نوکلئونی برحسب چگالی نوکلئونی در دماهای مختلف به‌ازای  $\delta = 0.5$ .

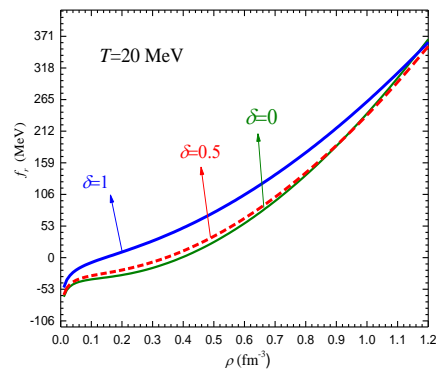
در شکل ۱ نسبت جرم مؤثر نوکلئونی  $B_i$  به جرم متوسط نوکلئونی به ازای  $\delta = 0, 0.5, 1$  برحسب چگالی نوکلئونی نشان داده می‌شود. این کمیت که مستقل از دما است، با افزایش چگالی برای هر نوکلئون کاهش پیدا می‌کند. با افزایش پارامتر عدم تقارن در چگالی‌هایی مختلف، این کمیت برای نوترون افزایش بیشتر و برای پروتون کاهش بیشتری پیدا می‌کند. شکل‌های ۲ و ۳ نسبت جرم مؤثر تعمیم‌یافته  $B_i^*$  به جرم متوسط نوکلئونی در دماها و چگالی‌های مختلف را به ترتیب به ازای  $\delta = 0$  و  $\delta = 0.5$  نشان می‌دهند. این کمیت‌ها مشابه جرم مؤثر نوکلئونی  $B_i$  همواره کوچکتر از یک هستند، یک روند نزولی برحسب چگالی دارند و در چگالی‌های پایین به دلیل کاهش اثر نیروی قوی هسته‌ای به مقدار یک نزدیکتر می‌شوند. در هر یک از این شکل‌ها در چگالی‌های مختلف، جرم مؤثر تعمیم یافته هر نوکلئون با افزایش دما افزایش می‌یابد و منحنی‌های هم‌دمای هر ذره در چگالی‌های بالا به همگرایی می‌رسند. با افزایش پارامتر عدم تقارن در هر دما، افت بیشتر این کمیت برای پروتون و افت کمتر آن برای نوترون برحسب چگالی به چشم می‌خورد. انرژی نهان  $\mathcal{E}$  بر نوکلئون به ازای مقادیر مختلف پارامتر عدم تقارن در دماهای  $T=0$  MeV و  $T=5$  MeV به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده است. در هر یک از این شکل‌ها در محدوده وسیعی از چگالی، افزایش پارامتر عدم تقارن افزایش انرژی نهان را نیز به همراه دارد. خارج از این محدوده در چگالی‌های بالاتر، منحنی‌ها حساسیت کمتری نسبت به تغییرات پارامتر تقارن از خود نشان می‌دهند. آنچه مسلم است و از مقایسه بین این دو شکل نمایان است، افزایش دما به ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن افزایش انرژی نهان را در چگالی‌های مختلف در پی دارد. تأثیر دما و پارامتر عدم تقارن بر روی کمیت آنتروپی بر نوکلئون  $S$  را می‌توان در شکل ۶ برحسب



شکل ۶. آنتروپی بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی به ازای مقادیر مختلف دما و پارامتر عدم تقارن.



شکل ۷. انرژی آزاد هلمهولتز بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=5$  MeV و به ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن.



شکل ۸. انرژی آزاد هلمهولتز بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=20$  MeV و به ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن.

چگالی‌های بالاتر با رویه‌ای متفاوت نسبت به چگالی‌های پایین‌تر، با افزایش پارامتر عدم تقارن به ترتیب با افزایش و کاهش پتانسیل شیمیایی پروتون و نوترون مواجه می‌شویم. تأثیر چگالی نوکلئونی و پارامتر عدم تقارن بر روی پتانسیل شیمیایی نوکلئونی در دماهای ۵ و ۲۰ مگا الکترون ولت نیز به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ ملاحظه می‌گردد.

