

حل معادلات سینیتیک نقطه‌ای راکتور با شش گروه نوترون تأخیری به کمک روش هم‌محلی

مسعود صیدی^{1*}، پرویز دارانیا²، سعید پیش‌بین³

¹ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

^{2,3} دانشکده ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

دریافت: 1396/06/01 ویرایش نهایی: 1396/11/15 پذیرش: 1396/12/13

چکیده

در این پژوهش ما از روش همگامی به‌عنوان یک روش عددی جدید برای حل معادلات سینیتیک نقطه‌ای راکتور در حضور راکتیویته‌های پله‌ای، خطی و سینوسی با شش گروه نوترون تأخیری استفاده کرده‌ایم. کد محاسباتی روش همگامی با نرم افزار متمتیکا نوشته شده است. این روش علاوه بر زمان کم محاسبه و همگرایی جواب‌ها، دارای دقت بالایی می‌باشد. نتایج محاسبات عددی روش همگامی در مقایسه با روش‌های عددی دیگر نشان می‌دهد که این روش کارآمد و دقیق می‌باشد لذا از آن می‌توان برای محاسبات دینامیکی در مرحله راه اندازی راکتور استفاده کرد.

کلیدواژه‌گان: راکتیویته سینوسی، روش همگامی، ستیک نقطه‌ای راکتور، نوترون تأخیری

مقدمه

تحلیل نمایی² (AEM) معادلات NPK را به‌طور تحلیلی با راکتیویته پله‌ای برای یک راکتور سریع حل کرد. نه‌لا در سال 2008 از روش تعمیم یافته تحلیل نمایی³ (GAEM) برای حل تحلیلی معادلات نقطه‌ای راکتور با کند کننده Be و D_2O استفاده کرد [3]. پالما و همکاران در 2009 این معادلات را به‌کمک روش فاکتور انتگرالگیری حل کردند [4]، سیستم تحت مطالعه آنها یک راکتور حرارتی بود که طی دو مرحله تزریق راکتیویته پله‌ای و رمپ راه‌اندازی می‌گردید. از روش‌های تحلیلی دیگر می‌توان به‌موارد زیر اشاره کرد:

اساس تحلیل دینامیک راکتور، معادلات سینیتیک نقطه‌ای نوترون¹ (NPK) می‌باشند. این معادلات به‌خوبی چگالی نوترن که بیانگر سطح توان راکتور می‌باشد و همچنین غلظت والدهای نوترون تأخیری را توصیف می‌کنند [1]. معادلات NPK یک مجموعه از معادلات جفت شده هستند که با توجه به راکتیویته تزریق شده به قلب راکتور می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند. به‌دلیل اهمیت این معادلات در طراحی و کنترل راکتور، جواب‌های تحلیلی و عددی این معادلات مورد توجه بسیاری از محققین هسته‌ای می‌باشند. تلاش‌های زیادی از سالیان قبل تاکنون جهت پیدا کردن جواب‌های تحلیلی و عددی معادلات NPK صورت گرفته است. در سال 2003 ایوانبر [2]، به‌کمک روش

* نویسنده مسئول: masoudseidi@yahoo.com

¹ Neutron Point Kinetic Equations

² Analytical Exponential Method

³ Generalized Analytical Exponential Method

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

روش‌های HM، TSM، GRK، DM، PCA و SCM مقایسه کرده‌ایم.

روش هم‌محلی

معادلات سینیتیک نقطه‌ای راکتور برای m گروه نوترون تأخیری و بدون در نظر گرفتن اثرات راکتیویته پس‌خورد دمایی عبارتند از [23-25]:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho(t) - \beta_0}{l} \right) n(t) + \sum_{i_0=1}^{m_0} \lambda_{i_0} c_{i_0}(t) \quad 1$$

$$\frac{dc_{i_0}(t)}{dt} = \left(\frac{\beta_{i_0}}{l} \right) n(t) - \lambda_{i_0} c_{i_0}(t), \quad 2$$

