

مطالعه زنجیره ایزوتوپی $Ru^{100-106}$ با استفاده از مدل سه ترازوی بوزون

برهم‌کنشی

امیر جلیلی مجارشین، هادی صبری*

گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۱۶ ویرایش نهائی: ۱۳۹۶/۰۲/۰۷ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۰۸

چکیده

در این مقاله طیف انرژی و سطوح انرژی هسته‌های واقع در ناحیه گذار فازی بین شکل‌های کروی و تغییر شکل یافته محوری بررسی شده است. برای توصیف هم‌زمان حالات با اسپین پاریتته زوج و فرد در قالب مدل بوزون برهم‌کنشی سه ترازوی spd ، هامیلتونین گذار فازی تعریف شده بر پایه جبر آفین $SU(1,1)$ مورد استفاده قرار گرفت. با استفاده از نظریه کاتاستروف و فرمالیسم حالات همدوس، سطوح انرژی برای زنجیره ایزوتوپی $Ru^{100-106}$ در ناحیه گذار فازی شکلی بین حدود $SO(9)$ - $U(5)$ مدل بوزون برهم‌کنشی تعیین گردید. پیش‌بینی‌های مدل، اطلاعات تجربی موجود برای این هسته‌ها را به خوبی بازمی‌نماید. همچنین تغییرات مشاهده شده در سطوح انرژی این هسته‌ها وجود یک گذار فازی شکلی مرتبه دوم را نشان می‌دهد. مقادیر حاصل برای پارامترهای کنترلی و همچنین شکل سطوح انرژی، هسته Ru^{100} را به عنوان نمونه مناسب نقطه بحرانی این گذار فازی شکلی معرفی می‌نماید.

کلیدواژگان: گذار فازی-شکلی کوانتومی، حالت همدوس، مدل سه ترازوی بوزون برهم‌کنشی، سطوح انرژی.

مقدمه

بررسی می‌نماید. حرکت از یک شکل به شکل دیگر بر اساس مقدار پارامتر کنترلی، η ، توصیف می‌شود. در مدل GCM ، سطوح انرژی هسته‌های انتخابی بر اساس پارامترهای توصیف کننده فضای این مدل، پارامتر شعاعی β و زاویه‌ای γ ، و استفاده از مفاهیم نظریه کاتاستروف^۴ و حالت همدوس^۵ تعیین می‌شود. بررسی تغییرات این سطوح انرژی برحسب پارامتر کنترلی، مکان دقیق نقطه بحرانی^۶ هر گذار فازی بین شکل‌های مختلف را مشخص می‌کند.

از طرف دیگر، بررسی میزان انطباق ترازهای انرژی و احتمال گذارهای الکتریکی و مغناطیسی پیش‌بینی شده

مطالعه پدیده گذار فازی-شکلی کوانتومی^۱ در سیستم‌های هسته‌ای یکی از موضوعات جذاب در سالیان اخیر بوده است. این پدیده در قالب مدل‌های مختلف از جمله مدل تجمعی بوهر-ماتلسون^۲ و همچنین مدل برهم‌کنش بوزونی^۳ بررسی شده است [۳-۱]. هامیلتونین مناسب در این مدل‌ها، از ترکیب شکل‌های مختلف $H_{Transition} = \eta H_I + (1 - \eta) H_{II}$ حاصل می‌گردد. این انتخاب، مطالعه ساختار هسته‌های انتخابی را بر اساس پارامترهای توصیف کننده فضای هر مدل ممکن می‌نماید. این هامیلتونین ترکیبی، شکل هسته و تغییرات ناشی از این گذارهای بین شکلی را

⁴ Catastrophe formalism

⁵ Coherent state

⁶ Critical point

¹ Quantum shape phase transition (QPT)

² Bohr-Mottelson collective model (GCM)

³ Interacting Boson Model (IBM)

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

با مدل برهم‌کنش بوزونی و مقادیر تجربی متناظر، توانائی این مدل را ارزیابی می‌نماید. تغییر پارامتر کنترلی در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی تا رسیدن به کمترین فاصله در مقایسه با مقادیر تجربی، روش تعیین پارامتر کنترلی در این مدل جبری می‌باشد [۱۲-۴].

در سالیان اخیر مدل‌های جبری متعددی بر پایه گروه‌های تقارنی متفاوت پیشنهاد شده‌اند. مدل جبری IBM در اولین نسخه پیشنهادی در سال ۱۹۷۴ [۵-۲]، بر پایه جبر $U(6)$ و استفاده صرف از دو بوزون s و d چنان تعریف شد که تنها قادر به توصیف ترازهائی با اسپین-پاریته زوج در هسته‌های نیمه سنگین بود. علاوه بر محدودیت توصیف حالات، ترکیب دو حد تقارنی در هامیلتونین گذار فازی شکلی، تعداد مؤلفه‌های این ساختار جبری را چنان افزایش می‌دهد که محاسبات دقیق امکان رسیدن به جواب را فراهم نمی‌سازد. برای حل این مشکل، در سال ۱۹۹۸ مدل جبری جدید بر پایه جبر آفین $SU(1,1)$ و استفاده مجدد از تنها بوزون‌های s و d معرفی گردید [۲۰-۱۲]. این مدل علیرغم ساده‌تر کردن فضای محاسباتی، محدودیت توصیف حالات با اسپین پاریته فرد را هنوز دارا می‌باشد. برای رفع این محدودیت باید سهم بوزون‌های دیگر مثل p یا f به هامیلتونین اضافه گردد.

فرمالیسم حالت ذاتی^۱، بین مدل IBM و مدل جمعی بوهر-ماتلسون [۵] ارتباط برقرار می‌کند. به عبارتی برای ایجاد ارتباط بین حدهای دینامیکی مختلف مدل IBM و شکل‌های متناظر مدل هندسی، لازم است دستورالعملی برای ساخت متغیرهای شکل کلاسیکی در IBM ارائه دهیم. برای انجام این کار گیلمور^۲ الگوریتمی را برای ساخت حدهای کلاسیکی اپراتورهای متعلق به جبرهای لی پیوسته پیشنهاد داد [۷-۶]. این الگوریتم مبتنی بر وجود حالت‌های هم‌دوس در عبارت‌هایی است که کران‌های بالا و پائین

مقدار انتظاری برای اپراتورهای کوانتومی را حاصل می‌کند. در این روش انرژی حالت پایه با کمینه کردن یک پتانسیل کلاسیکی که مقدار انتظاری هامیلتونین در نمایش حالت هم‌دوس روی فضای معینی از متغیرها می‌باشد، به دست می‌آید. از آنجائی که در حد $N \rightarrow \infty$ کران‌های بالایی و پائینی در همان حد کلاسیکی یکی می‌شوند، بنابراین برای محاسبه انرژی حالت پایه برای مراتب بزرگ N کافی است این مقدار انتظاری را کمینه کنیم.