همان‌طور که در این شکل‌ها ملاحظه می‌شود، با تغییر دما به‌ازای هر پارامتر عدم تقارن بیشترین تغییرات پتانسیل شیمیایی هر نوکلئون در چگالی‌های پایین‌تر صورت می‌گیرد. با افزایش دما رفتار صعودی پتانسیل شیمیایی نوکلئونی در منحنی‌های متناظر ناحیه بزرگتری برحسب چگالی را در برمی‌گیرد. روند کلی افزایش و کاهش پتانسیل شیمیایی ذرات با تغییر پارامتر عدم تقارن در دماهای مختلف مشابه است. همچنین در شکل ۱۰ با مقایسه نتایج حاصل از تعیین شکل صریح پتانسیل شیمیایی هر نوکلئون با نتایج حاصل از تعیین این کمیت به‌کمک روش مشتق عددی از رابطه ۲۴، بر اساس تطابق بالایی که در منحنی‌های متناظر دیده می‌شود، قابلیت این مدل جدید به‌خوبی درک می‌شود. با داشتن کمیت کلیدی و مهم پتانسیل شیمیایی هر ذره قادر به تشریح جامع خواص ترمودینامیکی سیستم ماده هسته‌ای هستیم. گام اصلی در این راه دستیابی به معادله حالت سیستم<sup>۱</sup> است که بالاخص از طریق تعیین رابطه فشار با متغیرهای دیگر حالت به‌دست می‌آید. با محاسبه مشتق انرژی آزاد به‌ازای هر ذره نسبت به چگالی نوکلئونی می‌توان فشار را به‌دست آورد [۳۴]:

۳۰

$$P(\rho, \delta, T) = \rho^2 \frac{\partial f_r(\rho, \delta, T)}{\partial \rho}$$

در اینجا شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئون‌ها در رسیدن به شکل صریحی از فشار حائز اهمیت است:

۳۱

چگالی نوکلئونی ملاحظه کرد. همان‌گونه که می‌بینیم منحنی‌های مربوطه برحسب چگالی رفتار نزولی دارند و عمده این تغییرات در ناحیه مربوط به چگالی‌های پایین دیده می‌شود. برخلاف پارامتر عدم تقارن که نقش چندانی در تغییر این کمیت در چگالی‌های مختلف ندارد، افزایش دما باعث افزایش محسوس آن می‌شود. در ادامه با استفاده از کمیت‌های انرژی نهان و آنتروپی بر نوکلئون می‌توان کمیت انرژی آزاد هلمهولتز بر نوکلئون را نیز برحسب متغیرهای مختلف حالت محاسبه کرد [۳۴]:

