

## بررسی هم‌زمان سازی سیستم‌های یکسان و غیر یکسان

رضا خرداد<sup>1\*</sup>، محمد علی دهقانی<sup>2</sup>

<sup>1</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

<sup>2</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

دریافت: 1396/06/02 ویرایش نهائی: 1397/03/29 پذیرش: 1397/04/11

### چکیده

همان‌گونه که می‌دانیم روش‌های متعددی برای هم‌زمان سازی سیستم‌های بی‌نظم وجود دارد. در این تحقیق، روش هم‌زمانی تطبیقی را برای سه سیستم جالب مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این سیستم‌ها شامل سیستم راسلر-راسلر، سیستم لیو-لیو و سیستم لیو-راسلر می‌باشند. هم‌زمانی این سیستم‌ها را تحت شرایط گوناگون شبیه‌سازی می‌کنیم. شبیه‌سازی هم‌زمانی بین سیستم‌های مورد مطالعه نشان می‌دهند که این سیستم‌ها حتی در حضور پارامترهای نامعلوم می‌توانند به‌طور کامل هم‌زمان شوند. از نتایج به‌دست آمده در می‌یابیم که سرعت هم‌زمانی در سیستم راسلر-راسلر سریعتر از دو سیستم دیگر می‌باشد. همچنین، سیستم لیو-لیو سریعتر سیستم سوم هم‌زمان می‌شود. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که روش شبیه‌سازی تطبیقی برای سیستم‌های یکسان (راسلر-راسلر و لیو-لیو) بهتر عمل می‌کند و این سیستم‌ها زودتر هم‌زمان می‌شوند.

کلیدواژگان: هم‌زمانی تطبیقی، سیستم‌های بی‌نظم، بی‌نظمی

### مقدمه

سیستم‌های طبیعی مانند آب و هوا مشاهده کرد. توضیح چنین رفتارهایی ممکن است به‌وسیله مدل‌های ریاضی بی‌نظمی یا روش‌های تحلیلی امکان پذیر باشد [6 و 5]. باید توجه کرد که تحول سیستم‌های بی‌نظم به‌شرایط اولیه حساس می‌باشد. برای نشان دادن این مطلب می‌توان گفت که اگر با مقدار معینی از اطلاعات در مورد یک سیستم بررسی‌ها را شروع کنیم، سیستم مورد مطالعه پس از گذشت مدت زمان معینی به‌طور کامل قابل پیش بینی نیست. به‌عبارت دیگر، حساسیت به شرایط اولیه بدین معناست که هر وقت تغییر کوچکی

مطالعه پدیده‌های غیر خطی در علوم گوناگون مانند مهندسی، فیزیک، ریاضی و سایر علوم بسیار جالب و جذاب می‌باشند. دلیل این امر این است که بسیاری از پدیده‌های موجود در طبیعت ذاتاً رفتار غیر خطی دارند. بی‌نظمی یک پدیده غیر خطی جالب و جذاب است و در چند دهه گذشته به‌طور وسیعی مورد تحقیق و مطالعه قرار گرفته است [4-1]. سیستم‌هایی که دارای رفتارهای غیر قابل پیش‌بینی، رفتارهای غیر منظم و پیچیده هستند به‌عنوان سیستم‌های بی‌نظم شناخته می‌شوند. رفتار بی‌نظم را می‌توان در بسیاری از

\* نویسنده مسئول: khordad@yu.ac.ir

داشته است. هم‌زمانی بی‌نظمی می‌تواند در خیلی از حوزه‌ها مانند ارتباطات سری و پردازش اطلاعات به‌کار گرفته شود. هم‌زمانی بدین معناست که دو سیستم بی‌نظم پس از گذشت زمان مشخصی دارای رفتار دینامیکی یکسان شوند. بنابراین، هر دو سیستم بر روی یک مسیر حرکت می‌کنند.

تا کنون مطالعات زیادی بر روی سیستم‌های بی‌نظم انجام گرفته است. به‌عنوان مثال می‌توان به سیستم‌های لورنتز، چن<sup>2</sup>، لو<sup>3</sup>، لیو<sup>4</sup> و راسلر<sup>5</sup> اشاره کرد [15-17]. یاسن<sup>6</sup> هم‌زمانی سیستم‌های راسلر و چن را با استفاده از کنترل مؤثر مورد مطالعه قرار داده‌اند [18]. محمود و همکاران هم‌زمانی دو سیستم بی‌نظم لو و چن را مورد بررسی قرار دادند [19]. پارک<sup>7</sup> هم‌زمانی تطبیقی یک سیستم فوق بی‌نظم چن را مورد مطالعه قرار داد [20]. لیو و همکاران یک سیستم بی‌نظم جدید خودکار را در سه بعد معرفی کردند و هم‌زمانی آن را بررسی کردند [21]. اخیراً، هم‌زمانی دو سیستم بی‌نظم چن را مورد مطالعه قرار داده‌ایم [22].