$$i_0 = 1, 2, \dots, m_0$$

که در آن $n(t)$ ، چگالی نوترون (توان راکتور)، $c_i(t)$ ، غلظت i -امین گروه از والد‌های نوترون تأخیری، λ_i ، ثابت واپاشی i -امین گروه از نوترون‌های تأخیری، β_i ، کسر i -امین گروه از نوترون‌های تأخیری، $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$ ، کسر کل نوترون‌های تأخیری، l ، زمان نسل نوترون‌های آبی و $\rho(t, n(t))$ ، راکتیویته خالص سیستم می‌باشد. در واقع راکتیویته خالص سیستم را می‌توان به صورت مجموع راکتیویته پس‌خورد سیستم (ρ_f) و راکتیویته خارجی اعمال شده به سیستم (ρ_{ext}) نوشت [26]. البته در اینجا ما سهم جمله چشمه خارجی ($q(t)$) را در محاسبات وارد کرده و مسئله را در حالت کلی و در بازه زمانی $[0, T]$ حل می‌کنیم، لذا معادله 1 به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta_0}{l} n(t) + \sum_{i_0=1}^{m_0} \lambda_{i_0} c_{i_0} + q(t), [0, T] \quad 3$$

- 1- حل تحلیلی معادلات NPK با استفاده از ریشه‌های معادله در ساعت¹ و محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ضرایب [5].
- 2- روش تجزیه² (DM) [6].
- 3- روش بسط چگالی نوترون و راکتیویته در جملاتی از زمان نسل نوترون‌های آبی [7].
- 4- حل تحلیلی یومه و همکاران در سال 2013 با استفاده از روش ضرایب ماتریسی معادله دیفرانسیل همگن [7].
- 5- استفاده از فرمالیسم انتگرالی بسط سری تیلور مرتبه پایین توابع چگالی نوترون و راکتیویته [8].

روش‌های حل عددی حل معادلات NPK از نوع بیشتری برخوردارند و تفاوت عمده آنها در سادگی، زمان محاسبه، دقت و همگرایی جواب‌ها می‌باشند. عمده‌ترین روش‌های عددی عبارتند از: روش سری توانی³ (PWS) [10، 11]، روش تقریب تکه‌ای ثابت راکتیویته⁴ (PCA) [12]، روش هانسن⁵ (HM) [13]، روش سری تیلور⁶ (TSM) [14]، روش‌های رانگ-کوتا⁷ (RK) [15]، روش‌های رانگ-کوتای تعمیم یافته⁸ (GRK) [16]، روش تحدید سفت شدگی⁹ (SCM) [17]، روش‌های عددی بر مبنای تقریب پاده و چیبیشف [18]، روش‌های چند نقطه‌ای [19] و روش ITS2 برای حل معادلات دارای راکتیویته پس‌خورد دمایی [20] اشاره کرد. در این تحقیق ما از روش هم‌محلی¹⁰ (COM) [21، 22] به عنوان یک روش جدید برای حل معادلات NPK در حضور راکتیویته‌های پله‌ای، رمپ و سینوسی با در نظر گرفتن شش گروه والد نوترون تأخیری استفاده نموده و نتایج حاصل را با

⁶ Taylor Series Method

⁷ Rungee-Kutta

⁸ Generalized Rungee-Kutta

⁹ Stiffness Confinement Method

¹⁰ Collocation Method

¹ Inhour

² Decomposition Method

³ Power Series Solution

⁴ Piecewise Constant Approximation

⁵ Hansen Method

جواب هم محلی $n_h \in S_m^{(0)}(I)$ در معادله هم محلی زیر با شرط اولیه $n_h(0) = n_0$ صدق می‌کند،

$$\frac{dn_h(t)}{dt} = f(t) + p(t)n_h(t) + \int_0^t k_{1,m}(t,s)n_h(s)ds, \quad t \in \chi_h \quad 10$$

که در آن مجموعه نقاط هم محلی است که عبارت است از:

$$\chi_h = \{t_{i,j} \mid t_j + c_i h : 0 \leq c_i \leq c_2 < \dots < c_m \leq 1, 0 \leq n \leq N-1\}.$$

اکنون با تعریف $N_{j,r} = n_h'(t_j + c_r h)$ و با استفاده از چند جمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ

$$L_r(v) = \prod_{i=1, i \neq r}^m (v - t_i) / (t_r - t_i)$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{dn_h(t_j + vh)}{dt} = \sum_{r=1}^m L_r(v) N_{j,r}, \quad v \in (0,1] \quad 11$$

و با استفاده از 11 خواهیم داشت:

$$n_h(t_j + vh) = n_j + h \sum_{r=1}^m \beta_r(v) N_{j,r}, \quad v \in [0,1] \quad 12$$

که در آن:

$$\beta_r(v) = \int_0^v L_r(s) ds, \quad n_j = n_h(t_j).$$

با توجه به خواص انتگرال‌ها و جای‌گذاری معادلات 11 و 12 در معادله 10، به‌ازای $t = t_{i,j}$ جمله شامل انتگرال در نقاط هم محلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\int_0^t k_{1,m_0}(t,s)n_h(s)ds = F_j(t_{j,i}) \quad 13$$

$$+ h \int_0^{c_i} k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_j + sh)n_h(t_j + sh)ds$$

