

## حالت‌های لبه‌ای توپولوژیک القا شده به وسیله لیزر در یک زنجیره با طیف انرژی چهار نواری

میلاذ جنگ جان، میروحید حسینی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، ایران

دریافت: 1396/05/26 ویرایش نهایی: 1397/03/29 پذیرش: 1397/04/11

### چکیده

بر اساس نظریه سیستم‌های کوآنتومی واداشته دوره‌ای، به واسطه اعمال نور بر سیستم‌های حالت جامد مسیر جدیدی برای یافتن فازهای توپولوژیک می‌توان ایجاد نمود. در اینجا ما به صورت نظری یک شبکه یک بعدی را به صورت سیم کوآنتومی در نظر می‌گیریم که تحت اعمال یک پرتو لیزر با قطبش خطی قرار دارد. با استفاده از نظریه فلوکه هامیلتونی وابسته به زمان سیستم را به صورت هامیلتونی مستقل از زمان می‌نویسیم و به بررسی طیف شبه انرژی سیستم می‌پردازیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که به ازای مقادیر متفاوتی از هایپینگ و همچنین مقادیری از شدت لیزر اعمال شده، سیستم میزبان صفر، یک، دو یا سه جفت حالت لبه‌ای است. برای محاسبه ناوردای توپولوژیک، از فاز بری (فاز زاک در یک بعد) استفاده کرده‌ایم که برای یک، دو و سه جفت حالت لبه‌ای به ترتیب ناوردای توپولوژیک مقادیر یک، دو و سه را کسب می‌کند. همچنین در این سیستم تقارن‌های معکوس زمانی، الکترون-حفره، کایرال و پارینه وجود دارد. اگر تقارن پارینه شکسته شود، حالت‌های لبه‌ای در گاف اصلی و همچنین گاف زیرنوارهای ظرفیت و رسانش از بین می‌روند.

**کلیدواژگان:** نظریه فلوکه، هامیلتونی مؤثر، عایق توپولوژیک فلوکه، گذار فاز توپولوژیک

### مقدمه

دارد؛ مانند تاباندن پرتو لیزر به یک نمونه [5] برای به دست آوردن حالت‌های توپولوژیک فلوکه<sup>1</sup>، که نمونه می‌تواند گرافن [5] یا یک عایق معمولی [6] باشد. فازهای توپولوژیک در هر بعدی یافت می‌شوند [7-8]، اما تعداد سیستم‌های واقعی با خواص توپولوژیکی محدود است. یکی از این سیستم‌ها، سیستم‌های واداشته دوره‌ای وابسته به زمان است که می‌تواند انتخابی مناسب برای بررسی فازهای توپولوژیک باشد. چنین سیستم‌هایی به اصطلاح عایق توپولوژیک فلوکه نامیده می‌شوند [9] و اخیراً توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند [10]. این گونه سیستم‌ها را می‌توان به دو گروه

پس از کشف اثر کوآنتومی هال [1] در سال 1980 جست‌جوی پدیده‌های توپولوژیک غیربدیهی به یک موضوع مهم برای فیزیکدانان تبدیل شد [2]. بعد از کشف این اثر که با اعمال میدان مغناطیسی همراه بود، در نظر گیری برهم‌کنش اسپین-مدار در اتم‌های سنگین، باعث کشف عایق‌های توپولوژیک [3] شد و توجهات بسیاری را در این زمینه به خود جلب کردند [4]. مطالعات اخیر نشان داده‌اند که به جای برهم‌کنش اسپین-مدار، عاملی دیگر در ایجاد فازهای توپولوژیک نقش

\* نویسنده مسئول: mv.hosseini@znu.ac.ir

<sup>1</sup> Floquet topological state

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

طبقه‌بندی کرد: اول، سیستم‌هایی که کوانتیده بودن بی‌دررویی پمپاژ بار را نشان می‌دهند [11-12] که همان مفهوم پمپاژ بار تولس<sup>1</sup> را بیان می‌کنند [13-14]. دوم، اعمال میدان‌های دوره‌ای زمانی روی سیستم‌های ماده چگال [15 و 5]، که گروه‌های زیادی با شبیه‌سازی مؤثر، رفتار سیستم‌های توپولوژیک غیربدیهی را به وسیله این میدان‌های دوره‌ای مطالعه کرده‌اند.

در سیستم‌های ماده چگال، دوره‌ای بودن مکان در هامیلتونی سبب به وجود آمدن حالت‌ها و نوارهای انرژی بلاخ می‌شود. اگر هامیلتونی همین سیستم‌ها را با اعمال یک اختلال وابسته به زمان، در بعد زمانی دوره‌ای کنیم، در این صورت حالت‌های فلوک-بلاخ ایجاد خواهد شد. اخیراً فازهای توپولوژیک این‌گونه سیستم‌های واداشته دوره‌ای، به وسیله نظریه فلوک مطالعه شده است [16] که با تابش امواج الکترومغناطیس به عایق معمولی، حالت‌های لبه‌ای القا می‌شوند.

در این پژوهش با اعمال یک پرتو لیزر با قطبش خطی بر سیستم یک بعدی با چهار نقطه شبکه در هر سلول واحد، از نظریه فلوک استفاده می‌کنیم و هامیلتونی وابسته به زمان سیستم را به یک هامیلتونی مؤثر (هامیلتونی فلوک<sup>2</sup>) [17] تبدیل می‌کنیم. فرکانس پرتو لیزر اعمال شده از اهمیت خاصی برخوردار است، چون اگر این فرکانس بزرگتر از سایر انرژی‌های سیستم، مثل انرژی هاپینگ باشد، آنگاه نوارهای فلوک با هم هم‌پوشانی ندارند ولی اگر فرکانس لیزر اعمال شده کوچک‌تر باشد، نوارهای فلوک با هم هم‌پوشانی خواهند داشت. در این پژوهش سیستم را در فرکانس‌های بالا بررسی خواهیم کرد. سپس نشان می‌دهیم که برخلاف مطالعه‌های گذشته [23-24]، که به واسطه تغییرات دوره‌ای انرژی هاپینگ، حالت لبه‌ای تخت با انرژی محدود در مرز منطقه فلوک-بریلئون ایجاد می‌شود، در

سیستم مورد مطالعه با استفاده از پرتو لیزر، علاوه بر حالت‌های لبه‌ای با انرژی صفر می‌توان حالت‌های توپولوژیک با انرژی محدود نیز ایجاد کرد. این حالت‌های لبه‌ای با انرژی محدود نه تنها تخت نیستند بلکه در مرز منطقه فلوک-بریلئون نیز قرار نمی‌گیرند. در ادامه بررسی می‌کنیم که این حالت‌های لبه‌ای چگونه به شدت لیزر اعمالی و پارامترهای سیستم وابسته هستند. قابل توجه اینکه، حالت‌های لبه‌ای با انرژی محدود به همراه حالت‌های لبه‌ای با انرژی صفر باعث غنی شدن نمودار فاز توپولوژیک سیستم شده‌اند.