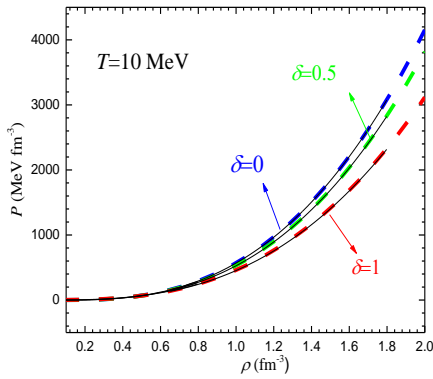
$$f_r = \varepsilon - Ts \quad 29$$

شکل‌های ۷ و ۸ انرژی آزاد هلمهولتز بر نوکلئون برحسب چگالی نوکلئونی را به ترتیب در دماهای ۵ و ۲۰ مگا الکترون ولت نشان می‌دهند. به‌ازای مقادیر مختلف چگالی و پارامتر عدم تقارن، مقدار کمیت انرژی آزاد هلمهولتز در دماهای متناهی از انرژی نهان کمتر است. در منحنی‌های هم دما نقش پارامتر عدم تقارن در چگالی‌های پایین‌تر بیشتر است و در چگالی‌های بالاتر، این نقش به مراتب کمتر می‌گردد و رفتار تقریباً مشابهی در این منحنی‌ها برحسب چگالی دیده می‌شود. با افزایش دما به‌ازای هر پارامتر عدم تقارن، مقدار انرژی آزاد هلمهولتز در هر چگالی کاهش پیدا می‌کند. کمینه موضعی هر یک از منحنی‌های هم دما بیانگر نوعی حالت تعادل (اشباع) در ماده هسته‌ای است. با افزایش دما و پارامتر عدم تقارن این نقاط کمینه به تدریج محو می‌شوند.

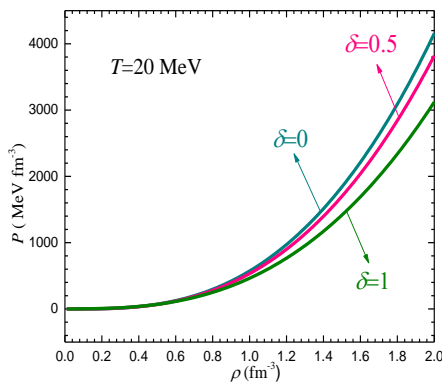
شکل ۹ پتانسیل شیمیایی نوترون و پروتون در دمای صفر را برحسب چگالی نوکلئونی نشان می‌دهد. به‌ازای هر پارامتر تقارن در چگالی‌های پایین‌تر مقدار پتانسیل شیمیایی نوترون نسبت به پروتون بیشتر است و به تدریج با افزایش چگالی مقادیر بالاتر به پتانسیل شیمیایی پروتون اختصاص می‌یابد. همچنین در

<sup>1</sup> Equation of state (EOS)





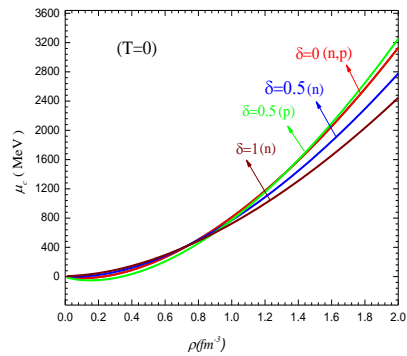
شکل ۱۲. فشار برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=10$  MeV به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن. (منحنی‌های خط چین از روش صریح و منحنی‌های توپر از روش مشتق عددی به‌دست آمده‌اند).



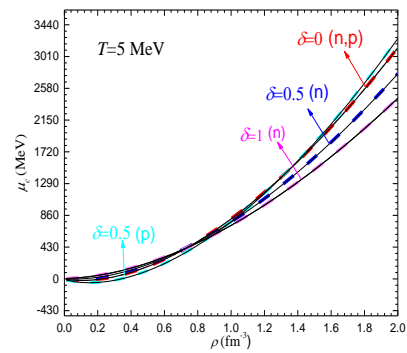
شکل ۱۳. فشار بر حسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=20$  MeV به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن.

$$\begin{aligned}
 F_r &= \rho f_r \\
 P &\cong \rho^2 \frac{\partial(F_r/\rho)}{\partial \rho} \\
 &= \rho \frac{\partial F_r}{\partial \rho} - F_r \\
 &= \sum_{i=n,p} \rho_i \frac{\partial F_r}{\partial \rho_i} - F_r \\
 \mu_{ci} &= \frac{\partial F_r}{\partial \rho_i} \\
 &\cong \sum_{i=n,p} \rho_i \mu_{ci} - F_r
 \end{aligned}$$