پارامترهای تعریف شده در معادله 13 عبارتند از:

$$F_j(t_{j,i}) = \sum_{l=0}^{j-1} h \int_0^1 k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_l + sh) \{n_l + h \sum_{r=1}^m \beta_r(s) N_{l,r}\} ds \quad 14$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

حال با قرار دادن روابط 13 و 14 در رابطه 10 و ساده‌سازی آن به معادله هم محلی می‌رسیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dc_{i_0}(t)}{dt} = \frac{\beta_{i_0}}{l} n(t) - \lambda_{i_0} c_{i_0} \quad 4$$

برای دستگاه معادلات 3 و 4، شرایط اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} n(0) = n_0 = 1 \\ c_{i_0(0)} = \frac{n_0 \beta_{i_0}}{l \lambda_{i_0}}, \quad i_0 = 1, 2, \dots, m_0 \end{cases} \quad 5$$

حال با تعریف عامل انتگرال ساز زیر می‌توان جواب تحلیلی معادله 3 را برحسب $n(t)$ به‌دست آورد:

$$\mu_{c_{i_0}}(t) = \exp\left(\int \lambda_{i_0} dt\right) = \exp(\lambda_{i_0} t) \quad 6$$

بنابراین حاصل می‌شود:

$$c_{i_0}(t) = c_{i_0(0)} \exp(-\lambda_{i_0} t) \frac{\beta_{i_0}}{l} \times \int_0^t \exp(-\lambda_{i_0}(ts)) n(s) ds \quad 7$$

با جای‌گذاری معادله 7 در معادله 3 و ساده‌سازی آن به معادله انتگرالی-دیفرانسیلی خطی زیر می‌رسیم:

$$\frac{dn(t)}{dt} = f(t) + p(t)n(t) + \int_0^t k_{1,m_0}(t,s)n(s)ds, \quad n(0) = n_0 \quad 8$$

پارامترهای تعریف شده در معادله 8 عبارتند از:

$$f(t) = \frac{1}{l} \sum_{i_0=1}^{m_0} \beta_{i_0} \exp(-\lambda_{i_0} t) + q(t), \quad P(t) = \frac{\rho(t) - \beta_0}{l},$$

$$k_{1,m_0}(t,s) = \sum_{i_0=1}^{m_0} k_{i_0}(t,s),$$

$$k_{i_0}(t,s) = \frac{\lambda_{i_0} \beta_{i_0}}{l} \exp(-\lambda_{i_0}(t-s)).$$

معادله 8 یک معادله انتگرالی-دیفرانسیلی خطی ولترای مرتبه اول با شرط اولیه $n(0) = n_0$ می‌باشد. برای حل آن با استفاده از روش هم محلی، فضای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای به‌فروم زیر را تعریف می‌کنیم:

$$S_m^{(0)}(I) = \{V \in C(I) : V|_{\delta_i} \in \pi_m, 0 \leq n \leq N-1\} \quad 9$$

که در آن π_m فضای هم چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجه کمتر یا مساوی m با طول گام $h = T/N$ و $t_i = t_0 + ih$ می‌باشد.

منحصره‌فرد است، می‌توان جواب‌های هم محلی معادله 10 را با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

$$n_h(t_j + \theta h) = n_j + h\beta^T(\theta)N_j, \theta \in [0, 1]$$

که در اینجا پارامتر $\beta(\theta)$ عبارت است از:

$$\beta(\theta) = (\beta_1(\theta), \dots, \beta_m(\theta))^T \in R^m.$$

نتایج همگرایی سراسری

روش هم محلی با توجه به منحصره‌فرد بودن جواب دستگاه خطی 16، همگرا می‌باشد و مرتبه همگرایی آن از سایر روش‌های عددی بهتر است. چنانکه در معادله انتگرالی-دیفرانسیلی 8 برای تابع مفروض زیر

$$n_h \in S_m^{(0)}(I), \quad k_{1,m_0} \in C^m(D),$$

$$\rho(t), \quad f(t) \in C^m(I)$$

بیشترین خطا عبارت است از:

$$\text{Max} |n^{(v)}(t) - n_h^{(v)}(t)|_{t \in [0, T]} = 17$$

$$\|n^{(v)} - n_h^{(v)}\|_{\infty} \leq C_v \|n^{(m+1)}\|_{\infty} h^m, \quad v = 0, 1.$$

که در آن C_v ثابت حقیقی وابسته به پارامترهای هم محلی $\{C_i\}$ می‌باشد که به h وابسته نیستند.