روش‌های هم‌زمانی ذکر شده در قسمت قبل و بسیاری از روش‌های دیگر عمده‌تاً مربوط به هم‌زمانی سیستم‌های بی‌نظم یکسان با پارامترهای معلوم یا نامعلوم می‌باشند. هم‌زمانی دو سیستم بی‌نظم مشابه با شرایط اولیه یکسان اولین بار توسط پکورا<sup>8</sup> و کارول<sup>9</sup> بررسی شده‌اند [23]. پارک هم‌زمانی بی‌نظمی معادلات غیرخطی بلوخ را با پارامترهای نامعلوم بررسی کرده است [24]. کیم<sup>10</sup> و همکاران یک سیستم بی‌نظم را معرفی کرد که شامل

در شرایط اولیه به‌وجود آید یک واگرایی در رفتار آینده سیستم اتفاق می‌افتد. آشناترین مثال در این مورد سیستم آب و هوا می‌باشد که معمولاً در حدود حداکثر یک هفته قابل پیش‌بینی است. در یک دهه گذشته، سیستم‌های بی‌نظم زیادی در مقاله‌های چاپ شده معرفی شده است [7-9]. می‌توان گفت که اولین سیستم بی‌نظم توسط لورنز<sup>1</sup> در سال 193 در مورد حرکت پروانه‌ای شکل معرفی شد [10]. دانشمندان و محققان زیادی سعی کرده‌اند که با استفاده از روش‌های گوناگون رفتار سیستم‌های بی‌نظم را کنترل کنند. مثال‌هایی از این روش‌ها عبارتند از کنترل ساختاری متغیر، کنترل تطبیقی پارامترها، کنترل مؤثر و غیره.

هم‌زمانی بی‌نظمی پدیده‌ای است که در آن دو یا چند سیستم بی‌نظم مجزا با یکدیگر جفت شوند. به‌سبب واگرایی مسیرهای نزدیک سیستم‌های بی‌نظم، داشتن دو سیستم که هم‌زمان شوند می‌تواند بسیار جذاب باشد. هم‌زمانی بی‌نظمی یک پدیده توانمند است و گستره کاربرد آن وسیع می‌باشد. هم‌زمانی می‌تواند تنوعی از حالت‌ها را نشان دهد که بستگی به طبیعت سیستم‌های برهم‌کنشی و ترتیب جفت‌شدگی دارد [12] و [11]. مثال‌هایی از هم‌زمانی عبارتند از هم‌زمانی مشابه، هم‌زمانی فازی و هم‌زمانی تعمیم یافته.

در چندین سال گذشته، توجه زیادی به مطالعه هم‌زمانی در سیستم‌های فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی شده است [14 و 13]. موضوع هم‌زمانی بی‌نظمی از سال 1990 توجه بسیاری از دانشمندان را به‌خود معطوف

<sup>6</sup> Yassen

<sup>7</sup> Park

<sup>8</sup> Pecora

<sup>9</sup> Corroll

<sup>10</sup> Kim

<sup>1</sup> Lorenz

<sup>2</sup> Chen

<sup>3</sup> Lu

<sup>4</sup> Liu

<sup>5</sup> Rossler

معادلات زیر سیستم بی‌نظم لیو را توصیف می‌کنند

$$\dot{x}_1 = A(x_2 - x_1), \quad 2$$

$$\dot{x}_2 = -C + x_1 x_3, \quad \dot{x}_3 = B - x_2^2$$

که  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  متغیر و  $A$ ،  $B$  و  $C$  پارامترهای سیستم می‌باشند. این سیستم در محدوده وسیعی از پارامترها به‌عنوان یک سیستم بی‌نظم به‌شمار می‌آید و رفتار دینامیکی پیچیده‌ای دارد. لیو و همکاران نشان دادند که این سیستم با پارامترهای زیر یک سیستم بی‌نظم جذاب می‌باشد [21]. این پارامترها عبارتند از  $A = 1.5$ ،  $B = 1.7$  و  $C = 0.05$ .

اکنون، به‌منظور بررسی رفتار هم‌زمانی سیستم‌های ذکر شده از روش زانگ<sup>1</sup> و همکاران استفاده می‌کنیم [27]. در این روش، ابتدا باید معادلات را به‌شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\dot{x} = f(x) + \alpha F(x), \quad 3$$

$$\dot{y} = g(y) + \beta G(y), \quad 4$$

که  $x$  و  $y$  به‌ترتیب بردارهای حالت سیستم محرک و پاسخ می‌باشد و  $\alpha$  و  $\beta$  پارامترهای نامعلوم سیستم هستند. مطابق با روش زانگ و همکاران، سیگنال کنترل را به‌شکل زیر بیان می‌کنیم

5

$$u = f(x) + \tilde{\alpha}F(x) - g(y) - \tilde{\beta}G(y) - ke$$

که  $k > 0$  یک ثابت است. همچنین، پارامترهای  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  تخمین‌هایی از پارامترهای نامعلوم و  $\alpha$  و  $\beta$  هستند.

یک جمله درجه دوم و یک عامل ضربی بود و هم‌زمانی را بررسی کرد [25]. برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر، خواننده می‌تواند به‌مراجع مراجعه کند [26-28]. در این مقاله قصد داریم با کمک روش هم‌زمانی تطبیقی سه سیستم بی‌نظم را مورد مطالعه قرار دهیم. این سیستم‌ها عبارتند از دو سیستم مشابه راسلر-راسلر، لیو-لیو و یک سیستم غیر مشابه لیو-راسلر. با استفاده از محاسبات عددی، این سیستم‌ها را شبیه‌سازی می‌کنیم.