در این مقاله ابتدا فرمول‌بندی کوانتومی فلوک<sup>3</sup> را بیان کرده و در مورد چگونگی تبدیل هامیلتونی وابسته به زمان سیستم، به هامیلتونی فلوک توضیحاتی می‌دهیم. پس از معرفی مدل بررسی شده برای سیستم مورد نظر، به بررسی ویژگی‌های توپولوژیک سیستم و شرایط بسته و باز شدن گاف انرژی می‌پردازیم. در ادامه، ناوردهای توپولوژیک را برای این سیستم به دست خواهیم آورد. در انتها در مورد حفظ حالت‌های لبه‌ای با تقارن‌های موجود در سیستم، توضیحاتی خواهیم داد.

### سیستم‌های واداشته دوره‌ای

رفتار هامیلتونی‌هایی که در اثر برهم‌کنش سیستم با میدان الکترومغناطیس پرتو لیزر اعمال شده، در بعد زمانی، دوره‌ای می‌شوند  $(\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T))$  را می‌توان با استفاده از نظریه فلوک مورد بررسی قرار داد. با توجه به این نظریه حالت‌های تحول یافته سیستم بعد از یک دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  می‌توان توسط یک هامیلتونی مستقل از زمان توصیف کرد. در اکثر موارد نمی‌توان یک بیان تحلیلی برای به دست آوردن این هامیلتونی مستقل (هامیلتونی فلوک) پیدا کرد، ولی در محدوده فرکانس‌های بالا که در آن  $\omega$  بسیار بیشتر از

<sup>3</sup> Quantum Floquet formalism

<sup>1</sup> Thouless

<sup>2</sup> Floquet Hamiltonian

$$\hat{H}_F = \hat{H}(t) - i \frac{\partial}{\partial t}, \quad 4$$

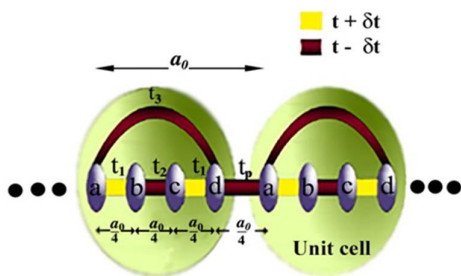
را به‌عنوان عملگر هامیلتونی فلوکه تعریف کنیم و ویژه‌بردارهای این هامیلتونی را در فضای تعمیم یافته هیلبرت  $S = H \otimes T$  یا همان فضای سمب<sup>1</sup> [19] به‌دست بیاوریم که  $T = \bigoplus_m T_m$ ، زیر فضای هیلبرت برای توابع دوره‌ای زمانی است و با گام‌های  $T_m = \{e^{im\omega t}\} (m \in \mathbb{Z})$  بخش می‌شوند. در نهایت با استفاده از تبدیل فوریه زمانی از معادله 4 می‌توان درایه‌های هامیلتونی فلوکه را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$(H_F)_{mn} = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) e^{i(m-n)\omega t} dt - n \omega \delta_{mn}, \quad 5$$

که در رابطه بالا  $m$  و  $n$  اندیس نوارهای فلوکه هستند.

### مدل

حال یک زنجیره اتمی با چهار نقطه شبکه در هر سلول واحد با ثابت شبکه  $a_0$  در نظر می‌گیریم (شکل 1 را ملاحظه نمایید).



شکل 1. شبکه‌ای یک بعدی از اتم‌ها که چهار نقطه شبکه در هر سلول واحد با ثابت شبکه  $a_0$  قرار گرفته است. مقادیر هاپینگ در شکل مشخص شده است.  $t$  انرژی هاپینگ تعادلی و  $\delta t$  شدت دوبارش است.

با استفاده از کوآنتش دوم در تقریب تنگ-بست و با در نظرگیری هاپینگ به همسایگی اول و سوم می‌توانیم

سایر مقیاس‌های انرژی سیستم است، هامیلتونی فلوکه را می‌توان به‌صورت یک اختلال در نظر گرفت. همچنین، می‌دانیم استفاده از نظریه اختلال برای توصیف برهم‌کنش‌های شدید بین سیستم‌های کوآتومی و میدان الکترومغناطیس لیزر مناسب نیست. بنابراین، باید از یک روش غیراختلالی استفاده کنیم و فرآیندی را در نظر بگیریم که نظریه فلوکه را به معادله شرودینگر سیستم‌های کوآتومی که هامیلتونی وابسته به‌زمان دارند، تطبیق دهد [17 و 18]. یک چنین روش غیراختلالی برای این‌گونه سیستم‌ها معمولاً فرمول‌بندی کوآتومی فلوکه نام دارد [19].

### فرمول‌بندی کوآتومی فلوکه

طبق نظریه کوآتومی فلوکه جواب‌های معادله وابسته به‌زمان شرودینگر،

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad 1$$

متناسب با ویژه‌بردارهای یک هامیلتونی وابسته به‌زمان است، این جواب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_\alpha t} |\phi_\alpha(t)\rangle, \quad 2$$

که  $|\phi_\alpha(t)\rangle$  حالت‌های فلوکه هستند و دوره تناوب یکسانی با هامیلتونی دارند،  $|\phi_\alpha(t+T)\rangle = |\phi_\alpha(t)\rangle$  همچنین در قیاس با نظریه بلاخ،  $\varepsilon_\alpha$  شبه انرژی نامیده می‌شود و انرژی نوار  $\alpha$  فلوکه را مشخص می‌کند. با جای‌گذاری معادله 2 در معادله وابسته به‌زمان شرودینگر می‌توان برای حالت‌های فلوکه معادله ویژه‌مقداری فلوکه-شرودینگر را به‌دست آورد:

$$\left(\hat{H}(t) - i \frac{\partial}{\partial t}\right) |\phi_\alpha(t)\rangle = \varepsilon_\alpha |\phi_\alpha(t)\rangle, \quad 3$$