بنا به رابطه 17، روش هم محلی دارای مرتبه همگرایی m است. با در نظر گرفتن ارتباط بین مرتبه همگرایی

و دقت روش، با افزایش m می‌توان روش‌های عددی

با دقت مناسب را به دست آورد. البته در افزایش m نیز

باید دقت شود، زیرا این افزایش می‌تواند باعث افزایش

محاسبات شده و خطای محاسباتی مضاعفی را به مسئله

تحمیل نماید. توجه کنید که روش هم محلی بر اساس

چند جمله‌ای‌های تکه‌ای عمل می‌کند و در هر مرحله

از اجرای روش (به‌ازای $0 \leq n \leq N-1$) یک

دستگاه خطی $m \times m$ حل می‌شود.

نتایج و بحث

در اینجا ما از COM به‌عنوان یک روش جدید که تاکنون در محاسبات دینامیک راکتور مورد استفاده قرار

$$\begin{aligned} & N_{j,r} - hp(t_{j,i}) \sum_{r=1}^m a_{i,r} N_{j,r} - \\ & h^2 \sum_{r=1}^m \left(\int_0^{c_i} k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_j + sh) \beta_r(s) ds \right) \times N_{j,r} \quad 15 \\ & = f(t_{j,i}) + F_j(t_{j,i}) + (P(t_{j,i}) \\ & + h \int_0^{c_i} k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_j + sh) ds) \times n_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

برای تبدیل معادله 15 به یک دستگاه معادلات خطی و نوشتن آن به شکل ماتریسی، بردارها و ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$N_j = (N_{j,1}, \dots, N_{j,m})^T \in L(R^m)$$

$$\partial_j = (P(t_{j,1}), P(t_{j,2}), \dots, P(t_{j,m}))^T \in L(R^m)$$

$$f_j = (f(t_{j,1}), \dots, f(t_{j,m}))^T \in L(R^m)$$

$$G_j = (F_j(t_{j,1}), F_j(t_{j,2}), \dots, F_j(t_{j,m}))^T \in L(R^m)$$

$$A = (a_{i,r}, i, r = 1, 2, \dots, m),$$

$$A_j = \text{diag}(P(t_{j,i}))A$$

$$C_j = \left(\int_0^{c_i} k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_j + sh) \beta_r(s) ds \right)$$

$$C_j^l = \left(\int_0^1 k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_l + sh) \beta_r(s) ds \right),$$

$$l < j, i, r = 1, 2, \dots, m$$

که در آن $a_{i,r} = \beta_r^l(C_i)$ می‌باشد، همچنین با تعریف

$$H_j = \partial_j + h \left(\int_0^{c_i} k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_j + sh) ds \right)^T$$

$$, i = 1, 2, \dots, m$$

به‌ازای $0 < l < j < N-1$ می‌توان $H_j^{(l)}$ را به صورت زیر

نوشت:

$$H_j^{(l)} = \left(\int_0^1 k_{1,m_0}(t_{j,i}, t_l + sh) ds, i = 1, 2, \dots, m \right)^T \in R^m.$$

با انجام مقداری محاسبه در نهایت می‌توان به معادله زیر رسید:

$$\begin{aligned} [I_m - h(A_j + hC_j)] N_j &= f_j + G_j \\ &+ H_j n_j, \quad 16 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

که در آن

$$G_j = (F_j(t_{j,1}), \dots, F_j(t_{j,m}))^T = \sum_{l=0}^{N-1} h^2 C_j^{(l)} H_j^{(l)} n_l.$$

اکنون با حل دستگاه معادلات خطی 16 که دارای جواب

می‌توان گفت که پیش بینی معادلات NPK با افزایش راکتیویته پله‌ای متحمل خطای بیشتری خواهد شد.