در این مقاله، هامیلتونین جدید جبری برای توصیف گذار بین هسته‌های کروی و تغییر شکل یافته محوری در فرمالیسم گروه جبری $SU(1,1)$ و با اضافه نمودن سهم بوزون p معرفی می‌گردد [۲۶-۲۵]. هامیلتونین مدل بوزون برهم‌کنشی spd علاوه بر افزایش دقت محاسبات، توانائی توصیف ترازهائی با اسپین پاریته فرد را نیز فراهم می‌سازد. این توانائی ما را قادر می‌نماید تا آن دسته از حالات انرژی موجود در طیف تجربی که مدل‌های قبلی قادر به بررسی آنها نیستند را نیز بررسی کنیم. همچنین می‌توان با مطالعه احتمال گذارهای الکترومغناطیسی متناظر با این حالات، روشی برای بررسی تغییرات ساختاری این هسته‌ها پیشنهاد نمود. سپس با معرفی حالت هم‌دوس متناظر با این هامیلتونین سه تراز، سطوح انرژی برای ناحیه گذار فازی شکلی حاصل می‌گردد. ثابت‌های هامیلتونین و لذا پارامترهای توصیف کننده سطوح انرژی از برازش روابط حاصل به اطلاعات تجربی موجود [۳۰-۲۷] تعیین می‌گردد. بررسی تغییرات صورت گرفته در سطوح انرژی هسته‌های مختلف زنجیره ایزوتوپی Ru، وجود گذار فازی شکلی مرتبه دوم برای این هسته‌ها را نشان می‌دهد.

² Gilmore

¹ Intrinsic state

مدل جبری ناحیه گذار فازی شکلی

حالت پایه بعضی هسته‌ها توسط چگالی و میدان میانگینی توصیف می‌شود که کروی است در حالی که برخی دیگر تغییر شکل یافته هستند. وجود شکل‌های غیر کروی در هسته‌ها شکست خودبه‌خودی تقارن را نشان می‌دهد [۸]. ظهور تغییرشکل پیش نیاز حرکت‌های جمعی است زیرا در غیر این صورت نمی‌توان از یک جهت‌گیری برای سیستم سخن گفت. هامپلتونین بس‌ذره‌ای هسته‌ای شامل چنان انرژی جنبشی می‌شود که به جهت‌گیری محورهای مختصات، همچنین اندرکنش‌هایی که به مختصات نسبی ذرات وابسته هستند، بستگی ندارد. بنابراین تحت دوران محورهای مختصاتی که همه ذرات را در یک زمان در بر می‌گیرد ناوردا می‌باشد. هرچند این تقارن دورانی مانع این نمی‌شود که بتوان حل حالت پایه میدان میانگین را با پتانسیل میانگین و توزیع چگالی غیر کروی به دست آورد. حل‌های غیر کروی به‌عنوان حالت‌های ذاتی تفسیر می‌شوند. ظهور طیف دورانی، جدایی تقریبی دوران جمعی را از حرکت ذاتی در سیستم متصل به جسم آشکار می‌کند، به‌صورتی که توسط هامپلتونین

$$H = H_{\text{int}} + H_{\text{rot}}$$

توصیف می‌شود. در اینجا میدان میانگین H_{int} غیر کروی است. این هامپلتونین در چارچوب مدل تجمعی بوهر ماتلسون برای توصیف ترکیب شکل‌های مختلف یا همان پدیده گذار فازی شکلی هسته‌ای استفاده می‌شود. هامپلتونین اشاره شده در بالا دارای بخش‌های مختلف با تقارن‌های متفاوت است. این شرایط، امکان معرفی ویژه‌حالت مناسب یا اعداد کوانتومی خوب برای توصیف حالات هسته را در بسیاری موارد غیر ممکن می‌سازد [۹]. برای حل این مشکل، مدل بوزون برهم‌کنشی بر اساس فرمالیسم کوانتوم ثنویه و استفاده از عملگرهای خلق و فنای بوزونی در چارچوب

گروه‌های تقارنی معرفی می‌شود. این مدل پدیده گذار فازی شکلی را بر اساس تغییرات پارامتر کنترلی توصیف می‌نماید. همچنین می‌توان با استفاده از فرمالیسم حالت ذاتی معادل حدهای مختلف مدل بوزون برهم‌کنشی را در چارچوب شکل‌های مدل تجمعی یافت.

مدل بوزون برهم‌کنشی، یک مدل جبری برای توصیف هسته‌های نیمه سنگین زوج-زوج است که موفقیت‌های بسیاری به دست آورده است. در این مدل حالت‌های جمعی کم انرژی در هسته زوج-زوج با تعریف سیستمی از بوزون‌ها توصیف می‌شوند [۱۴]. در ساده‌ترین شکل این مدل، عملگرهای خلق و فنای بوزون‌های s و d ، در چارچوب گروه تقارنی $U(6)$ معرفی می‌شوند. این مدل در شکل sd -IBM، سه حد تقارنی دارد که برای توصیف، تنها حالت‌های با اسپین پاریته زوج، هسته‌های کروی، $U(5)$ ، تغییر شکل یافته کشیده، $SU(3)$ و تغییر شکل یافته محوری $SO(6)$ ، استفاده می‌نماید. گذار فاز هنگامی رخ می‌دهد که سیستم فیزیکی از یک حد تقارنی به حد تقارنی دیگر برود. گذارهای فاز می‌توانند در اثر تغییر پارامترهای کنترلی رخ دهند [۱۵-۱۶]. معمولاً گذارهای فازی شکلی به‌گونه‌ای در نظر گرفته می‌شوند که تنها به یک پارامتر (مثلاً تعداد نوترون‌ها) وابسته باشند [۱۳-۱۰]. فرمالیسم حالت ذاتی این امکان را برای ما فراهم می‌کند تا سطوح انرژی را برای نواحی گذار فازی حاصل نماییم. بر اساس تغییرات این سطوح در فضای پارامترهای کنترلی [۱۱-۱۲] می‌توان مقدار دقیق پارامتر کنترلی متناظر با نقطه بحرانی گذار را تعیین نمود.

از طرفی مطالعه گذار فاز کوانتومی در مدل بوزون برهم‌کنشی بر اساس تغییرات مشاهده‌پذیرهایی مثل احتمال گذار چهارقطبی الکتریکی، $B(E2)$ ، نسبت انرژی‌های ترازهای خاص $(E(4_1^+)/E(2_1^+))$ و ... صورت می‌گیرد [۹]. در گذار از یک حد دینامیکی به

هامیلتونین مدل spd-IBM برای توصیف ناحیهٔ گذار فازی شکلی

هامیلتونین ناحیهٔ گذار فازی بین هسته‌های کروی و تغییر شکل یافته محوری بر اساس مولدهای جبر آفین $SU(1,1)$ ، امکان مطالعهٔ شکل‌های مختلف هسته‌ها را بر اساس تغییرات پارامتر کترلی فراهم می‌سازد. در نسخهٔ اولیه [۱۸]، تنها از مولدهای دو بوزون s و d استفاده شده بود. این مدل تنها حالات با اسپین پاریتهٔ زوج را توصیف می‌نماید. ما با استفاده از مفاهیم مشابه، سهم بوزون p را به این مدل اضافه نموده و مدل spd-IBM را معرفی می‌نمائیم. این مدل علاوه بر افزایش دقت محاسبات، فضای مسئله را با اضافه نمودن سهم اندازه حرکت $L=1$ بوزون p ، گسترش می‌دهد. همچنین می‌توان پدیدهٔ تشدیدهای عظیم^۳ را که در محدودهٔ انرژی‌های بالا صورت می‌پذیرد با استفاده از این مدل جبری جدید مطالعه نمود.