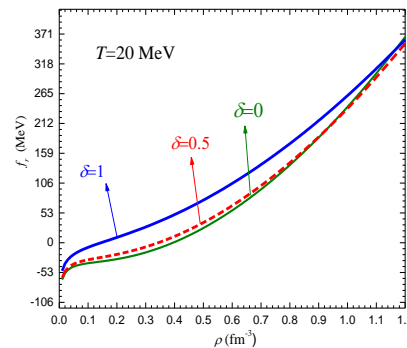
شکل‌های ۱۲ و ۱۳ فشار برحسب چگالی نوکلئونی را به‌ترتیب در دماهای ۱۰ و ۲۰ مگا الکترون ولت به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن نشان می‌دهند. در این شکل‌ها در رده وسیعی از چگالی نوکلئونی، منحنی‌های



شکل ۹. پتانسیل شیمیایی نوترون و پروتون برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=0$  به‌ازای  $\delta$ های مختلف.



شکل ۱۰. پتانسیل شیمیایی نوترون و پروتون برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=5$  MeV به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن. (منحنی‌های خط چین از روش صریح و منحنی‌های توپر از روش مشتق عددی به‌دست آمده‌اند).



شکل ۱۱. پتانسیل شیمیایی نوترون و پروتون به‌روش صریح برحسب چگالی نوکلئونی در دمای  $T=20$  MeV به‌ازای پارامترهای مختلف عدم تقارن.

جدول ۱. مقایسه دمای حدی و دمای بحرانی در مدل کنونی با مدل‌های دیگر.

$T_c$ (MeV)	$T_{lim}$ (MeV)	پتانسیل	روش
۱۶٫۸	۱۲٫۸	مایرز و شواتکی	توماس-فرمی با جرم مؤثر تعمیم یافته (مدل کنونی)
۱۶٫۷	۱۲٫۹	مایرز و شواتکی	توماس-فرمی بدون جرم مؤثر تعمیم یافته [34]
۱۷٫۲	۱۳٫۰	زندراپ	توماس-فرمی بدون جرم مؤثر تعمیم یافته [28]
-	۱۴٫۷	AV18+TNI	LOCV [23]
۱۶٫۰	-	$\Delta$ -Reid	LOCV [36]

### نتیجه گیری

در این تحقیق، در چهارچوب تقریب توماس-فرمی بر اساس نظریه پدیده شناسی لاندائو، جرم مؤثر تعمیم یافته نوکلئونی که تابعیتی برحسب دما و چگالی دارد، تعیین می‌گردد. علاوه بر این، تابع توزیع جدیدی که در این مدل بر اساس تقریب جرم مؤثر تعمیم یافته در فضای فاز به دست می‌آید، منجر به تعیین معادله حالت و یا همان ارتباط بین کمیت‌های ترمودینامیکی نظیر انرژی نهان، آنترپی و انرژی آزاد هلمهولتز می‌شود. در این چهارچوب شکل صریح پتانسیل شیمیایی نوکلئونی در دماها و چگالی‌های مختلف، راه را برای تعیین کمیت فشار تا حد ممکن هموار می‌گرداند. در بررسی توافق رفتار معادله حالت به دست آمده در این مدل با مدل‌های دیگر، کمیت‌هایی نظیر دمای حدی و دمای بحرانی که کاملاً متأثر از رفتار معادله حالت هستند انتخاب گردیده‌اند. نتایج به دست آمده برای این دو کمیت در توافق خوبی با نتایج دیگران است. چنین دستاوردی منجر به ارتقاء قابل توجه کارایی تقریب توماس-فرمی در بررسی خواص ترمودینامیکی ماده هسته‌ای می‌شود. مدل کنونی علاوه بر کاهش قابل