### هم‌زمانی تطبیقی

در این بخش، دو سیستم بی‌نظم راسلر و لیو را در نظر می‌گیریم. با استفاده از این دو سیستم سه حالت جذاب راسلر-راسلر، لیو-لیو و راسلر-لیو را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. لازم به‌ذکر است که هر سیستم توسط یک معادله ریاضی توصیف می‌شود. در ابتدا، معادلات مربوط به سیستم‌ها را ارائه می‌دهیم.

### سیستم‌های بی‌نظم راسلر و لیو

معادلات زیر توصیف‌کننده سیستم راسلر می‌باشند

[7]

$$\dot{x}_1 = -(x_2 + x_3), \quad 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \quad \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c),$$

که  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  متغیر هستند. همچنین  $a$ ،  $b$  و  $c$  پارامترهای سیستم می‌باشند. این سیستم در مقادیر زیر یک سیستم بی‌نظم را نشان می‌دهد  $a = b = 0.2$  و  $c = 5.7$

<sup>1</sup> Zhang

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_3 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = \begin{bmatrix} -y_2 - y_3 \\ y_1 \\ y_1 y_3 \end{bmatrix}, \quad 10$$

$$G(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_3 \end{bmatrix}$$

که  $x = [x_1, x_2, x_3]^T$  و  $y = [y_1, y_2, y_3]^T$  به ترتیب بردار حالت سیستم محرک و سیستم پاسخ می باشند. در این مقاله سیگنال کنترل را به شکل زیر انتخاب می کنیم

$$u_1 = -(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) - ke_1, \quad 11$$

$$u_2 = x_1 + \tilde{\alpha}_1 x_2 - y_1 - \tilde{\beta}_1 y_2 - ke_2$$

$$u_3 = \tilde{\alpha}_2 + x_3(x_1 - \tilde{\alpha}_3) - \tilde{\beta}_2 - y_3(y_1 - \tilde{\beta}_3) - ke_3.$$

با اضافه کردن سیگنال فوق به سیستم پاسخ خواهیم داشت

$$\dot{y}_1 = -(x_2 + x_3) - ke_1, \quad 12$$

$$\dot{y}_2 = \beta_1 y_2 + x_1 + \tilde{\alpha}_1 x_2 - \tilde{\beta}_1 y_2 - ke_2$$

$$\dot{y}_3 = \beta_2 - \beta_3 y_3 + \tilde{\alpha}_2 + x_3(x_1 - \tilde{\alpha}_3) - \tilde{\beta}_2 + y_3 \tilde{\beta}_3 - ke_3.$$

قوانین تطبیقی برای مسأله کنونی به صورت زیر هستند

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -[F(x)]^T e = \quad 13$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 e_2 \\ -e_3 \\ x_3 e_3 \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق،  $e$  خطای همزمانی می باشد و به صورت  $e = x - y$  بیان می شود. لازم به ذکر است که هر وقت پارامتر  $e$  به سمت صفر میل کند نشان دهنده این است که دو سیستم همزمان شده اند. در این مرحله، یک سیگنال به سیستم پاسخ اضافه می کنیم. اگر قوانین تطبیقی را به صورت زیر در نظر بگیریم [27]، آنگاه می توانیم بگوییم که سیستم ها همزمان شده اند.

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -[F(x)]^T e$$

$$\dot{\tilde{\beta}} = [G(y)]^T e \quad 6$$

اکنون سه سیستم ذکر شده در بالا را به جزئیات مورد مطالعه قرار می دهیم.

### مورد 1: دو سیستم یکسان راسلر (راسلر-راسلر)

معادلات زیر سیستم اول را توصیف می کنند (سیستم محرک).

$$\dot{x}_1 = -(x_2 + x_3), \quad 7$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \alpha_1 x_2, \quad \dot{x}_3 = \alpha_2 + x_3(x_1 - \alpha_3)$$

معادلات زیر نیز سیستم دوم را توصیف می کنند (سیستم پاسخ)

$$\dot{y}_1 = -(y_2 + y_3), \quad 8$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \beta_1 y_2, \quad \dot{y}_3 = \beta_2 + y_3(y_1 - \beta_3)$$

با استفاده از روش زانگ و همکاران، می توانیم توابع  $f(x), F(x), g(y)$  را به شکل زیر تعریف کنیم

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix}, \quad 9$$

$$\dot{y}_2 = -\tilde{\alpha}_3 + x_1 x_3 + \tilde{\beta}_3 + \beta_3 - k e_2 \quad 18$$

14

$$\dot{y}_3 = \tilde{\alpha}_2 - x_2^2 - \tilde{\beta}_2 + \beta_2 - k e_3.$$

قوانین تطبیقی به شکل زیر نوشته می‌شوند

19

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\alpha}} &= -[F(x)]^T e = \\ &= - \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -(x_2 - x_1)e_1 \\ -e_3 \\ e_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\beta}} &= [G(y)]^T e = \\ &= \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_2 - y_1)e_1 \\ e_3 \\ -e_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T$  و  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$  به ترتیب پارامترهای نامعلوم سیستم‌های محرک و پاسخ می‌باشند.