جدول 1. چگالی نوترون با راکتیویته ثابت به‌ازای مقادیر مختلف زمان نسل نوترون

$\rho_0 = 0.003$			
$l [s]$	$t [s]$	DM	COM
10^{-3}	10^{-5}	1,00003	1,00003
10^{-3}	10^{-3}	1,00299	1,00299
10^{-3}	10^{-1}	1,24847	1,24840
10^{-3}	1	1,96728	1,97745
10^{-3}	10	6,65661	7,18502
10^{-4}	10^{-5}	1,00030	1,00030
10^{-4}	10^{-3}	1,02941	1,02941
10^{-4}	10^{-1}	1,76528	1,76684
10^{-4}	1	2,18765	2,20294
10^{-4}	10	7,78318	8,64576
10^{-5}	10^{-5}	1,00299	1,00299
10^{-5}	10^{-3}	1,24728	1,24723
10^{-5}	10^{-1}	1,80228	1,80381
10^{-5}	1	2,21266	2,23149
10^{-5}	10	8,03659	8,69624
10^{-6}	10^{-5}	1,02941	1,02941
10^{-6}	10^{-3}	1,73656	1,73711
10^{-6}	10^{-1}	1,80477	1,80626
10^{-6}	1	2,21520	2,23225
10^{-6}	10	8,05232	8,88446

نتایج ارائه شده در جدول 1، در شکل 1 نشان داده شده است. در شکل 1 به‌دلیل گستردگی بازه زمانی جهت وضوح بهتر نتایج دو روش دقت COM به‌ازای چهار مورد زمان نسل نوترون‌های آنی در حضور راکتیویته برای محور زمان از مقیاس لگاریتم نپری استفاده شده است. پله‌ای مشهود است. انحراف معیار از DM برای زمان نسل‌های 10^{-3} ، 10^{-4} ، 10^{-5} و 10^{-6} ثانیه به‌ترتیب عبارتند از: 0,2158، 0,3114، 0,2694 و 0,3398. این مقادیر انحراف، هم‌خوانی بسیار خوب نتایج دو روش COM و DM را نشان می‌دهد.

نگرفته برای حل عددی معادلات NPK با در نظر گرفتن شش گروه نوترون تأخیری بدون اثرات پس‌خورد دمایی و چشمه خارجی استفاده کردیم. در این پژوهش سه نوع راکتیویته پله‌ای، رمپ و سینوسی مورد بررسی قرار گرفته است. تمام پارامترهای ثابت، مربوط به یک راکتور هسته‌ای گرمایی می‌باشند که از مقاله [6] گرفته شده است. در تمام موارد مورد مطالعه، شرایط اولیه از معادله 5 تبعیت می‌کنند. در ادامه نتایج حاصل از COM را برای هر کدام از راکتیویته‌ها به‌طور مجزا مورد بحث قرار می‌گیرد.

الف. راکتیویته پله‌ای

برای چک کردن دقت COM، یک راکتور هسته‌ای حرارتی با پارامترهای زیر در نظر گرفته شده است:

$$\beta_2 = 0,001491, \quad \beta_1 = 0,000266, \quad \beta = 0,007$$

$$\beta_5 = 0,000896, \quad \beta_4 = 0,002849, \quad \beta_3 = 0,001316$$

$$\lambda_2 = 0,0347, \quad \lambda_1 = 0,0127, \quad \beta_6 = 0,000182$$

$$\lambda_5 = 1,4, \quad \lambda_4 = 0,311, \quad \lambda_3 = 0,115$$

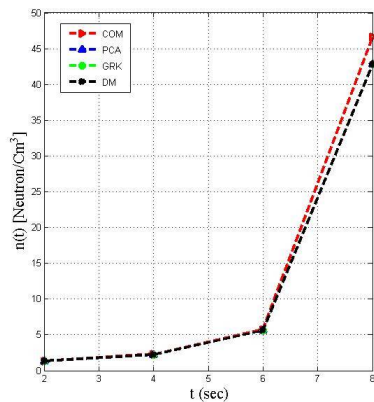
$$l_6 = 3,87$$

در جدول 1 یک نمونه راکتیویته پله‌ای با مقدار $\rho_0 = 0,003$ در زمان‌های 0,001، 0,00001، 0,1، 1 و 10 ثانیه به‌ازای زمان نسل‌های 10^{-3} ، 10^{-4} ، 10^{-5} و 10^{-6} مورد بررسی قرار گرفته است. مطابق جدول 1، با مقایسه نتایج روش COM با روش DM مشاهده می‌شود که نتایج، هم‌خوانی بسیار خوبی با هم دارند. هر چه بازه زمانی کوتاه‌تر باشد دقت محاسبات با این روش بیشتر است با این وضعیت ما می‌توانیم مسائل مربوط به راکتیویته متغیر با زمان را حل کنیم. طبیعی است که با افزایش راکتیویته پله‌ای چگالی نوترون و به تبع آن توان راکتور افزایش می‌یابد. معادلات NPK در محدوده فوق بحرانی با شکست مواجه می‌شوند چرا که دیگر وابستگی مکانی و مقدار شار نوترونی ثابت نیست. بنابراین ما مجازیم راکتیویته پله‌ای را تا محدوده بحرانی در نظر بگیریم، از طرفی