مختلف هم دما از یک روند صعودی برحسب چگالی تبعیت می‌کنند و افزایش پارامتر عدم تقارن منجر به کاهش فشار می‌شود. همچنین افزایش دما، منحنی‌های متناظر با هر یک از پارامترهای عدم تقارن را به سمت مقادیر بالاتر سوق می‌دهد. مجدداً در شکل ۱۲ تطابق بالای نتایج حاصل از این مدل با نتایج حاصل از روش مشتق عددی از رابطه ۳۰ به خوبی دیده می‌شود. از آنجا که رفتار این شکل صریح از پتانسیل شیمیایی مستقیماً در رفتار معادله حالت تأثیرگذار است، لذا به منظور مقایسه با مدل‌های دیگر کمیتی تحت عنوان دمای حدی  $T_{lim}$  که مستقیماً متأثر از رفتار معادله حالت است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. دمای حدی حداقل دمایی است که در آن به‌ازای تمامی پارامترهای عدم تقارن، فشار منفی به‌طور کامل در تمامی چگالی‌ها محو می‌شود. در این خصوص از این مدل دمای حدی ۱۶٫۸ مگا الکترون ولت محاسبه می‌گردد.

کمیت کلیدی دیگری که در بررسی رفتار معادله حالت و مقایسه آن با مدل‌های دیگر حائز اهمیت است دمای بحرانی  $T_c$  است. دمای بحرانی حداقل دمایی است که در آن به‌ازای تمامی پارامترهای عدم تقارن، ناحیه ناپایداری مکانیکی ماده هسته‌ای به‌واسطه منفی بودن مشتق فشار نسبت به چگالی به‌طور کامل ناپدید می‌شود، چنین دمایی را می‌توان از روی رفتار فشار ماده هسته‌ای متقارن برحسب چگالی با فرض صفر شدن مشتق اول و دوم فشار برحسب چگالی به‌دست آورد. مقدار دمای بحرانی که از این مدل استخراج می‌شود ۱۶٫۸ مگا الکترون ولت است. در جدول ۱ مقایسه بین مقادیر دمای حدی و دمای بحرانی حاصل از این مدل با مدل‌های دیگر ارائه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، مقادیر به دست آمده برای این دو کمیت با مقادیر به دست آمده از مدل‌های دیگر در توافق خوبی است.

- [8] C.F. von Weizsacker, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **96** (1935)431.
- [9] H.A. Bethe, R.F. Bacher, *Reviews of Modern Physics* **8** (1936) 82.
- [10] B. Friedman, V.R. Pandharipande, *Nuclear Physics A* **361** (1981) 502. I.E. Lagaris, V.R. Pandharipande, *Nuclear Physics A* **359** (1981) 331.
- [11] R.B. Wiringa, V. Ficks, A. Fabrocini, *Physical Review C* **38** (1988) 1010.
- [12] M. Baldo, *Nuclear Methods and the Nuclear Equation of State*, World Scientific, Singapore (1990).
- [13] R.B. Wiringa, V.G.J Stoks, R. Schiavilla, *Physical Review C* **51** (1995) 38.
- [14] A. Akmal, V.R. Pandharipande, D.G. Ravenhall, *Physical Review C* **58** (1998) 1804.
- [15] H. Huber, F. Weber, M.K. Weigel, *Physical Review C* **57** (1998) 3484.
- [16] M. Baldo, A. Fiasconaro, H.Q. Song, G. Giansiracusa, and U. Lombardo, *Physical Review C* **65** (2002) 017303.
- [17] M. Modarres, H.R. Moshfegh, *Progress of Theoretical Physics* **112** (2004) 21.
- [18] W. Zuo, Z.H. Li, A. Li, U. Lombardo, *Nuclear Physics A* **745** (2004) 34.
- [19] G.H. Bordbar, M. Bigdeli, *Physical Review C* **76** (2007) 035803.
- [20] A. Rios, A. Polls, A. Ramos, H. Müther, *Physical Review C* **78** (2008) 044314.
- [21] A. Rios, A. Polls, I. Vidana, *Physical Review C* **79** (2009) 025802.
- [22] S. Zaryouni, H.R. Moshfegh, *European Physical Journal A* **43** (2010) 283.
- [23] H.R. Moshfegh, S. Goudarzi, *Acta Physica Polonica B* **46** (2015).