**مورد 3: دو سیستم غیر یکسان (لیو-راسلر)**

همان‌گونه که می‌دانیم معادلات توصیف‌کننده سیستم‌های راسلر و لیو در روابط 1 و 2 نوشته شده‌اند. در این مورد، توابع  $G(y)$ ،  $f(x)$ ،  $F(x)$ ،  $g(y)$  به صورت زیر هستند

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_3 \\ -x_2^2 \end{bmatrix} \quad 21$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\beta}} &= [G(y)]^T e = \begin{bmatrix} 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_2 e_2 \\ e_3 \\ -y_3 e_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T$  و  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$  به ترتیب پارامترهای نامعلوم سیستم‌های محرک و پاسخ می‌باشند.

**مورد 2: دو سیستم یکسان لیو (لیو-لیو)**

با توجه به معادلات سیستم لیو داریم

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_3 \\ -x_2^2 \end{bmatrix}, \quad 15$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 y_3 \\ -y_2^2 \end{bmatrix}, \quad 16$$

$$G(y) = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سیگنال کنترل به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$u_1 = \tilde{\alpha}_1 (x_2 - x_1) - \tilde{\beta}_1 (y_2 - y_1) - k e_1, \quad 17$$

$$u_2 = -\tilde{\alpha}_3 + x_1 x_3 + \tilde{\beta}_3 - y_1 y_3 - k e_2$$

$$u_3 = \tilde{\alpha}_2 - x_2^2 - \tilde{\beta}_2 + \beta_2 - k e_3$$

با اضافه نمودن سیگنال فوق به سیستم پاسخ داریم

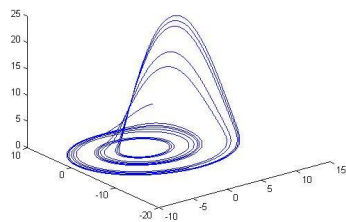
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \tilde{\alpha}_1 (x_2 - x_1) - \tilde{\beta}_1 (y_2 - y_1) + \\ &+ \beta_1 (y_2 - y_1) - k e_1, \end{aligned}$$

که  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T$  و  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$  به ترتیب پارامترهای نامعلوم سیستم های محرک و پاسخ می باشند.

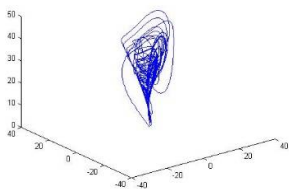
### بحث و نتایج

در این بخش، به منظور نشان دادن مزیت و توانایی روش هم زمانی تطبیقی، نتایج شبیه سازی را برای سه سیستم بی نظم متفاوت ارائه می دهیم. دو سیستم یکسان هستند (راسلر-راسلر و لیو-لیو) و یک سیستم غیر یکسان (راسلر-لیو) می باشد.

در شکل های 1، 2، 3 و 4، تصویر فازی سیستم های بی نظم راسلر و لیو به عنوان سیستم های پاسخ و محرک رسم شده اند.



شکل 1. تصویر فازی سیستم محرک بی نظم راسلر.



شکل 2. تصویر فازی سیستم پاسخ بی نظم راسلر.

$$g(y) = \begin{bmatrix} -(y_2 + y_3) \\ y_1 \\ y_1 y_3 \end{bmatrix}, \quad 22$$

$$G(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y_3 \end{bmatrix}$$

در این مرحله، سیگنال کنترل به صورت زیر انتخاب می شود

$$u_1 = \tilde{\alpha}_1(x_2 - x_1) - (y_2 + y_3) - ke_1, \quad 23$$

$$u_2 = -\tilde{\alpha}_3 + x_1 x_3 - y_1 - \tilde{\beta}_1 y_2 - ke_2 \quad u_3 = \tilde{\alpha}_2 - x_2^2 - \tilde{\beta}_2 - y_3(y_1 - \tilde{\beta}_3) - ke_3.$$

با اضافه نمودن سیگنال فوق به سیستم پاسخ داریم

$$\dot{y}_1 = \tilde{\alpha}_1(x_2 - x_1) - 2(y_2 + y_3) - ke_1, \quad 24$$

$$\dot{y}_2 = \beta_1 y_2 - \tilde{\alpha}_3 + x_1 x_3 - y_1 - \tilde{\beta}_1 y_2 - ke_2,$$

$$\dot{y}_3 = \beta_2 + \tilde{\alpha}_2 - x_2^2 - \tilde{\beta}_2 + y_3 \tilde{\beta}_3 - ke_3 + y_3 \beta_3.$$

قوانین تطبیقی نیز به شکل زیر خواهند بود

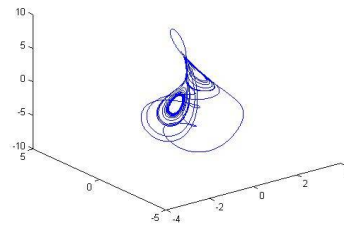
$$\dot{\tilde{\alpha}} = -[F(x)]^T e = \quad 25$$

$$-\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 - x_1)e_1 \\ -e_3 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