ما همچنین می‌توانیم عبارت،

<sup>1</sup> Sambe space

که  $e$  و  $\hbar$  به ترتیب بار الکترون و ثابت پلانک می‌باشند. در ادامه این دو کمیت و هایپینگ تعادلی را واحد در نظر خواهیم گرفت. با جای‌گذاری رابطه 9 در هامیلتونی 6 هامیلتونی در فضای مستقیم به صورت

$$H(t) = t_1 \sum_n e^{-i\frac{a_0}{4}A_0 \sin(\omega t)} (a_n^\dagger b_n + c_n^\dagger d_n) + t_2 \sum_n e^{-i\frac{a_0}{4}A_0 \sin(\omega t)} b_n^\dagger c_n + t_3 \sum_n e^{-3i\frac{a_0}{4}A_0 \sin(\omega t)} a_n^\dagger d_n + t_p \sum_n e^{-i\frac{a_0}{4}A_0 \sin(\omega t)} d_n^\dagger a_{n+1} + h.c., \quad 10$$

خواهد شد. هامیلتونی 10 یک هامیلتونی وابسته به زمان است، پس با استفاده از نظریه فلوکه و رابطه 5 می‌توانیم هامیلتونی فلوکه را به صورت

$$H_F = t_1 \sum_{m,n,i} J_{m-n} \left(\frac{a_0}{4}\right) (a_{m,i}^\dagger b_{n,i} + c_{m,i}^\dagger d_{n,i}) + t_2 \sum_{m,n,i} J_{m-n} \left(\frac{a_0}{4}\right) b_{m,i}^\dagger c_{n,i} + t_p \sum_{m,n,i} J_{m-n} \left(\frac{a_0}{4}\right) d_{m,i}^\dagger a_{n,i+1} + t_3 \sum_{m,n,i} J_{m-n} \left(3\frac{a_0}{4}\right) a_{m,i}^\dagger d_{n,i} + h.c., \quad 11$$

بازنویسی کنیم که در آن  $J_{m-n}$  توابع بسل مرتبه  $m-n$  از نوع اول هستند. برای سیستم‌هایی با فرکانس بالا نوارهای فلوکه با هم هم‌پوشانی ندارند و نوارهایی با انرژی بالا نقش چندانی ایفا نمی‌کنند. بنابراین در این محدوده از فرکانس می‌توانیم با انتخاب  $m=n=0$  رابطه 11 را به پایین‌ترین مرتبه در انرژی‌های پایین کاهش دهیم،

$$H_F = t_1 \sum_i J_0 \left(\frac{a_0}{4}\right) (a_i^\dagger b_i + c_i^\dagger d_i) + t_2 \sum_i J_0 \left(\frac{a_0}{4}\right) b_i^\dagger c_i + t_3 \sum_i J_0 \left(3\frac{a_0}{4}\right) a_i^\dagger d_i + t_p \sum_i J_0 \left(\frac{a_0}{4}\right) d_i^\dagger a_{i+1} + h.c. \quad 12$$

همچنین با جای‌گذاری  $(k \rightarrow k - A(t))$  در هامیلتونی 8 می‌توانیم هامیلتونی فلوکه را در شرط مرزی دوره‌ای با استفاده از روند بالا به دست بیاوریم که در نهایت این هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود:

هامیلتونی توصیف کننده سیستم را به صورت زیر بنویسیم:

$$H = t_1 \sum_n (a_n^\dagger b_n + c_n^\dagger d_n) + t_2 \sum_n b_n^\dagger c_n + t_p \sum_n d_n^\dagger a_{n+1} + t_3 \sum_n a_n^\dagger d_n + h.c., \quad 6$$

در رابطه بالا  $C_n$  و  $C_n^\dagger$  عملگرهای  $(C \equiv a, b, c, d)$  در سلول  $n$  خلق و فنا روی زیر شبکه‌های  $a, b, c, d$  در سلول  $n$  هستند. همچنین  $t_2 = t - \delta t$  و  $t_1 = t + \delta t$  انرژی هایپینگ تعادلی و  $\delta t$  شدت دوپاراش شبکه) به ترتیب بیانگر هایپینگ به همسایه‌های اول و سوم و  $t_p = t_2$  هایپینگ بین سلولی هستند. با تبدیل فوریه از رابطه 6 می‌توانیم هامیلتونی را در شرط مرزی دوره‌ای بازنویسی کنیم:

$$\hat{H} = \sum_k \hat{\psi}_k^\dagger h(k) \hat{\psi}_k, \quad 7$$

که  $\hat{\psi}_k^\dagger = (a_k, b_k, c_k, d_k)^\dagger$  و

$$h(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 e^{ijk_0/4} & 0 & t_3 e^{3ik_0/4} + t_p e^{-ik_0/4} \\ t_1 e^{-ik_0/4} & 0 & t_2 e^{ik_0/4} & 0 \\ 0 & t_2 e^{-ik_0/4} & 0 & t_1 e^{ik_0/4} \\ t_3 e^{-3ik_0/4} + t_p e^{ik_0/4} & 0 & t_1 e^{-ik_0/4} & 0 \end{pmatrix}, \quad 8$$

اعمال پرتو لیزر با قطبش خطی با پتانسیل برداری دامنه، فرکانس و شدت لیزر اعمال شده) به هامیلتونی 6 سبب تغییر در انرژی جنبشی الکترون‌ها یا جابه‌جایی پایریس  $(k \rightarrow k - A(t))$  در شرط مرزی دوره‌ای و یا تغییر انرژی هایپینگ به صورت زیر در شرط مرزی محدود می‌شود:

$$t_{ij} \rightarrow t_{ij} e^{-eif \int_{R_{x_i}}^{R_{x_j}} A(t) \cdot dr}, \quad 9$$