جبر $SU(1,1)$ به وسیلهٔ مولدهای S^{ν} که ν می‌تواند مقادیر 0 و ± 1 را به خود بگیرد، تولید می‌شود. مولدهای S^{ν} در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} [S^0, S^{\pm}] &= \pm S^{\pm} \\ [S^+, S^-] &= -2S^0 \end{aligned} \quad 1$$

عملگر کازیمیر این گروه را می‌توان بر اساس مولدهای گروه به صورت زیر معرفی نمود

$$\hat{C}_2 = S^0(S^0 - 1) - S^+S^- \quad 2$$

نمایش فضای جبری و حالات مختلف در این فضا با استفاده از یک عدد کوانتومی منفرد K صورت می‌پذیرد. در نتیجه، فضای هیلبرت با استفاده از پایه‌های اورتونرمال $|k\mu\rangle$ جاروب می‌شود. عدد کوانتومی K مقادیر مثبت داشته و به ازای هر K ، μ می‌تواند مقادیر $\mu = K, K+1, \dots$ را داشته باشد. اثر عملگرهای گروه

تقارنی $SU(1,1)$ روی این حالت

حد دیگر و عبور از نقطهٔ بحرانی، تغییرات قابل توجه در این کمیات قابل بررسی می‌باشد. مکان دقیق نقطهٔ بحرانی قابل تعیین در این روش نمی‌باشد. به این دلیل، اغلب مطالعاتی که تاکنون انجام شده روی یک درک هندسی از مدل در چارچوب فرمالیسم حالت ذاتی متمرکز شده‌اند.

مدل sd-IBM به دلیل محدودیت‌های ذاتی ناشی از استفاده تنها از بوزون‌های s و d ، تنها حالت‌های با اسپین پاریتهٔ زوج را در محدودهٔ انرژی‌های پائین ($< 3 \text{ MeV}$) توصیف می‌نماید. همچنین تعداد بالای مؤلفه‌های این ساختار جبری منطبق بر گروه تقارنی $U(6)$ در نواحی گذار فازی، مطالعه را بسیار پیچیده می‌سازد. اضافه شدن سهم بوزون‌های دیگر و همچنین استفاده از گروه‌های تقارنی متفاوت راه حلی برای غلبه بر این مشکلات است.

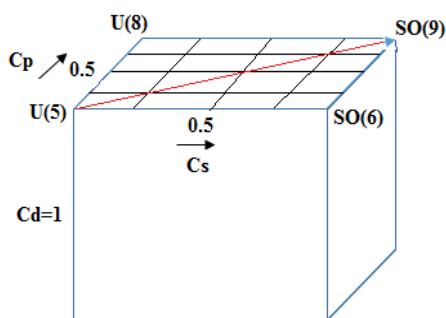
هامیلتونین ناحیهٔ گذار فازی در مدل بوزون برهم‌کنشی معرفی شده توسط پان^۱ و درایر^۲ بر پایهٔ مولدهای جبر آفین $SU(1,1)$ ، یکی از پیشنهادات موفق می‌باشد [۱۸]. این هامیلتونین برای توصیف گذار بین هسته‌های دارای شکل کروی و تغییر شکل یافتهٔ محوری معرفی گردیده است. این مدل علیرغم توصیف دقیق نقطهٔ بحرانی این ناحیه گذار فازی، $E(5)$ ، تنها ترازهایی با اسپین پاریته زوج را پیش‌بینی می‌نماید. برای حل این مشکل، ما با اضافه نمودن سهم بوزون p به هامیلتونین ناحیهٔ گذار، مدل spd-IBM را تعریف نمودیم. جزئیات مولدها و هامیلتونین ناحیهٔ گذار در جبر $SU(1,1)$ به طور کامل در منبع [۱۸] موجود می‌باشد. ما در این مقاله صرفاً به مرور مفاهیم کلی و بیان نتایج می‌پردازیم.

³ Giant resonance

¹ F. Pan

² J.P. Drayeer

و $SO(3)$ به صورت $\hat{C}_2(SO(5))$ و $\hat{C}_2(SO(3))$ نمایش داده شده است. حدود دینامیکی این هامیلتونین به‌ازای مقادیر مشخص شده در شکل ۱ حاصل می‌شود. همچنین ناحیه گذار فازی شکلی بین حدود $U(5)$ و $SO(9)$ به‌ازایی بازه $[0-1]$ برای دو پارامتر کنترلی C_s و C_p حاصل می‌شود.



شکل ۱. گذار فازی شکلی از حد تقارنی $U(5)$ ، هسته‌های کروی، به حد تقارنی $SO(9)$ ، هسته‌های تغییر شکل یافته محوری، در مدل spd-IBM

ویژه‌مقادیر متناظر با این هامیلتونین و نحوه محاسبات، که به‌طور مشابه با هامیلتونین جبری sd-IBM می‌باشد، به‌طور کامل در منبع [۱۸] توضیح داده شده است. ما در این مقاله به‌دلیل روش متفاوت در محاسبه سطوح انرژی، به بررسی فرمالیسم حالت ذاتی خواهیم پرداخت. از طرفی با توجه به لزوم تعیین پارامترهای هامیلتونین از برازش محاسبات نظری به نتایج تجربی، مروری کوتاه بر فرآیند محاسبه رابطه ویژه‌مقداری داریم.

ویژه‌مقادیر هامیلتونین ۶ از بسط فوریه-لورنت^۴ ویژه حالات و مولدهای جبر آفین $SU(1,1)$ برحسب تعداد پارامتر x_i که $i = 1, 2, \dots, k$ می‌باشد، حاصل می‌گردد. این بدان معناست که می‌توان هر حالت را به‌صورت زیر بسط داد،

$$|k; v_s v_n \Delta LM\rangle = \sum_{n_i \in \mathbb{Z}} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} S_{n_1}^+ S_{n_2}^+ \dots S_{n_k}^+ |hw\rangle \quad (7)$$

$$\hat{C}_2(SU(1,1)|\kappa\mu\rangle = \kappa(\kappa-1)|\kappa\mu\rangle, \quad (3)$$

$$S^0|\kappa\mu\rangle = \mu|\kappa\mu\rangle.$$

حاصل می‌شود. در مدل spd-IBM، سهم جفت‌شدگی بوزون‌های s و d با سهم بوزون‌های p ترکیب می‌شود. روابط زیر نحوه ترکیب سهم بوزون‌های مختلف و بیان بر اساس تعداد هر بوزون بیان می‌نماید [۲۲]،

$$S_s^+ = (S_s^-)^\dagger = \frac{1}{2} s^\dagger s, \quad (4)$$

$$S_s^0 = \frac{1}{4} (s^\dagger s + s s^\dagger) = \frac{1}{2} n_s + \frac{1}{4}$$

$$S_p^+ = (S_p^-)^\dagger = \frac{1}{2} p^\dagger \cdot p^\dagger,$$

$$S_p^0 = \frac{1}{4} \sum_v (p_v^\dagger p_v + p_v p_v^\dagger) = \frac{1}{2} n_p + \frac{3}{4}$$

$$S_d^+ = (S_d^-)^\dagger = \frac{1}{2} d^\dagger \cdot d^\dagger,$$

$$S_d^0 = \frac{1}{4} \sum_v (d_v^\dagger d_v + d_v d_v^\dagger) = \frac{1}{2} n_d + \frac{5}{4}.$$