مورد $\rho(t) = 0.001t$ بررسی قرار گرفته است. در این مورد ما نتایج حاصل از روش COM با روش‌های DM، TSM و Hansen مقایسه کرده‌ایم. نتایج این محاسبات در جدول 3 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود نتایج COM با روش‌های مذکور هم‌خوانی خوبی دارد. البته ما در این روش می‌توانیم دقت محاسبات را با کنترل طول گام‌ها تنظیم کنیم.

جدول 2. مقایسه چگالی نوترون با راکتیویته $\rho(t) = 0.0007t$ با روش‌های DM، COM، GRK، PCA.

t	DM	GRK	PCA	COM
۲	1,3382	1,3382	1,3382	1,3411
۴	2,2284	2,2284	2,2278	2,2534
۶	5,5852	5,5820	5,5802	5,7713
۸	42,8762	42,7860	42,7880	46,6169



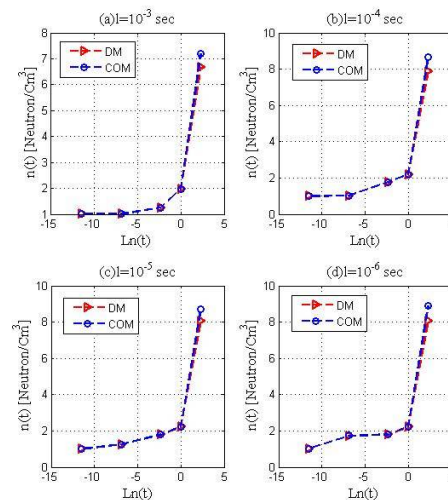
شکل 2. چگالی نوترونی در حضور راکتیویته رمپ.

جدول 3. چگالی نوترون با راکتیویته $\rho(t) = 0.001t$ محاسبه شده با روش‌های DM، COM، Hansen، TSM.

t	DM	TSM	Hansen	COM
2	1,6152	1,6155	1,6156	1,6155
4	4,6640	4,6633	4,6636	4,6634
6	208,96	208,43	208,58	208,48
۸	$1,32 \times 10^{23}$	$1,31 \times 10^{23}$	$1,34 \times 10^{23}$	$9,70 \times 10^{22}$

ج. راکتیویته سینوسی

پارامترهای مسئله در این مورد، همان پارامترهای راکتیویته رمپ می‌باشند. در جدول 4 نتایج برای



شکل 1. چگالی نوترونی در حضور راکتیویته پله‌ای به‌ازای زمان نسل‌های نوترون‌های آنی (a) 10^3 (sec) (b) 10^4 (sec) (c) 10^5 (sec) (d) 10^6 (sec).

ب. راکتیویته رمپ

در اینجا یک راکتور حرارتی با پارامترهای زیر در حضور دو نمونه راکتیویته خارجی رمپ مورد نظر می‌باشد.

$$\beta = 0,006473, l = 30\mu s$$

$$\beta_2 = 0,001423, \beta_1 = 0,000214$$

$$\beta_4 = 0,002568, \beta_3 = 0,001247$$

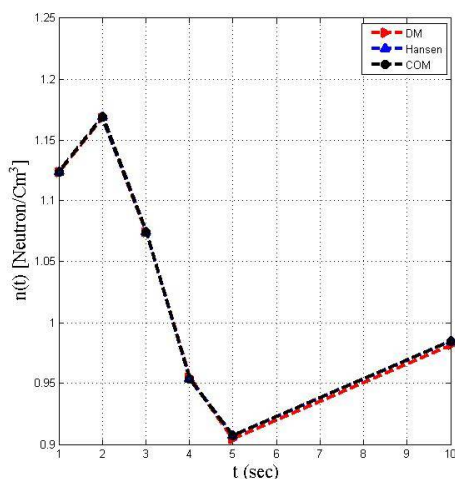
$$\lambda_1 = 0,0124, \beta_6 = 0,000273, \beta_5 = 0,000748,$$

$$\lambda_4 = 0,301, \lambda_3 = 0,111, \lambda_2 = 0,0305$$

$$\lambda_6 = 3,01, \lambda_5 = 1,14$$

در مورد اول، راکتیویته $\rho(t) = 0.0007t$ به‌سیستم اعمال شده است. نتایج حاصل از COM در جدول 2 روش‌های GRK، DA و PCA مقایسه شده است. شکل 2 نتایج جدول 2 را نشان می‌دهد. انحراف COM از روش‌های GRK، DA و PCA به‌ترتیب