از معادله 13 می‌توانیم طیف انرژی را برای این سیستم به دست بیاوریم،

$$E(k) = \pm \frac{\sqrt{\eta \pm \sqrt{\xi}}}{\sqrt{2}}, \quad 17$$

$$\eta = 2t_1'^2 + t_2'^2 + t_3'^2 + t_3't_p'e^{-ik} + t_3't_p'e^{ik} + t_p'^2,$$

$$\xi = -4(t_1'^2 - t_2't_3' - t_2't_p'e^{-ik})(t_1'^2 - t_2't_3' - t_2't_p'e^{ik}) + (2t_1'^2 + t_2'^2 + t_3'^2 + t_3't_p'e^{ik} + t_p'e^{-ik}(t_3' + t_p'e^{ik}))^2,$$

رابطه 17 بیانگر چهار نوار انرژی است که دو عبارت مربوط به زیرنوارهای ظرفیت و دو عبارت مربوط به زیرنوارهای رسانش است. شرط اصلی گذار فاز توپولوژیک بسته و باز شدن گاف انرژی به صورت بی‌دررو و پدید آمدن حالت‌های لبه‌ای است [21]. گاف این سیستم در سه ناحیه (گاف بین زیر نوارهای ظرفیت، گاف بین زیر نوارهای رسانش و گاف بین بالاترین نوار ظرفیت و پایین‌ترین نوار رسانش) بسته می‌شود. از آنجایی که در نواحی که گاف انرژی باز است فازهای توپولوژیک متفاوتی می‌توانند وجود داشته باشند، لذا شرط‌های مربوط به بسته شدن گاف‌ها را به دست می‌آوریم تا مرز نواحی با توپولوژی متفاوت و یا به طور معادل نقاطی که در آن اصطلاحاً گذار فاز توپولوژیک رخ می‌دهد، مشخص شود. همچنین به دلیل وجود تقارن الکترون-حفره، شرایطی که در آن گاف بین زیر نوارهای ظرفیت و رسانش بسته می‌شود، یکسان است. از رابطه 17 می‌توان به راحتی نشان داد که گاف بین زیر نوارهای ظرفیت در  $k = \pm\pi$  بسته می‌شود، بنابراین رابطه پارامتری بسته شدن گاف زیرنوارهای ظرفیت و رسانش به صورت

$$J_0\left(\frac{3a_0}{4}A_0\right)(\delta t - 1) = 0, \quad 18$$

به دست می‌آید. هرگاه  $\delta t = 1$  یا شدت پرتو لیزر  $A_0$  مقداری را کسب کند که تابع بسل صفر شود، گاف

$$h_F(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_1' & 0 & t_3' + t_p'e^{ik} \\ t_1' & 0 & t_2' & 0 \\ 0 & t_2' & 0 & t_1' \\ t_3' + t_p'e^{-ik} & 0 & t_1' & 0 \end{pmatrix}, \quad 13$$

که هایپینگ‌های مؤثر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$t_j' = t_j J_0\left(A_0 \frac{a_0}{4}\right), \quad j \equiv 1, 2, p \quad 14$$

$$t_3' = t_3 J_0\left(A_0 \frac{3a_0}{4}\right),$$

طبق تناظر توده-لبه<sup>1</sup>، فازهای توپولوژیک غیربدیهی حالت‌های توده در حضور تقارن انتقالی باید خود را به صورت حالت لبه‌ای در شرط مرزی محدود نمایان کنند. بنابراین در ادامه برای مطالعه این تناظر از هامیلتونی 12 و 13 که به ترتیب در فضای مستقیم و فضای وارون نوشته شده‌اند، بهره خواهیم برد.

### فازهای سیستم و نوردای توپولوژیک

برای تعیین توپولوژی سیستم، باید توپولوژی نوارهایی را که در به وجود آمدن حالت‌های لبه‌ای نقش دارند، تعیین کنیم. ویژگی توپولوژیکی شبکه‌های یک بعدی، متکی بر محاسبه فاز بری (فاز زاک در یک بعد) ساختار نواری است [20]. فاز زاک را می‌توان با محاسبه انتگرال زیر محاسبه کرد:

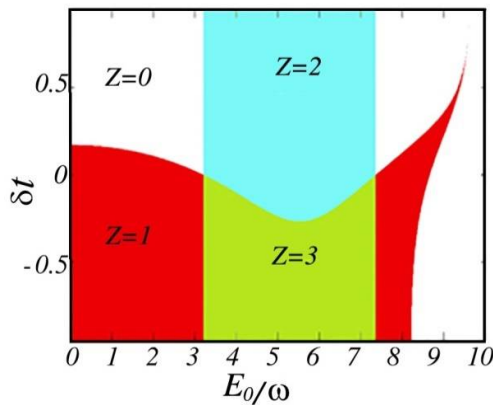
$$\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \langle u_n(k) | i\partial_k | u_n(k) \rangle dk, \quad 15$$

که در این رابطه  $|u_n(k)\rangle$  حالت فلوکه-بلاخ نوار  $n$ ام می‌باشد. فاز زاک و نوردای توپولوژیک از طریق رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$z_i = \frac{\varphi_i}{\pi}, \quad i = 1, 4, (1, 2) \quad 16$$

که در این سیستم  $Z = \sum_i z_i$  مقادیر صفر، یک، دو یا سه را کسب می‌کند که نشان دهنده وجود صفر، یک، دو یا سه جفت حالت لبه‌ای است.

<sup>1</sup> Bulk-edge correspondence



شکل 2. نمودار فضای فاز سیستم برحسب شدت لیزر اعمال شده و شدت دوپاراش. رنگ سفید بیانگر فاز بدیهی است. رنگ قرمز، یک جفت حالت لبه‌ای، رنگ آبی دو جفت و رنگ سبز سه جفت حالت لبه‌ای را نمایش می‌دهد.

همچنین با مشاهده نمودار فضای فاز می‌توان این نکته را بیان نمود که در هر مقدار دلخواهی از  $\delta t$  گاف زیرنوارهای ظرفیت و رسانش فقط در دو مقدار از شدت لیزر بسته می‌شود. ابتدا در شدت پرتو لیزر  $A_0 = 3.206$  گذار فاز توپولوژیک رخ می‌دهد و دو واحد به نوردای توپولوژیک اضافه می‌شود. با افزایش  $A_0$  و رسیدن به مقدار  $A_0 = 7.361$  برای بار دوم گذار فاز در زیرنوارها اتفاق می‌افتد و این بار از نوردای توپولوژیک دو واحد کاسته می‌شود.