توجه زمان محاسبات، روند محاسبات را تا حد ممکن ساده و دقت محاسبات را در حد بالایی حفظ می‌کند. همچنین در کنار توافق رفتار معادله حالت با مدل‌های مطرح دیگر، تطابق نتایج به‌دست آمده از شکل صریح پتانسیل شیمیایی و فشار حاصل از آن با نتایج حاصل از روش‌های مشتق عددی، آن را به‌عنوان یک مدل پیشرو و کارآمد مطرح می‌کند. بر این اساس قابلیت تعمیم یافتگی این مدل در بررسی ساختارهای پیچیده باریونی نظیر سیر تکاملی ستارگان نوترونی از مرحله پیدایش تا مرحله سرد شدن آنها، بسیار راه‌گشا خواهد بود.

### تشکر و قدردانی

حمایت از این تحقیق از محل اعتبارات معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان با شماره گرنت ۶۳۸۳۶/۲ صورت گرفته است.

### مرجع‌ها

- [1] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, John Wiley, New York (1983).
- [2] H.A. Bethe, *Reviews of Modern Physics* **62** (1990) 801.
- [3] N.K. Glendenning, *Compact stars*, Springer, New York, (1997).
- [4] M.F. Rivet *et al.*, *Nuclear Physics A* **749** (2005) 73.
- [5] P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev, *Neutron stars 1: Equation of state and structure*, Springer Science and Business Media (2007).
- [6] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2007).
- [7] H.R. Moshfegh, M. Ghazanfari Mojarrad, *European Physical Journal A* **49** (2013) 1.

- [24] W.D. Myers, W.J. Swiatecki, *Annals of Physics* **55** (1969) 395.
- [25] B.D. Serot, J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics* **16** (1986) 1.
- [26] S.W. Huang, M.Z. FU, S.S. Wu, S.D. Yang, *Modern Physics Letters A* **5** (1990) 1071.
- [27] W.D. Myers, W.J. Swiatecki, *Annals of Physics* **204** (1990) 401.
- [28] J. Randrup, E. Lima Medeiros, *Nuclear Physics A* **526** (1991) 115.
- [29] H. Müller, B.D. Serot, *Physical Review C* **52** (1995) 2072.
- [30] H. Müller, B.D. Serot, *Nuclear Physics A* **606** (1996) 508.
- [31] W.D. Myers, W.J. Swiatecki, *Nuclear Physics A* **601** (1996) 141.
- [32] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Mayer, R. Schaeffer, *Nuclear Physics A* **635** (1998) 231.
- [33] K. Strobel, F. Weber, M.K. Weigel, *Zeitschrift für Naturforschung* **54** (1999) 83.
- [34] H.R. Moshfegh, M. Ghazanfari Mojarrad, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **15** (2011).
- [35] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics 2nd ed*, Oxford, Butterworth-Heinemann, (1996).
- [36] H.R. Moshfegh, M. Modarres, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **24** (1998) 821.

# Explicit form of the nucleonic chemical potential in nuclear matter on the basis of Thomas-Fermi approximation

Mehdi Ghazanfari Mojarrad\*, Mahdokht Minaee Bidgoli

<sup>1</sup> Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran.

Received: 24.11.2015      Final revised: 16.09.2016      Accepted: 05.10.2016

## Abstract

By using the semi-classical Thomas-Fermi approximation in the framework of a phenomenological mean-field model, an explicit form of nucleonic chemical potential at different temperatures and densities is obtained. At finite temperatures, based on an extended statistical model, within Landau phenomenological theory, this explicit form is determined in terms of a new quantity known as extended effective mass which is a function of temperature, density and asymmetry parameter. By introducing the explicit form of nucleonic chemical potential, a new model for determination of the nuclear equation of state at different temperatures and densities with a behavior in agreement with the other elaborated theoretical models in this field is presented.

**Keywords:** Thomas-Fermi approximation, Nuclear matter, Landau phenomenological theory, Extended effective mass, Nucleonic chemical potential, Equation of state

---

\* Corresponding Author: ghazanfari@kashanu.ac.ir