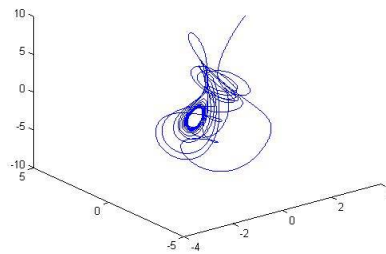
26

$$\dot{\tilde{\beta}} = [G(y)]^T e = \begin{bmatrix} 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 e_2 \\ e_3 \\ -y_3 e_3 \end{bmatrix}$$

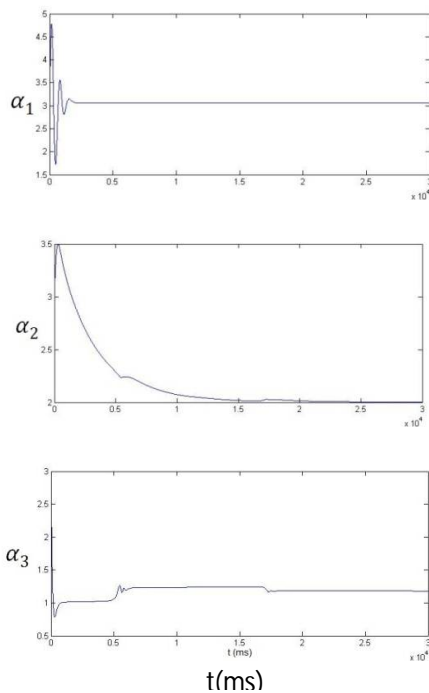
دید که خطاهای هم‌زمانی به‌طور مجانبی به سمت صفر همگرا می‌شود و تخمین پارامترها به سمت مقدار ثابت همگرا می‌گردد. این بدین معناست که دو سیستم هم‌زمان می‌شوند و به سمت یک مسیر حرکت می‌کنند. در گام بعد، هم‌زمانی سیستم لیو-لیو را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در محاسبات، شرایط اولیه برای بردار حالت را به صورت  $x(0) = [1, 1, 1]^T$  و  $y(0) = [4, 4, 4]^T$  انتخاب می‌کنیم. مقادیر درست بردارهای پارامتر نامعلوم برای سیستم محرک (لیو) و سیستم پاسخ (لیو) عبارتند از  $\tilde{\alpha}(0) = [1, 1, 1]^T$  و  $\tilde{\beta}(0) = [2, 2, 2]^T$ . دو سیستم را با سیگنال کنترل رابطه 17 و قوانین تطبیقی شبیه‌سازی می‌کنیم. مقادیر صحیح پارامترهای نامعلوم برابر است با  $\alpha = \beta = [1.5, 1.7, 0.05]^T$ .



شکل 3. تصویر فازی سیستم محرک بی‌نظم لیو.



شکل 4. تصویر فازی سیستم پاسخ بی‌نظم لیو.



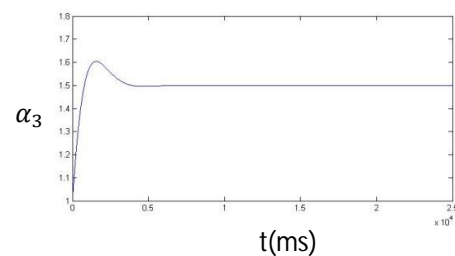
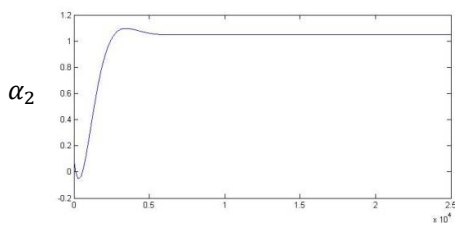
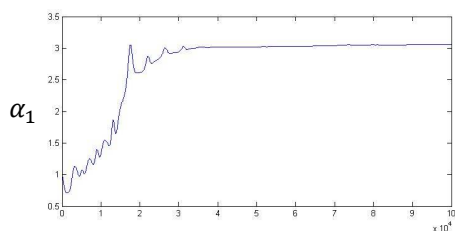
شکل 5. پارامترهای تطبیقی سیستم محرک (راسلر) به صورت

تابعی از زمان.

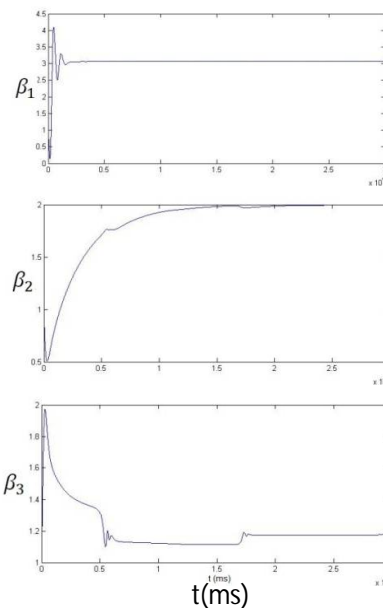
در گام نخست، دو سیستم راسلر بی‌نظم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در شبیه‌سازی عددی، شرایط اولیه  $x(0) = [5, 5, 5]^T$  و  $y(0) = [1, 1, 1]^T$  را برای بردار حالت انتخاب می‌کنیم. در محاسبات خود، مقادیر صحیح پارامترهای نامعلوم سیستم محرک (راسلر) و پاسخ (راسلر) به شکل  $\tilde{\alpha}(0) = [3, 3, 3]^T$  و  $\tilde{\beta}(0) = [1, 1, 1]^T$  دو سیستم را با استفاده از سیگنال کنترل رابطه 11 و قوانین تطبیقی شبیه‌سازی می‌کنیم. مقادیر دقیق پارامترهای نامعلوم  $\alpha = \beta = [0.2, 0.2, 5.7]^T$  هستند.