در شکل 3 الف و ب نمودار انرژی و نوردای توپولوژیک برحسب شدت پرتو لیزر اعمال شده برای  $\delta t = -0.2$  رسم شده است. در این مقدار از شدت دوپاراش هرگاه شرط‌های 19 و 20 برقرار باشد گاف اصلی سیستم در سه مقدار شدت لیزر  $(A_0 = 4.678, 6.310, 8.447)$  بسته می‌شود. در بازه  $A_0 \in [0, 3.206]$  نوردای توپولوژیک مقدار یک را کسب کرده است که مرتبط با یک جفت حالت لبه‌ای در گاف اصلی سیستم است. در مقدار  $A_0 = 3.206$  گذار فاز توپولوژیک در زیرنوارها رخ می‌دهد و دو جفت حالت لبه‌ای به سیستم القا می‌شود. در این مقدار از شدت پرتو لیزر یک جفت حالت لبه‌ای

زیرنوارهای ظرفیت یا زیرنوارهای رسانش بسته می‌شود. همچنین گاف اصلی سیستم در دو نقطه از فضای وارون  $(k = 0, \pm \pi)$  بسته می‌شود. رابطه پارامتری بسته شدن گاف در نقطه  $k = 0$  به صورت زیر است،

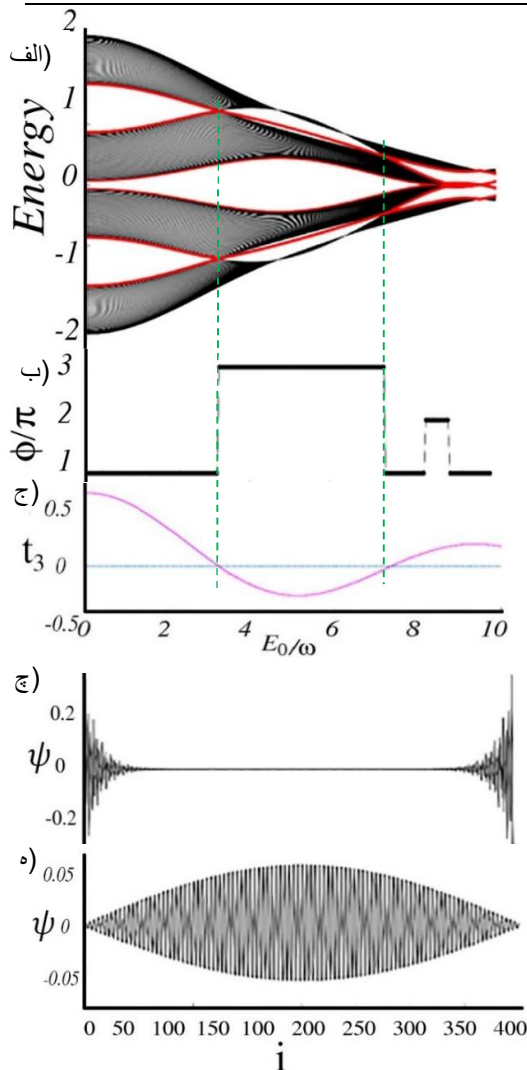
$$\delta t = \frac{\sqrt{2x + y \pm 2(x(x-y))}}{y}, \quad 19$$

و رابطه پارامتری بسته شدن گاف در  $k = \pm \pi$  عبارتند از:

$$\delta t = -\frac{\sqrt{y \pm 2(-x(x-y))}}{2x - y}, \quad 20$$

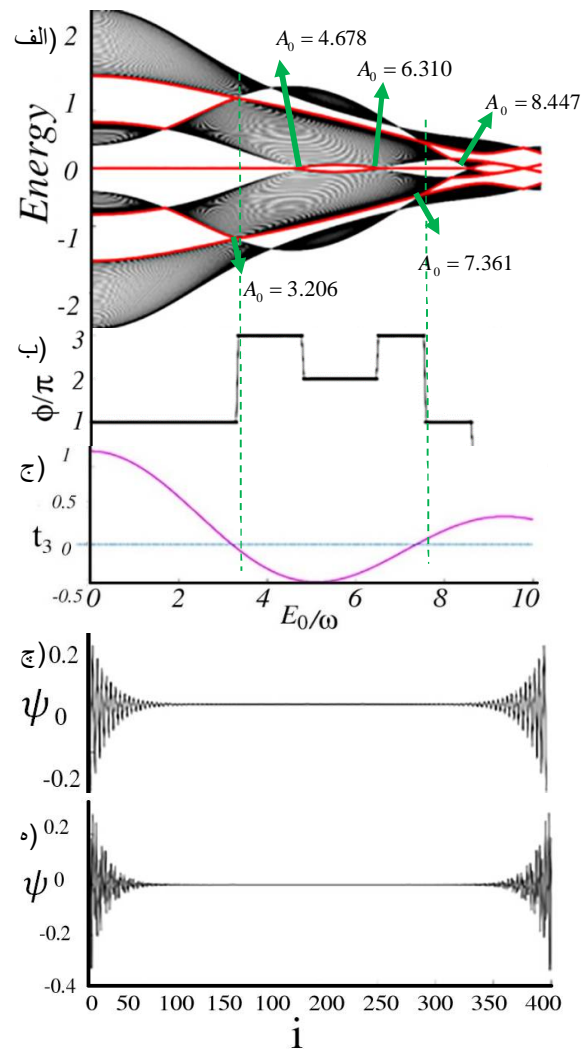
که  $x = J_0 \left( \frac{a_0}{4} A_0 \right)$  و  $y = J_0 \left( \frac{3a_0}{4} A_0 \right)$  است.