عبارتند از: $1,9178, 1,9177$ و $1,9169$. مقادیر انحراف معیار بیانگر دقت خوب COM و هم‌خوانی آن با روش‌های مذکور می‌باشد. در مورد دیگر، تابع



شکل 1. چگالی نوترونی برحسب زمان در حضور راکتیویته سینوسی

نتیجه‌گیری

روش پیشنهاد شده در این مقاله (COM) یک روش تحلیلی عددی است که در حوزه دینامیک راکتور جدید می‌باشد. در این روش جواب به صورت مجموعی از چند جمله‌ای‌های لاگرانژ بیان می‌شود. حسن این روش در مقایسه با روش‌های عددی که جواب را فقط در نقاط گره‌ای مشخص می‌کنند این است که می‌تواند جواب را در هر نقطه دلخواه تعیین کند. همچنین این روش علاوه بر N به m نیز وابسته است که با افزایش m می‌توان دقت روش را نیز افزایش داد یعنی در این روش به جای طول گام کوچک $h=0,1$ می‌توان با طول گام بزرگتر کار کرد که این امر ممکن است خطا را افزایش دهد ولی با افزایش m می‌توان خطا را ترمیم نمود. افزایش طول گام می‌تواند سرعت اجرای برنامه را افزایش دهد. انحراف معیارهای COM از روش‌های مختلف عددی از قبیل: GRK, DM, Hansen, PCA, TSM و در حضور راکتیویته‌های خارجی پله‌ای، رمپ و سینوسی بیانگر دقت بالا و کارآمدی COM می‌باشد. نتایج محاسبات عددی نشان داد که این روش در مقایسه با روش‌های عددی دیگر به ویژه در زمان‌های

راکتیویته سینوسی در بازه زمانی 1 تا 10 ثانیه نشان داده شده است. با مقایسه نتایج روش‌های DM و Hansen با COM مشاهده می‌شود که نتایج هم‌خوانی بسیار خوبی با هم دارند. در اینجا ما از طول گام‌های $h=0,01$ استفاده کردیم حال اگر بخواهیم دقت محاسبات را افزایش بدهیم باید طول گام‌ها را افزایش بدهیم. جواب‌ها در این روش همگرا هستند.

جدول 4. چگالی نوترون در حضور راکتیویته سینوسی به شکل

$$\rho(t) = 0.00073 \sin(t)$$

t	DM $h=0.01$	Hansen $h=0.01$	COM $h=0.01$
1	1,12351	1,12396	1,12394
2	1,16816	1,16880	1,16889
3	1,07429	1,07442	1,07448
4	0,95527	0,95380	0,95382
5	0,90454	0,90737	0,90735
10	0,98172	0,98464	0,98468

نتایج ارائه شده در جدول 4 در شکل 1 نشان داده شده است. انحراف معیار استاندارد روش COM از روش‌های Hansen و DM به ترتیب عبارتند از: $4,19 \times 10^{-5}$ و 0,0018 که این مقادیر بیانگر دقت بسیار خوب روش COM و هم‌خوانی آن با روش‌های مذکور می‌باشد.