تغییر پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  در شکل‌های 5 و 6 برای سیستم راسلر-راسلر نشان داده شده است. همچنین، خطاهای هم‌زمانی  $e_1$ ،  $e_2$  و  $e_3$  برای سیستم راسلر-راسلر در شکل 7 نشان داده شده است. مطابق با شکل می‌توان

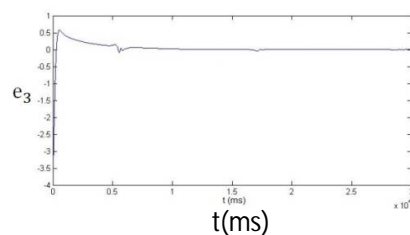
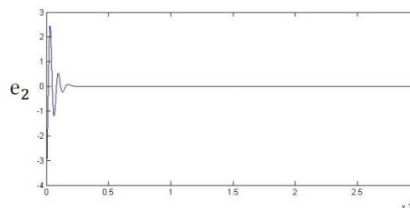
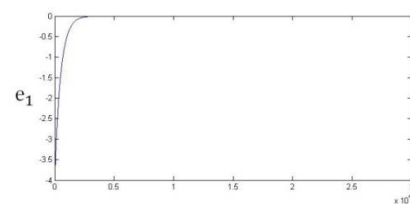
در شکل های 8 و 9، تغییرات پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت تابعی از زمان برای سیستم لیو-لیو رسم شده است. از شکل ها مشاهده می شود که پارامترها پس از گذشت زمان کوتاهی به سمت مقادیر ثابت همگرا می شوند. خطاهای هم زمانی نیز برای سیستم لیو-لیو در شکل 10 رسم شده است. با توجه به شکل می توان گفت که خطاها به سمت صفر همگرا می شوند که نشان دهنده هم زمانی سیستم مورد نظر می باشد.



شکل 8. پارامترهای تطبیقی سیستم محرک (لیو) به صورت تابعی از زمان.



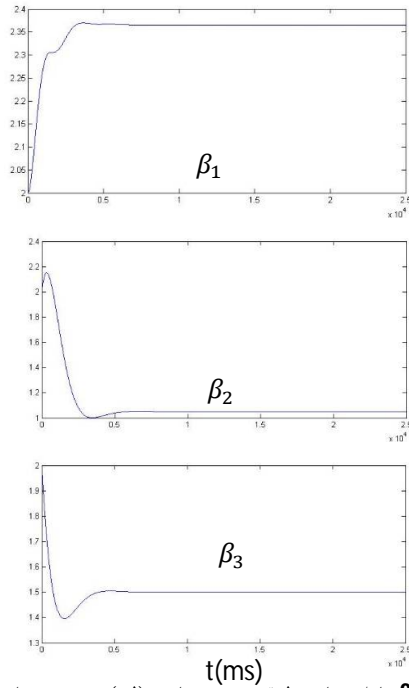
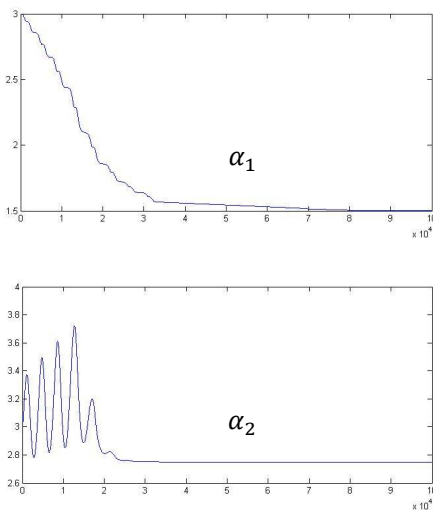
شکل 6. پارامترهای تطبیقی سیستم پاسخ (راسلر) به صورت تابعی از زمان.



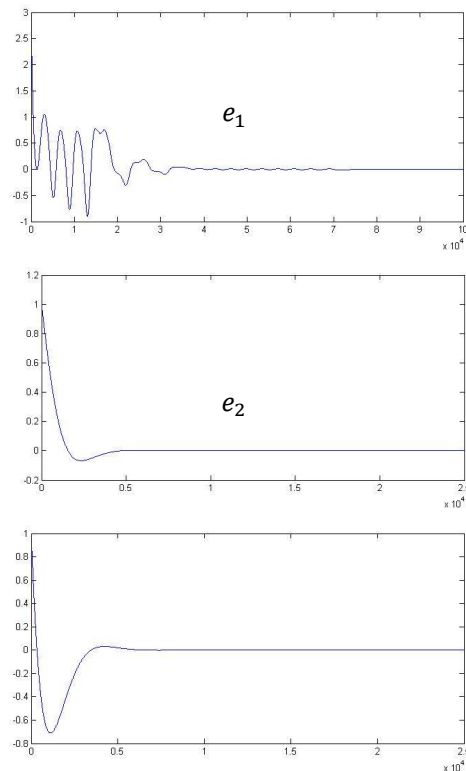
شکل 7. خطاهای هم زمانی سیستم راسلر- راسلر به صورت تابعی از زمان.