در شکل 2 به کمک روابط بالا و همچنین نوردای توپولوژیک، نمودار فضای فاز را برحسب شدت پرتو لیزر  $A_0$  و شدت دوپاراش  $\delta t$  رسم کرده‌ایم. در این نمودار رنگ سفید معرف حالت بدیهی و صفر جفت حالت لبه‌ای است؛  $Z=0$ . همچنین، رنگ‌های قرمز، آبی و سبز بیانگر حالت غیر بدیهی با یک، دو و سه جفت حالت لبه‌ای است. برای  $Z=1$  یک جفت حالت لبه‌ای با انرژی صفر در گاف اصلی سیستم وجود دارد و برای  $Z=2$  سیستم میزبان دو جفت حالت لبه‌ای با انرژی غیرصفر در گاف انرژی زیرنوارهای ظرفیت و گاف انرژی زیرنوارهای رسانش است. همچنین برای  $Z=3$  علاوه بر اینکه در گاف انرژی زیر نوارهای ظرفیت و رسانش، دو جفت حالت لبه‌ای با انرژی غیر صفر وجود دارد، یک جفت حالت لبه‌ای با انرژی صفر نیز در گاف اصلی سیستم وجود دارد. نکته قابل توجهی که از نمودار فضای فاز دیده می‌شود این است که فاز توپولوژیک غیربدیهی  $Z=3$  تنها برای  $\delta t < 0$  می‌تواند ایجاد شود. در نهایت می‌توان گفت مرز بین رنگ‌ها مشخص کننده معادلات 18 تا 20 هست که بسته-باز شدن گاف‌ها یا به‌طور معادل گذار فاز توپولوژیک را نشان می‌دهد.



شکل 4 الف) نمودار انرژی سیستم برحسب شدت لیزر برای 100 سلول واحد. ب) نمودار نوردای توپولوژیک سیستم که مقادیر صفر، یک و دو را کسب می‌کند که بیانگر وجود صفر، یک و دو جفت حالت لبه‌ای در بازه‌های مورد نظر است. ج) نمودار هاپینگ مؤثر به همسایگی سوم که با تغییر علامت این هاپینگ حالت‌های لبه‌ای در گاف نوار ظرفیت و رسانش پدیدار می‌شود. تابع موج. چ) حالت لبه‌ای موجود در گاف بین زیرنوارهای ظرفیت. ه) در گاف اصلی سیستم به‌ازای شدت پرتو لیزر 3.8، در اینجا  $\delta t = 0.2$  می‌باشد.

توپولوژیک  $Z$  در این مقدار از شدت لیزر عدد دو را کسب می‌کند. این وضعیت نشان دهنده همان دو جفت حالت لبه‌ای در گاف زیر نوارها است. با افزایش  $A_0$  دوباره در مقدار  $A_0 = 6.310$  گاف اصلی بسته می‌شود و این بار حالت لبه‌ای در گاف اصلی پدیدار



شکل 3 الف) نمودار انرژی سیستم برحسب شدت لیزر برای 100 سلول واحد. ب) نمودار نوردای توپولوژیک سیستم که مقادیر صفر، یک، دو و سه را کسب می‌کند که بیانگر وجود صفر، یک، دو و سه جفت حالت لبه‌ای در بازه‌های مورد نظر است. ج) نمودار هاپینگ مؤثر به همسایگی سوم که با تغییر علامت این هاپینگ حالت‌های لبه‌ای در گاف نوار ظرفیت و رسانش پدیدار می‌شود. تابع موج. چ) حالت لبه‌ای موجود در گاف بین نوارهای ظرفیت. ه) حالت لبه‌ای موجود در گاف اصلی سیستم به‌ازای شدت پرتو لیزر 3.8، در اینجا  $\delta t = -0.2$  می‌باشد.

نیز در گاف اصلی وجود دارد، بنابراین نوردای توپولوژیک مقدار سه را کسب می‌کند. در مقدار  $A_0 = 4.678$  گاف اصلی بسته می‌شود و با از بین رفتن حالت لبه‌ای در گاف اصلی سیستم، نوردای

مشترک از شدت لیزر وجود داشته باشند. همچنین در شکل 4 چ و ه تابع موج برحسب اندیس مکان را برای حالت‌های موجود در گاف زیر نوارها و گاف اصلی در شدت لیزر  $A_0 = 3.8$  رسم کرده‌ایم. برای حالت‌های موجود در گاف زیرنوارها، فقط در دو طرف زنجیره تابع موج مقدار متناهی دارد ولی برای حالت موجود در گاف اصلی این نمودار در قسمت‌های میان زنجیره مقدار قابل توجهی دارد.

### تقارن‌های سیستم

حالت‌های لبه‌ای موجود در گاف انرژی عایق‌های توپولوژیک به وسیله یک یا چند تقارن محافظت می‌شوند. هامیلتونی 13 دارای تقارن‌های الکترون-حفره و کایرال می‌باشد، که به ترتیب به صورت  $C \hat{h}(k) C^{-1} = -\hat{h}(k)$  و  $P \hat{h}(k) P^{-1} = -\hat{h}(-k)$  تعریف می‌شوند.  $P = \sigma_1 \otimes \sigma_z$  عملگر الکترون-حفره و  $C = \sigma_1 \otimes \sigma_z$  عملگر کایرال می‌باشد که  $\sigma_z$  و  $\sigma_1$  به ترتیب عملگر مزدوج مختلط، مؤلفه  $z$  ماتریس‌های پائولی و ماتریس واحد است. همچنین با توجه به این نکته که عملگر کایرال از ضرب عملگرهای وارون زمان و الکترون-حفره به دست می‌آید، بنابراین می‌توان عملگر تقارن وارون زمان را به صورت  $T = \sigma_1 \otimes \sigma_1 K$  تعیین نمود. برای این سیستم نیز تقارن پارینه به صورت  $\Pi \hat{h}(k) \Pi^{-1} = \hat{h}(-k)$  وجود دارد که در آن عملگر پارینه به شکل ماتریسی  $\Pi = \sigma_x \otimes \sigma_x$  می‌باشد. به سبب وجود تقارن پارینه فاز زاک برای این سیستم مقادیر گسسته کسب می‌کند. در نهایت به دلیل اینکه  $C^2 = 1$ ،  $P^2 = 1$  و  $T^2 = 1$  می‌باشد، کلاس تقارنی تعریف شده برای این سیستم BDI است [22].