حال جبر بینهایت بعدی که بر پایه مولدهای جبر آفین $SU(1,1)$ تولید می‌شود را معرفی می‌نمائیم [۲۵]

$$S_n^\pm = c_s^{2n+1} S^\pm(s) + c_p^{2n+1} S^\pm(p) + c_d^{2n+1} S^\pm(d), \quad (5-الف)$$

$$S_n^0 = c_s^{2n} S^0(s) + c_p^{2n} S^0(p) + c_d^{2n} S^0(d)$$

که C_p, C_s, C_d پارامترهای حقیقی بوده و n می‌تواند مقادیر $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را به‌خود بگیرد. به‌سادگی می‌توان نشان داد که این مولدها در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند،

$$[S_m^+, S_n^-] = -2S_{m+n}^0, \quad (5-ب)$$

$$[S_m^0, S_n^\pm] = \pm S_{m+n}^\pm.$$

هامیلتونین گذار $U(5)$ - $SO(9)$ در مدل IBM-1 بر اساس مولدهای جبر آفین $SU(1,1)$ به‌شکل زیر حاصل می‌شود

$$H = g S_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta \hat{C}_2(SO(5))_d + \gamma \hat{C}_2(SO(3))_p + \delta \hat{C}_2(SO(3))_p + \eta \hat{C}_2(SO(3))_{spd} \quad (6)$$

که در این رابطه کمیات $g, \alpha, \gamma, \delta, \eta$ پارامترهای حقیقی هستند. همچنین کازمیرهای گروه‌های $SO(5)$

⁴ Fourier-Laurent expansion

همدوس که در مدل spd-IBM به صورت زیر تعریف می شود:

$$|N, \alpha_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_B}} (\lambda^\dagger)^{N_B} |0\rangle \quad ۱۱$$

$$\lambda^\dagger = s^\dagger + \beta p^\dagger + \beta d^\dagger$$

می توان سطوح انرژی پتانسیل را با محاسبه مقدار چشمداشتی هامیلتونین^۶ روی این حالات تعیین نمود [۲۳].

$$E = \frac{\langle N, \alpha_m | H | N, \alpha_m \rangle}{\langle N, \alpha_m | N, \alpha_m \rangle} \quad ۱۲$$

اثر هر کدام از عملگرهای هامیلتونین بر حالات همدوس، از روابط زیر حاصل می شود،

$$s |N, \alpha_m\rangle = \sqrt{N} |N-1, \alpha_m\rangle$$

$$p_m |N, \alpha_m\rangle = \sqrt{N} \alpha_m |N-1, \alpha_m\rangle \quad ۱۳$$

$$d_m |N, \alpha_m\rangle = \sqrt{N} \alpha_m |N-1, \alpha_m\rangle.$$

برای رسیدن به تعریف سطوح انرژی، ابتدا هامیلتونین ناحیه گذار را بر حسب عملگرهای سازنده آن بسط می دهیم،

$$H = \frac{g}{4} (c_s^2 s^\dagger s^\dagger s s + c_s c_d s^\dagger s^\dagger (\tilde{d} \cdot \tilde{d})) +$$

$$+ c_s c_p s^\dagger s^\dagger (\tilde{p} \cdot \tilde{p}) + c_s c_d (d^\dagger \cdot d^\dagger) s s +$$

$$+ c_s c_p (p^\dagger \cdot p^\dagger) s s + c_d^2 (d^\dagger \cdot d^\dagger) (\tilde{d} \cdot \tilde{d})) + \quad ۱۴$$

$$+ c_p^2 (p^\dagger \cdot p^\dagger) (\tilde{p} \cdot \tilde{p})) + \alpha \left(\frac{c_s^2}{4} (s^\dagger s + s s^\dagger) + \right.$$

$$\left. + \frac{c_p^2}{4} \sum_\mu p_\mu^\dagger p_\mu + p_\mu p_\mu^\dagger \right) + \frac{c_d^2}{4} \sum_\mu d_\mu^\dagger d_\mu + d_\mu d_\mu^\dagger +$$

$$+ \chi C_2(SO(5))_d + \gamma C_2(SO(3))_d +$$

$$+ \delta C_2(SO(3))_p + \eta C_2(SO(3)).$$

سپس مقدار انتظاری هر یک از جملات هامیلتونین را در حالت ذاتی با استفاده از نتایج معادلات ۱۳ تعیین می نمایم،

$$\langle g S_0^+ S_0^- \rangle = \left(\frac{g}{4} \right) \left(\frac{N(N-1)}{(1+\beta^2)^2} \right) \times$$

$$\times (c_s^2 + 2c_s c_d \beta^2 + 2c_s c_p \beta^2 + c_p^2 \beta^4 + c_d^2 \beta^4)$$

با توجه به رفتار تحلیلی توابع موج، می توان تمام x_i ها را صفر فرض نمود. با این فرض و استفاده از روابط جابجائی مولدهای جبر آفین، شکل نهائی تابع موج به صورت

$$|k; v_s v_n \Delta LM\rangle = N S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |hw\rangle \quad ۸$$

حاصل می شود. در این رابطه کمیات $S_{x_i}^+$

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1-c_s^2 x_i} S^+(s) + \frac{c_p}{1-c_p^2 x_i} S^+(p) + \frac{c_d}{1-c_d^2 x_i} S^+(d)$$

می باشند. همچنین مجموعه مقادیر x_i از حل مجموعه معادلات زیر برای هر کدام از $i=1,2,\dots,k$ حاصل می شود،

$$\frac{\epsilon}{x_i} = \frac{g c_s^2 (v_s + \frac{1}{2})}{1-c_s^2 x_i} + \frac{g c_p^2 (v_p + \frac{3}{2})}{1-c_p^2 x_i} +$$

$$+ \frac{g c_d^2 (v + \frac{5}{2})}{1-c_d^2 x_i} - \sum_{i \neq j} \frac{2}{x_i - x_j} \quad ۹$$

رابطه ویژه مقداری یا همان ترازهای انرژی پیش بینی شده توسط این مدل به صورت زیر حاصل می شود،

$$E^{(k)} = h^{(k)} + \chi v(v+3) + \gamma L_d(L_d+1) +$$

$$+ \delta L_p(L_p+1) + \eta L(L+1) + \epsilon \Lambda_1^0, \quad ۱۰$$

$$\Lambda_1^0 = \frac{1}{2} [c_s^2 (v_s + \frac{1}{2}) + c_p^2 (v_s + \frac{3}{2}) + c_d^2 (v + \frac{5}{2})].$$

که کمیت $h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{x_i}$ بوده و از حل مجموعه

معادلات ۹ حاصل می شود. همچنین با برآزش این رابطه به مقادیر تجربی ترازهای انرژی هسته های انتخابی، ثابت های رابطه تعیین می شود.

سطوح انرژی با استفاده از فرمالیسم حالت

ذاتی

یکی از روش های مطالعه گذار فاز کوانتومی در مدل های هسته ای، بررسی گذار فاز کوانتومی از دیدگاه حالت های همدوس می باشد. با استفاده از حالات

حال، این معادله برای حالت $i=1$ حل شده و ریشه‌های حاصل برای حل مراتب بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس با جاگذاری در معادله ۱۰، رابطه ویژه‌مقادیر انرژی و به‌جای کمیت $h^{(k)}$ و برازش به اطلاعات تجربی، سایر ثابت‌های هامیلتونین تعیین می‌شود. نتایج حاصل برای ایزوتوپ‌های انتخابی در جدول ۱ فهرست شده است. همچنین برای بررسی کیفیت فرآیند برازش، میزان انطباق پیش‌بینی‌های مدل با نتایج تجربی، کمیت

$$\sigma = \left(\frac{1}{N_{tot}} \sum_{i,tot} |E_{exp}(i) - E_{th}(i)|^2 \right)^{1/2}$$

را محاسبه خواهیم نمود که در این رابطه N تعداد ترازهای انتخابی برای برازش می‌باشد. کاهش این کمیت نشانگر افزایش دقت محاسبات و کاهش خطا می‌باشد.

جدول ۱. ثابت‌های هامیلتونین (برحسب keV) spd-IBM برای ایزوتوپ‌های مختلف هسته Ru.

هسته	ϵ	χ	γ	δ	η	$c_s (= c_p)$	σ
^{100}Ru	94	3.15	1.58	0.21	60.9	0.46	77
^{102}Ru	90	3.81	1.77	0.47	72.5	0.59	104
^{104}Ru	88	2.94	1.83	0.11	39.7	0.92	129
^{106}Ru	72	4.03	1.61	0.76	54.1	0.98	167

مقایسه طیف حاصل از نتایج این مطالعه و مقایسه آن با اطلاعات تجربی در خصوص هسته‌های انتخابی در جدول‌های ۵-۲ نمایش داده شده است. انطباق قابل قبولی بین محاسبات تئوریک این مطالعه و نتایج تجربی مشاهده می‌شود.

$$\langle \alpha S_1^0 \rangle = \frac{\alpha c_s^2}{4} \left(\frac{2N}{1+\beta^2} + 1 \right) + \frac{\alpha c_d^2}{4} \left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2} + 5 \right) +$$

$$+ \frac{\alpha c_p^2}{4} \left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2} + 3 \right)$$

$$\langle \chi \hat{C}_2(SO(5)) \rangle_d = 2 \frac{\chi N \beta^2}{1+\beta^2}$$

$$\langle \eta \hat{C}_2(SO(3)) \rangle = \frac{3 \eta N \beta^2}{5(1+\beta^2)} \quad 15$$

سطوح انرژی برای ناحیه گذار فازی با تجمیع مجموعه معادلات ۱۵ به شکل زیر منجر می‌گردد،

$$E(\beta, \gamma) = \left(\frac{g}{4} \right) \left(\frac{N(N-1)}{(1+\beta^2)^2} \right) \times$$

$$\times (c_s^2 + 2c_s c_d \beta^2 + 2c_s c_p \beta^2 + c_p^2 \beta^4 + c_d^2 \beta^4) +$$

$$+ \frac{\alpha c_s^2}{4} \left(\frac{2N}{1+\beta^2} + 1 \right) + \frac{\alpha c_d^2}{4} \left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2} + 5 \right) +$$

$$+ \frac{\alpha c_p^2}{4} \left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2} + 3 \right) + 2 \frac{\chi N \beta^2}{1+\beta^2}$$

$$+ \frac{3 \gamma N \beta^2}{5(1+\beta^2)} + \frac{3 \delta N \beta^2}{5(1+\beta^2)} + \frac{3 \eta N \beta^2}{5(1+\beta^2)}. \quad 16$$

تغییرات سطوح انرژی بر اساس پارامتر توصیف کننده فضا، β ، نشانه پدیده گذار فازی شکلی می‌باشد. در ادامه با استفاده از مقادیر ثابت‌های هامیلتونین، این سطوح برای هسته‌های انتخابی نمایش داده خواهد شد.

نتایج عددی

در این مقاله تغییرات سطوح انرژی بر اساس پیش‌بینی‌های مدل جبری spd-IBM برای هسته‌های Ru بررسی شده است. بدین منظور ابتدا با استفاده از تغییر متغیر

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{g} (g = 1 \text{ keV}), c = \frac{c_s (= c_p)}{c_d} \leq 1, y_i = c_d^2 x_i$$

شکل معادله ۹ به صورت زیر تغییر می‌نماید،

$$\frac{\epsilon}{y_i} = \frac{c^2 (v_s + \frac{1}{2})}{1 - c^2 y_i} + \frac{(v_p + \frac{3}{2})}{1 - y_i} + \frac{(v_d + \frac{5}{2})}{1 - y_i} -$$

$$- \sum_{i \neq j} \frac{2}{y_i - y_j}, \quad \text{for } i=1,2,\dots,k \quad 17$$

جدول ۲. طیف انرژی هسته ^{100}Ru . E_{th} نتایج این بررسی را که با جاگذاری مقادیر جدول ۱ در معادلهٔ ۱۰ حاصل شده است، نشان می‌دهد. انطباق قابل قبولی با مقادیر تجربی متناظر، E_{exp} دیده می‌شود. تمامی اعداد اعداد برحسب keV بیان شده‌اند.

تراز	E_{exp}	E_{th}	تراز	E_{exp}	E_{th}
0_1^+	۰	۰	2_1^+	۵۳۹	۵۶۴
4_1^+	۱۲۲۶	۱۲۸۰	3_1^+	۱۸۸۱	۱۹۲۰
6_1^+	۲۰۷۶	۲۱۱۵	0_2^+	۱۱۳۰	۱۱۷۵
2_2^+	۱۳۶۲	۱۳۹۱	4_2^+	۲۰۶۳	۲۱۱۵
0_3^+	۱۷۴۱	۱۷۹۵	2_3^+	۱۸۶۵	۱۹۱۰
0_4^+	۲۰۵۲	۲۰۹۵	2_4^+	۲۰۹۹	۲۱۲۰
3_1^-	۲۱۶۷	۲۲۰۴	2_1^-	۲۴۶۹	۲۵۱۰
1_1^-	۲۵۱۷	۲۵۸۰	5_1^-	۲۵۲۷	۲۵۸۵

جدول ۳. طیف انرژی هسته ^{102}Ru . انطباق قابل قبولی بین نتایج این مطالعه (E_{th}) و مقادیر تجربی متناظر، E_{exp} دیده می‌شود. تمامی اعداد برحسب keV بیان شده‌اند.

تراز	E_{exp}	E_{th}	تراز	E_{exp}	E_{th}
0_1^+	۰	۰	2_1^+	۴۷۵	۵۰۲
4_1^+	۱۱۰۶	۱۱۲۵	3_1^+	۱۵۲۲	۱۵۶۰
6_1^+	۱۸۷۳	۱۹۱۰	0_2^+	۹۴۴	۹۷۸
2_2^+	۱۱۰۳	۱۱۳۵	4_2^+	۱۷۹۹	۱۸۳۵
0_3^+	۱۸۳۷	۱۸۸۰	2_3^+	۱۵۸۱	۱۶۰۲
0_4^+	۱۹۶۸	۲۰۰۴	2_4^+	۲۰۳۷	۲۰۸۵
3_1^-	۲۰۴۳	۲۰۸۵	2_1^-	۲۲۶۱	۲۲۹۰
7_1^-	۲۷۰۶	۲۷۶۵	5_1^-	۲۳۷۳	۲۴۱۱

جدول ۴. طیف انرژی هسته ^{104}Ru . انطباق قابل قبولی بین نتایج این مطالعه (E_{th}) و مقادیر تجربی متناظر، E_{exp} دیده می‌شود. تمامی اعداد برحسب keV بیان شده‌اند.

تراز	E_{exp}	E_{th}	تراز	E_{exp}	E_{th}
0_1^+	۰	۰	2_1^+	۳۵۸	۳۹۴
4_1^+	۸۸۸	۹۳۵	3_1^+	۱۲۴۲	۱۲۷۵
6_1^+	۱۵۵۶	۱۶۰۴	0_2^+	۹۸۸	۱۰۲۲
2_2^+	۸۹۳	۹۱۴	4_2^+	۱۵۰۳	۱۵۴۰
0_3^+	۱۳۳۵	۱۳۸۰	2_3^+	۱۵۱۵	۱۵۷۰
0_4^+	-	۱۶۲۰	2_4^+	۱۷۵۰	۱۷۹۲
3_1^-	۱۹۷۰	۲۰۱۰	2_1^-	-	۲۰۶۵
7_1^-	۲۶۱۴	۲۶۷۰	5_1^-	۲۲۳۳	۲۲۸۰

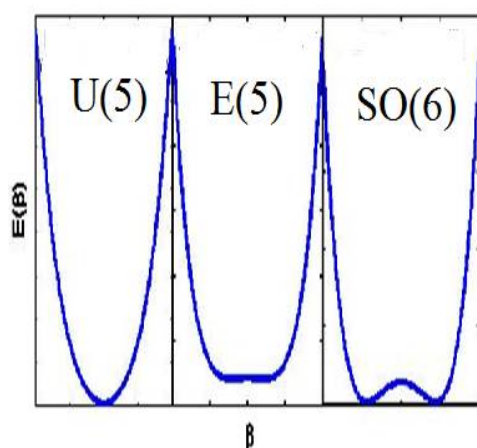
جدول ۵. طیف انرژی هسته ^{106}Ru . انطباق قابل قبولی بین نتایج این مطالعه (E_{th}) و مقادیر تجربی متناظر، E_{exp} دیده می‌شود. تمامی اعداد برحسب keV بیان شده‌اند.

تراز	E_{exp}	E_{th}	تراز	E_{exp}	E_{th}
0_1^+	۰	۰	2_1^+	۲۷۰	۳۱۵
4_1^+	۷۱۵	۷۶۱	3_1^+	۱۰۹۲	۱۱۵۰
6_1^+	۱۲۹۶	۱۳۴۰	0_2^+	۹۹۱	۱۰۴۵
2_2^+	۷۹۲	۸۵۴	4_2^+	۱۳۰۷	۱۳۳۵
0_3^+	۲۶۳۴	۲۶۹۰	2_3^+	۱۳۹۲	۱۴۳۰
0_4^+	-	۲۹۴۵	2_4^+	۱۷۷۴	۱۸۲۰
3_1^-	-	۲۰۷۱	6_1^-	۲۴۸۵	۲۵۴۷
7_1^-	۲۵۴۴	۲۶۰۳	5_1^-	-	۲۸۴۴

در این مطالعه علاوه بر انتخاب ترازهای با اسپین پاریته مثبت، ترازهای 1^- ، 3^- ، 5^- و ... نیز انتخاب شده است که مدل‌های قبلی قادر به توصیف آنها نمی‌باشند. همچنین تعدادی از هسته‌های مطالعه شده در این مقاله، در منبع [۱۸] با استفاده از هامیلتونین جبری بر پایهٔ جبر آفین $SU(1,1)$ و در منابع [۱۹-۲۳] با استفاده از روش‌های منطبق بر تقریب هارتری-فوک^۵ و ... بررسی شده‌اند. در این بررسی‌ها سهم ترازهای با اسپین پاریته فرد وارد نشده و همچنین تمام ترازهای انتخابی در این مطالعه، در مطالعات دیگر وجود ندارد. به دلیل عدم وجود تعداد ترازهای انتخابی مشابه بین این مقاله و

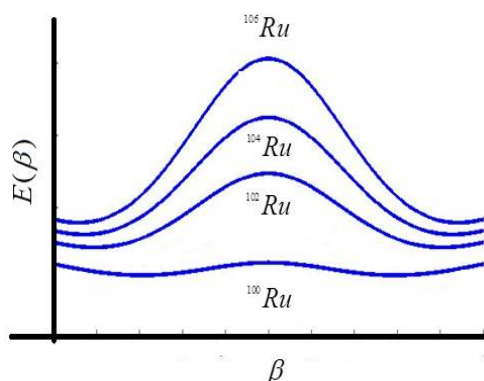
⁵ Hartree-Fock approximation

صورت گرفته در منابع [۲۳-۱۸]، انتظار داریم که سطوح انرژی برای آن دسته از هسته‌های ناحیه گذار، تغییرات پهن داشته باشد. از طرفی هسته‌های متناظر با تقارن‌های $U(5)$ و $SO(9)$ به ترتیب یک و دو مینیمم در سطوح انرژی خود خواهند داشت که در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲. حالت عمومی سطوح انرژی برای هسته‌های متناظر با تقارن‌های دینامیکی $U(5)$ ، $SO(9)$ و $E(5)$.

با استفاده از رابطه ۱۶، سطوح انرژی برای هسته‌های انتخابی حاصل می‌شود که نتایج در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳. سطوح انرژی برای هسته‌های انتخابی. سطح انرژی هسته ^{100}Ru ، نزدیکترین شکل به شکل سطح انرژی متناظر با نقطه بحرانی گذار فازی می‌باشد.