- [10] A.E. Aboanber, Y.M. Hamada, PWS: an efficient code system for solving space-independent nuclear reactor dynamics, *Annals of Nuclear Energy* **29** (2002) 2159-2172.
- [11] A.E. Aboanber, Y.M. Hamada, Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with Newtonian temperature feedback, *Annals of Nuclear Energy* **30** (2003) 1111-1122.
- [12] M.E. Kinard, E.J. Allen, Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics, *Annals of Nuclear Energy* **31** (2004) 1039-1051.
- [13] K.F. Hansen, B.V. Koen, W.W. Little, Stable numerical solutions of the reactor kinetics equations, *Nuclear Science and Engineering* **22** (1965) 51-59.
- [14] A.A. Nahla, Taylor's series method for solving the nonlinear point kinetics equations, *Nuclear Engineering and Design* **241** (2011) 1592-1595.
- [15] A.E. Aboanber, Stability of generalized Runge-Kutta methods for stiff kinetics coupled differential equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39** (2006) 1859-1876.
- [16] J. Sanchez, On the numerical solution of the point reactor kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods, *Nuclear Science and Engineering* **103** (1989) 94-99.
- [17] Y.C. Chao, A. Attard, A resolution of the stiffness problem of reactor kinetics, *Nuclear Science and Engineering* **90** (1985) 40-46.
- [18] A.E. Aboanber, Stiffness treatment of differential equations for the point reactor dynamic systems, *Progress in Nuclear Energy* **71** (2014) 248-257.
- [19] P. Ravetto, M.M. Rostagno, G. Bianchini, M. Carta, A. Dangelo, Application of the multipoint method to the kinetics of accelerator-driven systems, *Nuclear Science and Engineering* **148** (2004) 79-88.
- [20] S.Q.B. Leite, M.T.D. Vilhena, B.E.J. Bodmann, Solution of the point reactor kinetics equations with temperature feedback by the ITS2 method, *Progress in Nuclear Energy* **91** (2016) 240-249.
- [21] J.P. Yan, B.Y. Guo, A Collocation Method for Initial Value Problems of Second-Order ODEs by Using Laguerre Functions, *Numerical*
- کوتاه بسیار دقیق و کارآمد است، بنابراین می‌توان از آن در محاسبات دینامیکی مربوط به راه اندازی راکتور استفاده کرد.
- مرجع‌ها**
- [1] A.A. Nahla, Taylor's series method for solving the nonlinear point kinetics equations, *Nuclear Engineering and Design* **241** (2011) 1592-1595.
- [2] A.E. Aboanber, Analytical Solution of the Point Kinetics Equations by Exponential Mode Analysis, *Progress in Nuclear Energy* **42** (2003) 179-197.
- [3] A.A. Nahla, Generalization of the analytical exponential model to solve the point kinetics equations of Be - and D_2O -moderated reactors, *Nuclear Engineering and Design* **238** (2008) 2648-2653.
- [4] D.A.P. Palma, A.S. Martinez, A.C. Gonçalves, Analytical solution of point kinetics equations for linear reactivity variation during the start-up of a nuclear reactor, *Annals of Nuclear Energy* **36** (2009) 1469-1471.
- [5] A.A. Nahla, Analytical solution to solve the point reactor kinetics equation, *Nuclear Engineering and Design* **240** (2010) 1622-1629.
- [6] C.Z. Petersen, S. Dulla, M.T.M.B. Vilhena, P. Ravetto, An analytical solution of the point kinetics equations with time-variable reactivity by the decomposition method, *Progress in Nuclear Energy* **53** (2011) 1091-1094.
- [7] S.D. Hamieh, M. Saidinezhad, Analytical solution of the point reactor kinetics equations with temperature feedback, *Annals of Nuclear Energy* **42** (2012) 148-152.
- [8] S. Yamoah, E.H.K. Akaho, B.J.B. Nyarko, An accurate solution of point reactor neutron kinetics equations of multi-group of delayed neutrons, *Annals of Nuclear Energy* **54** (2013) 104-108.
- [9] S.Q.B. Leite, D.A.P. Palma, M.T.d. Vilhena, B. E.J. Bodmann, Analytical representation of the solution of the point reactor kinetics equations with adaptive time step, *Progress in Nuclear Energy* **70** (2014) 112-118.

Pure and Applied Mathematics **82** (2013) 345-364.

[23] J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, John Wiley & Sons, USA, (1976).

Mathematics; Theory, Method and Application **4** (2011) 283-295.

[22] E.A. Areo, R.B. Adeniyi, A Self-Starting Linear Multistep Method for direct solution of initial value problems of second order ordinary differential equations, *International Journal of*

Solutions of reactor point kinetics equations with six group of delayed neutrons using collocation method

Masoud Seidi^{1,*}, Parviz Darania², Saeid Pishbin²

¹Department of Physics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran

²Department of Mathematics, Faculty of Science, Urmia University, Urmia, Iran

Received: 23.08.2017 Final revised: 25.01.2018 Accepted: 04.03.2018

Abstract

In this study, we have used Collocation Method (COM) as a new method for solution of reactor point kinetics equations in the presence of step, linear and sinusoidal reactivities with six groups of delayed neutron. The calculation code was written by MATHEMATICA software. This method, in addition to the low time of calculations and convergence of solutions, has high accuracy. The results of numerical calculations by COM compared with other numerical methods show that this method is efficient and accurate. Therefore, it can be used for dynamical computing at the startup stage of the reactor.

Keywords: Sinusoidal Reactivity, Collocation Method, Reactor Point Kinetics, Delayed Neutron