می‌شود و ناوردای  $Z$  دوباره مقدار سه را کسب می‌کند. در مقدار  $A_0 = 7.361$  گاف زیر نوارها بسته می‌شود و حالت‌های لبه‌ای موجود در گاف این زیر نوارها از بین می‌روند، ولی هنوز یک جفت حالت لبه‌ای در گاف اصلی وجود دارد که ناوردای توپولوژیک متناسب با این حالت لبه‌ای یک است. در نهایت در شدت پرتو لیزر  $A_0 = 8.447$  گاف اصلی سیستم دوباره بسته می‌شود و حالت لبه‌ای موجود در این گاف از بین می‌رود. همچنین دلیل اینکه برای هر مقدار از شدت دوپارش گاف زیر نوارهای ظرفیت و رسانش در دو مقدار از شدت پرتو لیزر بسته می‌شود، هاپینگ مؤثر به همسایه سوم است، چرا که در همان دو مقدار از شدت پرتو لیزر هاپینگ مؤثر مقدار صفر را کسب می‌کند. به عبارتی هرگاه که این هاپینگ مؤثر تغییر علامت بدهد حالت‌های لبه‌ای موجود در گاف زیر نوارها پدیدار یا ناپدید می‌شوند (شکل 3 ج را ببینید). در شکل 3 چ و ه نمودارهای تابع موج برحسب اندیس مکان نقاط شبکه برای حالت‌های لبه‌ای موجود در گاف زیرنوارها و گاف اصلی برای شدت پرتو لیزر  $A_0 = 3.8$  رسم شده است. در این نمودارها، این حالت‌ها فقط در ابتدا و انتها زنجیره مقدار متناهی دارند که مشخص کننده لبه‌ای بودن این حالت‌های درون گاف است. در شکل 4 الف، ب و ج نمودارهای انرژی، ناوردای توپولوژیک ( $Z$ ) و هاپینگ مؤثر به همسایه سوم برحسب شدت پرتو لیزر اعمال شده برای مقدار  $\delta t = 0.2$  رسم شده است. برای این مقدار از شدت دوپارش همان شرایط شکل 3 را برای حالت‌های لبه‌ای موجود در گاف زیر نوارهای ظرفیت و رسانش داریم، ولی گاف اصلی سیستم تنها در دو مقدار شدت پرتو لیزر ( $A_0 = 8.354, 8.959$ ) بسته می‌شود و حالت لبه‌ای موجود در این گاف در گستره کمتری از شدت پرتو لیزر به سیستم القا می‌شود. به عبارت دیگر، برای  $\delta t > 0$  حالت‌های لبه‌ای موجود در گاف اصلی و گاف زیرنوارها نمی‌توانند هم‌زمان در یک گستره



### شکست تقارن‌ها

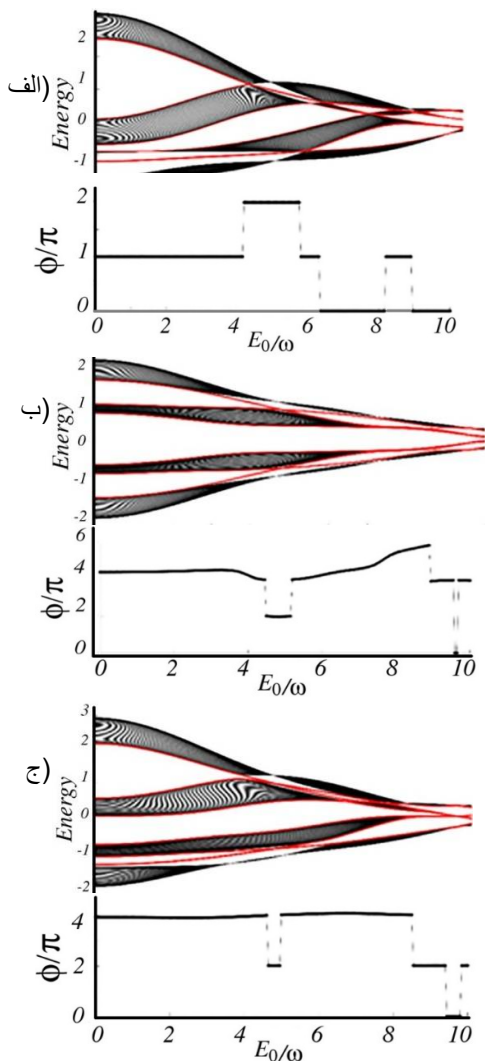
برای یافتن پاسخ این سوال که این حالت‌های لبه‌ای با کدام یک از تقارن‌ها محافظت می‌شوند، با اعمال اختلال‌هایی به بررسی شکست تقارن‌ها و پایداری حالت‌های لبه‌ای می‌پردازیم. در ابتدا هامیلتونی هایپینگ به همسایه دوم،

$$H' = t_a \sum_n a_n^\dagger c_n + t_b \sum_n b_n^\dagger d_n + h.c., \quad 21$$

را به صورت یک جمله اختلالی به هامیلتونی 6 اضافه می‌کنیم.  $t_a$  هایپینگ از جایگاه  $a$  به جایگاه  $c$  و  $t_b$  هایپینگ از جایگاه  $b$  به جایگاه  $d$  است. در اثر اعمال لیزر به این سیستم و با جای‌گذاری در رابطه 5 هامیلتونی این اختلال به صورت زیر خواهد شد:

$$H'_F = t_a \sum_i J_0 \left( A_0 \frac{2a_0}{4} \right) a_i^\dagger c_i + t_b \sum_i J_0 \left( A_0 \frac{2a_0}{4} \right) b_i^\dagger d_i + h.c. \quad 22$$

اعمال این اختلال بسته به رابطه میان مقادیر  $t_a$  و  $t_b$ ، باعث شکسته شدن تقارن‌های پاریته، الکترون-حفره و کایرال می‌شود. در شکل 5 الف نمودار انرژی و فاز زا را برحسب شدت لیزر برای  $t_a = t_b$  رسم کرده‌ایم. در این حالت، تقارن الکترون-حفره و در نتیجه تقارن کایرال شکسته می‌شود، ولی تقارن پاریته هنوز وجود دارد. چون تقارن الکترون-حفره شکسته شده است بازه‌ای از شدت پرتو لیزر اعمال شده که در آن حالت‌های لبه‌ای در گاف زیر نوارهای ظرفیت و رسانش وجود دارند دیگر یکسان نیستند. به دلیل وجود تقارن پاریته حالت‌های لبه‌ای هنوز در گاف انرژی سیستم موجود هستند و نمودار فاز زا مقادیر گسسته کسب می‌کند. همچنین در شکل 5 ب  $t_a = -t_b$  در نظر گرفته شده است. در این حالت تقارن پاریته شکسته می‌شود ولی تقارن الکترون-حفره و کایرال شکسته نمی‌شوند. با شکسته شدن تقارن پاریته حالت‌های لبه‌ای در گاف انرژی ناپدید می‌شوند.