شکل‌های حاصل برای سطوح انرژی هسته‌های مورد مطالعه نتیجه حاصل برای مقادیر پارامترهای کنترلی را

سایر مطالعات، امکان مقایسه نتایج به‌طور کامل وجود ندارد ولی در مقایسه تعداد ترازهای مشابه، کاهش قابل توجه کمیت σ و لذا افزایش دقت نتایج این مقاله تأیید می‌شود.

البته ما در این مطالعه وزن تأثیر جفت‌شدگی هر دو نوع اسپین s و p را مشابه فرض نمودیم. این نتیجه سبب مقدار مشابه پارامترهای کنترلی $c_s=c_p$ می‌شود. نتایج حاصل انطباق قابل قبولی بین پیش‌بینی مدل spd -IBM و مقادیر تجربی متناظر را نشان می‌دهد.

نتایج حاصل برای مقدار پارامتر کنترلی مدل spd -IBM، هسته ^{100}Ru را نزدیکترین هسته برای قرار گرفتن در نقطه بحرانی این گذار فازی شکلی ($c_s=c_p=0.50$) پیشنهاد می‌دهد. از طرف دیگر، نسبت ترازهای انرژی $R_{4/2} = E(4_1^+) / E(2_1^+)$ برای هسته‌های متناظر با نقطه بحرانی $E(5)$ ، یعنی نقطه بحرانی این ناحیه گذار فازی شکلی، 2.25 پیشنهاد شده است [۱۸]. با توجه به مقدار این کمیت برای هسته ^{100}Ru ، 2.27 ، نتیجه حاصل از مقادیر پارامترهای کنترلی و پیشنهاد این هسته برای نقطه بحرانی، تأیید می‌شود. همچنین نتیجه حاصل از این مطالعه و پیشنهاد هسته ^{100}Ru به‌عنوان نمونه مناسب برای نقطه بحرانی این ناحیه گذار فازی شکلی، در انطباق با پیش‌بینی‌های منبع [۱۸] می‌باشد.

از طرفی می‌توان این نتیجه را براساس سهم بوزون‌های p ارزیابی نمود. با اضافه شدن سهم این بوزون، نقطه بحرانی متناظر با تقارن دینامیکی $E(7)$ خواهد بود. ویژگی‌های هسته‌های متناظر با این حد دینامیکی جدید نیاز به بررسی‌های بیشتری دارد که ما در مطالعات بعدی به آن خواهیم پرداخت.

در این مطالعه، ویژگی‌های تقارنی متناظر با ناحیه گذار فازی شکلی در هسته‌های انتخابی بر اساس فرمالیسم حالت ثانویه نیز بررسی گردید. بدین منظور، مقادیر حاصل از برازش به اطلاعات تجربی فهرست شده در جدول ۱ در رابطه ۱۶ جاگذاری شد. مطابق پیش‌بینی‌های

هسته‌ها، همپوشانی اطلاعات و آپاشی مختلف هسته‌های انتخابی را میسر می‌سازد. همچنین، این مطالعه با اضافه شدن سهم متفاوت این دو بوزون قابل بررسی می‌باشد که ما در مطالعات بعدی به آن خواهیم پرداخت.

نتیجه‌گیری

در این مطالعه طیف انرژی و سطوح انرژی هسته‌های $Ru^{100-106}$ در ناحیه گذار فازی شکلی بین حدود تقارنی $U(5)$ و $SO(9)$ مطالعه شد. بدین منظور از یک هامیلتونین جبری برهم‌کنش بوزونی در برگزیده سه نوع بوزون p, s و d در قالب جبر $SU(1,1)$ استفاده شد. نحوه حل معادلات و محاسبه اثر هامیلتونین گذار فازی شکلی بر روی حالت هم‌دوس ارائه گردید. پیش‌بینی‌های نظری حاصل از مدل جبری با دقت قابل قبولی اطلاعات تجربی را بازیابی می‌نماید. توصیف هم‌زمان حالات دارای اسپین پاریده متفاوت در مدل انتخابی ما امکان شناسایی آن دسته از ترازهای فاقد اسپین پاریده در طیف تجربی را فراهم می‌سازد. همچنین نتیجه حاصل برای مقدار پارامترهای کنترلی مدل و همچنین شکل سطوح انرژی، هسته Ru^{100} را به‌عنوان بهترین نمونه در این زنجیره برای توصیف تقارن دینامیکی $E(5)$ پیشنهاد می‌دهد. این مطالعه را می‌توان برای سایر هسته‌های این محدوده جرمی نیز انجام داد. همچنین انتخاب حالت هم‌دوسی که سهم بوزون‌های مختلف در آن متفاوت می‌باشد نتایج دقیقتری را به‌همراه خواهد داشت.

مرجع‌ها

- [1] D. Rowe, Phase transitions and quasidynamical symmetry in nuclear collective models: I. The $U(5)$ to $O(6)$ phase transition in the IBM, *Nuclear Physics A* **745** (2004) 47-78.
- [2] P. Turner, D. Rowe, Phase transitions and quasidynamical symmetry in nuclear collective

تأیید می‌نماید. در زنجیره ایزوتوپی Ru ، نزدیکترین شکل به حد دینامیکی برای هسته Ru^{100} حاصل شده است که نتایج ما در خصوص پارامتر کمتر لی نیز، همین پیشنهاد را حاصل می‌نمایند. همچنین مقادیر پارامترهای کنترلی برای دو هسته Ru^{104} و Ru^{106} ، این دو هسته را به‌عنوان نمونه‌های مناسب برای تقارن $SO(6)$ معرفی می‌نماید. سطوح انرژی نمایش داده شده در شکل ۳ و وجود دو کمینه در این سطوح برای این هسته‌ها، نتیجه مشابه را پیشنهاد می‌نماید. قرار گرفتن هسته Ru^{100} در نزدیکی نقطه بحرانی این ناحیه گذار فازی شکلی، اهمیت ترکیب تقارن‌های متفاوت در ساختار این هسته‌ها را نشان می‌دهد. ترکیب تقارن‌ها خود سبب وجود پدیده همزیستی شکلی^۶ ناشی از مشاهده حالات مزاحم^۷ می‌شود که در مطالعات بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

سطوح انرژی برای زنجیره ایزوتوپی $Ru^{100-106}$ با فرض حالت هم‌دوسی حاصل شد که سهم جفت شدگی بوزون‌های s و p در آن مشابه بودند. دو پارامتر C_p و C_s علاوه بر نقش کنترل پدیده گذار فازی شکلی بین حدود دینامیکی مدل، سهم نیروی جفت شدگی متناظر با هریک از این بوزون‌ها را نشان می‌دهند. نیروی جفت شدگی برای بوزون‌های مختلف در مقایسه با اندر کنش چهار قطبی، نقش ایجاد نظم در ساختار طیف انرژی هسته‌ها را بر عهده دارد. رقابت این دو نیرو سبب ایجاد ساختار هسته‌ها تغییر شکل یافته می‌شود. افزایش سهم جفت شدگی هر کدام از این دو نوع بوزون خاص، تغییر شکل ناشی از آن را در هسته افزایش می‌دهد که می‌توان با محاسبه مقدار چشمداشتی متناظر با عدد هر یک از بوزون‌ها، تغییرات حاصل را تحقیق نمود. علاوه بر این، ایجاد نظم در چارچوب هسته‌های مختلف به‌دلیل سهم بیشتر نیروهای جفت شدگی و نقش آن در توزیع زاویه‌ای تابش‌های حاصل از تغییرات ساختاری

⁷ intruder states

⁶ shape coexistence

- Nuclear and Particle Physics* **43** (2016) 095108-095115.
- [16] F. Pan, Y. Zhang, H.C. Xu, L.R. Dai, J.P. Draayer, (2015). Alternative solvable description of the E (5) critical point symmetry in the interacting boson model. *Physical Review C* **91**(2015) 034305-034311.
- [17] A. Leviatan, Intrinsic and collective structure in the interacting boson model, *Annals of Physics* **179** (1987) 201-271.
- [18] F. Pan, J. Draayer, New algebraic solutions for SO (6)↔ U (5) transitional nuclei in the interacting boson model, *Nuclear Physics A* **636** (1998) 156-168.
- [19] G. Maino, A. Ventura, L. Zuffi, F. Iachello, Properties of giant resonances in the interacting boson model. *Physical Review C* **30**(6), (1984) 2101-2111.
- [20] C. Alonso, M. Andrés, J. Arias, E. Lanza, A. Vitturi, Coupling of dipole mode to γ -unstable quadrupole oscillations, *Nuclear Physics A* **679** (2001) 359-372.
- [21] F. Scholtz, F. Hahne, Giant dipole resonances in the interacting boson model, *Physics Letters B* **123** (1983) 147-150.
- [22] F. Pan, X. Zhang, J. Draayer, Algebraic solutions of an sl-boson system in the U (21+ 1) longleftrightarrow O (21+ 2) transitional region, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** (2002) 7173-7178.
- [23] K. Nomura, D. Vretenar, T. Nikšić, B.-N. Lu, Microscopic description of octupole shape-phase transitions in light actinide and rare-earth nuclei, *Physical Review C* **89** (2014) 024312-024322.
- [24] H. Fathi, M. Ghadami, H. Sabri, N. Fouladi, M. Jafarizadeh, Investigation of shape phase transition in the U (5)↔ SO (6) transitional region by catastrophe theory and critical exponents of some quantities, *International Journal of Modern Physics E* **23** (2014) 1450045-1450060.
- [25] M. Jafarizadeh, A.J. Majarshin, N. Fouladi, Simultaneous description of low-lying positive and negative parity states in s p d, s d f and s p d f interacting boson model, *International Journal of Modern Physics E* **25** (2014) 1650089-1650099.
- [26] A. Jalili Majarshin, M. Jafarizadeh, N. Fouladi, Algebraic solutions for two-level models. II. The spherical vibrator to gamma-soft rotor transition in an SO (5)-invariant Bohr model, *Nuclear Physics A* **756** (2005) 333-355.
- [3] G. Rosensteel, D. Rowe, Phase transitions and quasi-dynamical symmetry in nuclear collective models, III: The U (5) to SU (3) phase transition in the IBM, *Nuclear Physics A* **759** (2005) 92-128.
- [4] F. Iachello, *Interacting bosons in nuclear physics*, Springer Science & Business Media, (2012).
- [5] A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear structure, vol. II*, Benjamin, New York, (1975).
- [6] R. Gilmore, S. Deans, Phase transitions and the geometric properties of the interacting boson model, *Physical Review C* **23** (1981) 1254-1266.
- [7] R. Gilmore, Comparison of the logical structure of the liquid drop model and the interacting boson model, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **9** (1983) 495-509.
- [8] A. Leviatan, Broken O (5) and O (3) symmetries in a general non-spherical boson basis, *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei* **321** (1985) 467-472.
- [9] M. Spieker, S. Pascu, A. Zilges, F. Iachello, Origin of Low-Lying Enhanced E 1 Strength in Rare-Earth Nuclei, *Physical Review Letters* **114** (2015) 192504-192507.
- [10] J. Arias, E2 transitions and quadrupole moments in the E (5) symmetry, *Physical Review C* **63** (2001) 034308-034315.
- [11] F. Iachello, Dynamic symmetries at the critical point, *Physical Review Letters* **85** (2000) 3580-3584.
- [12] F. Iachello, Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition, *Physical Review Letters* **87** (2001) 052502-052508.
- [13] D. Rowe, M. Carvalho, J. Repka, Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics, *Reviews of Modern Physics* **84** (2012) 711.
- [14] F. Iachello, A. Arima, *The interacting boson model*, Cambridge University Press (1987).
- [15] M. Jafarizadeh, A.J. Majarshin, N. Fouladi, M. Ghapanvari, Investigation of quantum phase transitions in the spdf interacting boson model based on dual algebraic structures for the four-level pairing model, *Journal of Physics G:*

[29] J. Blachot, Nuclear Data Sheets for A=104, *Nuclear Data Sheets* **108** (2007) 2035-2187.

[30] D. De Frenne, A. Negret, Nuclear Data Sheets for A=106, *Nuclear Data Sheets* **109** (2008) 943-1108.

pairing model in IBM-2 and IVBM, *European Physical Journal Plus* **131** (2016) 337-356.

[27] B. Singh, Nuclear Data Sheets for A=100, *Nuclear Data Sheets* **109** (2008) 297-311.

[28] D. De Frenne, Nuclear Data Sheets for A=102, *Nuclear Data Sheets* **110** (2009) 1745-1855.

Study of $^{100-106}\text{Ru}$ isotopic chain in the three levels interacting boson model

Amir Jalili Majarshin, Hadi Sabri*

Faculty of physics, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Received: 05.01.2017 Final revised: 27.04.2017 Accepted: 29.05.2017

Abstract

In this paper, we have considered the energy levels and energy surfaces of nuclei located between the spherical and the gamma soft shapes. We have used a three levels spd-interacting boson model which are defined in the affine $SU(1,1)$ algebra to describe both positive and negative parity states. The energy surfaces of $^{100-106}\text{Ru}$ isotopes are determined via catastrophe theory and coherent states formalism in the $U(5)$ - $SO(9)$ transitional region of interacting boson model. The agreement between the theoretical prediction of model and the most recent experimental counterparts is acceptable. Also, the variation of the energy surface's shapes suggests a second order shape phase transition in this isotopic chain. The values of the control parameters and also the shape of energy surfaces suggest ^{100}Ru as the best candidate for the critical point of this transitional region.

Keywords: Quantum shape phase transition, Coherent state, Three levels Interacting Boson

* Corresponding Author: h-sabri@tabrizu.ac.ir