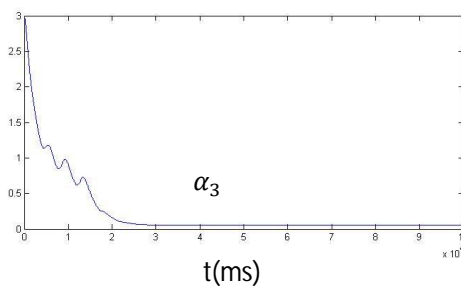
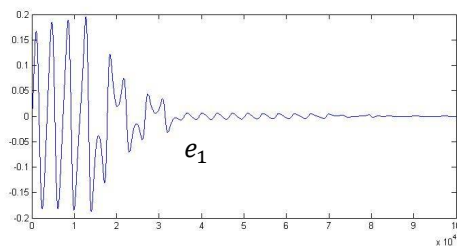
سرانجام، هم‌زمانی سیستم لیو-راسلر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شرایط اولیه سیستم عبارتند از  $x(0) = [1, 1, 1]^T$  همچنین مقادیر پارامترهای نامعلوم سیستم‌های محرک و پاسخ به صورت  $\tilde{\alpha}(0) = [3, 3, 3]^T$  و  $\tilde{\beta}(0) = [1, 1, 1]^T$  انتخاب می‌شوند. دو سیستم را با استفاده از سیگنال کنترل رابطه 23 و قوانین تطبیقی شبیه‌سازی می‌کنیم. مقادیر صحیح پارامترهای نامعلوم عبارتند از  $\alpha = [1.5, 1.7, 0.05]^T$  و  $\beta = [0.2, 0.2, 5.7]^T$  تغییرات پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت تابعی از زمان در شکل‌های 11 و 12 نشان داده شده است. این پارامترها به ترتیب مربوط به سیستم‌های لیو و راسلر می‌باشند. می‌توان دید که پارامترها پس از گذشت زمان کوتاهی به مقادیر ثابت همگرا می‌شوند. خطاهای هم‌زمانی نیز در شکل 13 رسم شده است. این بدان معناست که دو سیستم هم‌زمان می‌شوند و بر روی مسیر واحدی حرکت می‌کنند.



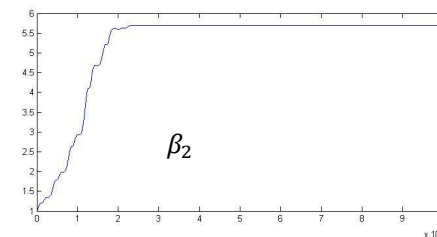
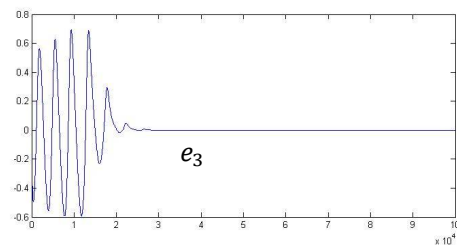
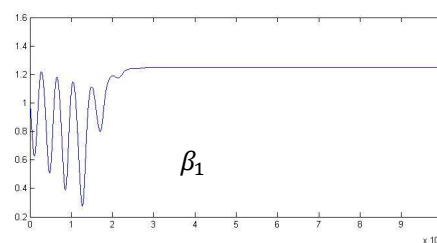
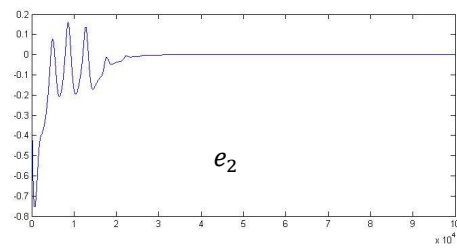
شکل 9. پارامترهای تطبیقی سیستم پاسخ (لیو) به صورت تابعی از زمان.



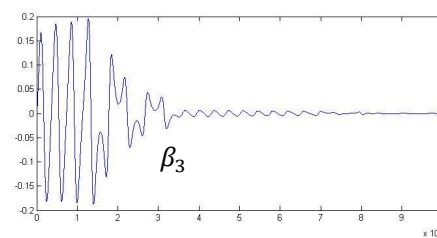
شکل 10. خطاهای هم‌زمانی سیستم لیو-راسلر به صورت تابعی از زمان



شکل 11. پارامترهای تطبیقی سیستم محرک (لیو) به صورت تابعی از زمان.



شکل 13. خطاهای همزمانی سیستم لیو- راسلر به صورت تابعی از زمان.



t(ms)

شکل 12. پارامترهای تطبیقی سیستم پاسخ (راسلر) به صورت تابعی از زمان

به طور کلی می توانیم بگوییم که سیستم اول (راسلر- راسلر) سریع تر از دو سیستم دیگر هم زمان می شوند. همچنین می توان گفت که روش هم زمانی تطبیقی روش مفیدی برای مطالعه هم زمانی سیستم های بی نظم می باشند.

در روش های ارائه شده به منظور هم زمان سازی سیستم های بی نظم، از سیستم های یکسان استفاده می شود که برای استفاده در رمز نگاری با پیدا کردن سیستم مورد استفاده در هم زمان سازی می توان با الگوریتم های مختلف به کلید رمز نگاری پی برد. در صورتی که از سیستم های غیر یکسان استفاده شود، می توان تا حد زیادی احتمال رمز گشایی را کاهش داد. در این مقاله پس از بررسی روش های مختلف هم زمان

[9] H. Du, Q. Zeng, C. Wang, Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters. *Physics Letters A* **372** (2008) 5402-5410.

[10] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130-141.

[11] A. Arenas, A. D. Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou, Synchronization in complex networks. *Physics Reports* **469** (2008) 93-153.

[12] C. W. Wu, Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2007).

[13] M. C. Ho, Y. C. Hung, Synchronization of two different systems by using generalized active control. *Physics Letters A* **301** (2002) 424-428.

[14] M. T. Yassen, Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals* **23** (2005) 131-140.

[15] J. Lü, X. Yu, G. Chen, Chaos synchronization of general complex dynamical networks. *Physica A* **334** (2004) 281-302.

[16] J. H. Lü, T. S. Zhou, S. C. Zhang, Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals* **14** (2002) 529-541.

[17] J. C. Sprott, On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems. *Applied Mathematics Comput.* **256** (2015) 334-343.

[18] M. T. Yassen, Synchronization hyperchaos of hyperchaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals* **37** (2008) 465-475.

[19] G. M. Mahmoud, T. Bountis, G. M. A. Latif, E. E. Mahmoud, Chaos synchronization of two different chaotic complex Chen and Lu systems. *Nonlinear Dynamics* **55** (2009) 43-53.

[20] J. H. Park, Adaptive synchronization of hyperchaotic Chen system with uncertain parameters. *Chaos, Solitons & Fractals* **26** (2005) 959-964.

سازی توانسته‌ایم روشی را پیدا کنیم که این امر را پوشش می‌دهد و می‌تواند سیستم‌های یکسان و غیر یکسان بی‌نظم را با استفاده از الگوریتم تطبیقی هم‌زمان کرد.

بیشترین کاربرد سیستم‌های غیر یکسان را می‌توان در رمزنگاری و ارسال پیام با کلید مشخص بدون قابلیت رمزگشایی دانست زیرا علاوه بر بی‌نظم بودن سیستم‌ها، خود سیستم‌ها نیز به‌طور جداگانه رفتار کاملاً متفاوت خواهند داشت که موجب قوی شدن رمزنگاری خواهد شد.

#### مرجع‌ها

[1] E. Mosekilde, Y. Mastrenko, D. Postnov, Chaotic Synchronization Applications for living Systems, World Scientific, Singapore, (2002).

[2] C. Gros, Complex and Adaptive Dynamical Systems a primer, 2<sup>th</sup> edition Published in Springer (2010).

[3] J.H. Park, O.M. Kwon, LMI optimization approach to stabilization of time-delay chaotic systems. *Chaos, Soliton & Fractals* **23** (2005) 445-450.

[4] W.L. Lu, T.P. Chen, Synchronization of networks with time-varying couplings. *Appl. Math. A: J. Chin. Univ.* **28** (2013) 438-454.

[5] V. G. Ivancevic, T. I. Tijana, Complex nonlinearity: chaos, phase transitions, topology change, and path integrals, Springer (2008).

[6] G. R. Watts, Global Warming and the Future of the Earth, Morgan & Claypool (2007).

[7] O. E. RöSSLer, An equation for continuous chaos. *Physics Letters A* **57** (1976) 397-398.

[8] B. Munmuangsaen, B. Srisuchinwong, A new five-term simple chaotic attractor. *Physics Letters A* **373** (2009) 4038-4043.

- [21] Y. Liu, S. Pang, D. Chen, An unusual chaotic system and its control. *Mathematical and Computer Modelling* **57** (2013) 2473-2493.
- [22] R. Khordad, M. A. Dehghani, A. Dehghani, Adaptive synchronization of two chaotic Chen systems with unknown parameters. *International Journal of Modern Physics C* **25** (2014) 1350085-1350094.
- [23] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters* **64** (1990) 821-825.
- [24] J. H. Park, Chaos synchronization of nonlinear Bloch equations. *Chaos, Solitons & Fractals* **27** (2006) 357-361.
- [25] D. Kim, P. H. Chang, Se-hwan Kim, A new chaotic attractor and its robust function projective synchronization. *Nonlinear Dynamics* **73** (2013) 1883-1893.
- [26] S. Cheng, J. C. Ji, J. Zhou, Fast synchronization of directionally coupled chaotic systems. *Appl. Math. Model.* **37** (2013) 127-136.
- [27] L. Zhang, W. Huang, Z. Wang and T. Chai, Adaptive synchronization between two different chaotic systems with unknown parameters. *Physics Letters A* **350** (2006) 363-366.
- [28] G. S. Medvedev, Synchronization of coupled limit cycles. *Journal of Nonlinear Sciences* **21** (2011) 441-464.