شکل 5. نمودار انرژی و فاز زا مربوطه به‌ازای  $\delta t = 0.2$  (برای الف) تقارن الکترون حفره شکسته می‌شود ولی همچنان سیستم تقارن پاریته را دارد و فاز زا مقادیر گسسته می‌گیرد و برای حالت ب) که تقارن پاریته شکسته می‌شود و فاز زا مقادیر پیوسته می‌گیرد ولی تقارن الکترون حفره در سیستم وجود دارد و حالت ج) که هر دو تقارن شکسته می‌شوند و فاز زا مقادیر پیوسته می‌گیرد.

نکته قابل توجه این حالت این است که برای شدت‌های خاصی از لیزر اعمال شده هایپینگ مؤثر به همسایگی دوم صفر می‌شود و فاز زا مقدار دو را کسب می‌کند که به معنای دو جفت حالت لبه‌ای است. در نهایت اگر

Potential, *Physical Review Letters* **49** (1982) 405.

[3] M. Konig, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, X.L. Qi, S.C. Zhang, Quantum spin hall insulator state in HgTe quantum wells, *Science* **318** (2007) 766.

[4] J.E. Moore, Perspective Article The birth of topological insulators, *Nature (London)*. **464** (2010) 194.

[5] T. Oka, H. Aoki, Photovoltaic Hall effect in graphene, *Physical Review B* **79** (2009) 081406.

[6] N.H. Lindner, G. Refael, V. Galitski, Floquet topological insulator in semiconductor quantum wells, *Nature Physics* **7** (2011) 490.

[7] A.P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A.W.W. Ludwig, Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions, *Physical Review B* **78** (2008) 195125.

[8] A.Y. Kitaev, Periodic table for topological insulator and superconductors, *AIP Conference Proceedings* **1134** (2009) 22-30.

[9] T. Kitagawa, M.S. Rudner, E. Berg, E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, *Physical Review A* **82** (2010) 033429.

[10] Z. Gu, H.A. Fertig, D.P. Arovas, and A. Auerbach, Spin Pumping by Parametrically Excited Exchange Magnons, *Physical Review Letters* **107** (2011) 216601.

[11] L. Fu, C.L. Kane, Time reversal polarization and a Z<sub>2</sub> adiabatic spin pump, *Physical Review B* **74** (2006) 195312.

[12] R. Shindou, Quantum Spin Pump in S=1/2 antiferromagnetic chains -Holonomy of phase operators in sine-Gordon theory,

$t_a \neq t_b$  باشد هر سه تقارن کایرال، الکترون حفره و پارایته شکسته می‌شوند و حالت‌های لبه‌ای از بین می‌روند و فاز زاگ مقادیر پیوسته کسب می‌کند (به شکل 5ج مراجعه نمایید). در نهایت می‌توان بیان کرد که حالت‌های لبه‌ای توپولوژیک غیربدیهی توسط تقارن پارایته محافظت می‌شوند.

### خلاصه

ما در این پژوهش یک پرتو لیزر با قطبش خطی بر یک شبکه یک بعدی، با در نظرگیری هایپینگ به همسایه‌های اول و سوم، اعمال کردیم. اعمال این پرتو لیزر با پتانسیل برداری که با زمان تغییر می‌کند سبب تغییر در انرژی جنبشی الکترون‌ها و در نتیجه تغییر در انرژی هایپینگ الکترون‌ها می‌شود. با استفاده از نظریه فلوکه هامیلتونی مؤثر این سیستم را به دست آوردیم. در این مقاله نشان داده شد که علاوه بر انرژی صفر، سیستم میزبان حالت‌های لبه‌ای با انرژی غیر صفر (انرژی محدود) نیز می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند که برای مقادیر مختلف هایپینگ در گستره‌ای از شدت لیزر که هایپینگ مؤثر به همسایه سوم صفر می‌شود گاف انرژی موجود در زیر نوارهای ظرفیت و رسانش بسته و باز می‌شود. این باز شدن گاف با پیدا شدن حالت‌های لبه‌ای همراه است. همچنین، به ازای برخی مقادیر هایپینگ در گستره‌هایی از شدت پرتو لیزر اعمال شده سه، دو، یک یا صفر جفت حالت لبه‌ای وجود دارد که این حالت‌های لبه‌ای با تقارن پارایته محافظت می‌شوند.

### مرجع‌ها

[1] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, *Physical Review Letters* **45** (1980) 494.

[2] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M.D. Nijs, Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic

- Periodic in Time, *Physical Review B* **138** (1965) 974.
- [18] W.R. Salzman, Quantum mechanics of systems periodic in time, *Physical Review A* **10** (1974) 461.
- [20] D. Xiao, M.C. Chang, Q. Niu, Berry phase effects on electronic properties, *Reviews of Modern Physics* **82** (2010) 1959.
- [21] S.-Q. Shen, *Topological Insulators*, Hong Kong, China, (2012).
- [22] T. Morimoto, A. Furusaki, Topological classification with additional symmetries from Clifford algebras, *Physical Review B* **88** (2013) 125129.
- [23] V. Dal Lago, M. Atala, L.E.F. Foa Torres, Floquet topological transitions in a driven one-dimensional topological insulator, *Physical Review A* **92** (2015) 023624.
- [24] J.K. Asboth, B. Tarasinski, P. Delplace, Chiral symmetry and bulk-boundary correspondence in periodically driven one-dimensional systems, *Physical Review B* **90** (2014) 125143.
- Journal of Physics Society of Japan* **74** (2005) 1214.
- [13] D.J. Thouless, Quantization of particle transport, *Physical Review B* **27** (1983) 6083.
- [14] Q. Niu and D.J. Thouless, Quantised adiabatic charge transport in the presence of substrate disorder and many-body interaction, *Journal of Physics A* **17** (1984) 2453.
- [15] J-I. Inoue, A. Tanaka, Photoinduced transition between conventional and topological insulators in two-dimensional electronic systems, *Physical Review Letters* **105** (2010) 017401.
- [16] A. Gómez-León, G. Platero, Floquet-Bloch theory and topology in periodically driven lattices, *Physical Review Letters* **110** (2013) 200403.
- [19] H. Sambe, Steady States and Quasienergies of a Quantum-Mechanical System in an Oscillating Field, *Physical Review A* **7** (1973) 2203.
- [17] J.H. Shirley, Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian