

## جواب‌های شبه‌سالی‌تونی سیستم $\phi^6$ مختلط در فضا زمان 1+1 بعدی

محمد محمدی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر، ایران

دریافت: 1396/06/31 ویرایش نهایی: 1397/01/20 پذیرش: 1397/02/03

### چکیده

در این مقاله به معرفی جواب‌های شبه‌سالی‌تونی سیستم غیرخطی  $\phi^6$  مختلط به‌عنوان مثال خاصی از سیستم‌های کلاین گوردون غیرخطی مختلط در فضا-زمان  $1 + 1$  بعدی، می‌پردازیم. کینک (پادکینک)های مختلط، بسته‌های تابشی و بسته‌موج‌ها سه نوع متفاوت از جواب‌های شبه‌سالی‌تونی برای سیستم  $\phi^6$  مختلط می‌باشند. تمامی روابط انرژی-تکانه نسبیتی برای این گونه از جواب‌ها در حالت کلی ارضاء می‌شوند. برای این سیستم خاص، نتایج عددی نشان از این دارند که در برخورد بین زوج کینک-پادکینک‌های مختلط و زوج بسته‌موج‌ها، شاهد یک عدم قطعیت آشکار در خروجی برخوردها می‌باشیم که ریشه در یک فاز اولیه دلخواه دارد. همچنین در برخوردهای بین زوج کینک-پادکینک‌های غیر هم فاز همیشه شاهد خروج بسته‌های تابشی می‌باشیم. به‌صورت عکس، در برخوردهای بین دو بسته تابشی پر انرژی با جرم‌های سکون صفر، امکان خلق یک زوج کینک-پادکینک با جرم‌های سکون غیر صفر، وجود دارد.

**کلیدواژگان:** سیستم  $\phi^6$ ، کینک، بسته‌موج‌ها، بسته‌های تابشی، عدم قطعیت

### مقدمه

منفرد کینک و پادکینک آن به‌تمام معنا سالی‌تون هستند، به‌این معنی که در برخورد با یکدیگر بدون کوچکترین تغییری، مجدداً ظاهر می‌شوند [1-5]. در فضا زمان  $1 + 3$  بعدی، مدل معروف و موفق اسکرم [21 و 22] در رابطه با باریون‌ها و همچنین مدل توفت پولیوکوف [23 و 24] در رابطه با معرفی تک قطبی مغناطیسی، از جمله تلاش‌های موفق می‌باشند که با ارائه میدان‌های نسبیتی مناسب، به‌مفهوم ذره به‌عنوان یک برجستگی پایدار از انرژی در فضا عینیت بخشیده‌اند.

در این مقاله به‌طور خاص مطالعه خود را به سیستم  $\phi^6$  مختلط به‌عنوان مثالی خاص از سیستم‌های کلاین گوردون غیرخطی مختلط محدود می‌سازیم [25-30]. برای این دسته از سیستم‌ها برخلاف نسخه حقیقی آنها [17-20] که تنها جواب‌های شناخته شده کینک و پادکینک را در

سیستم‌های کلاین گوردون غیرخطی حقیقی در فضا زمان  $1 + 1$  بعدی با جواب‌های شناخته شده کینک (پادکینک) در بسیاری از مقالات و کتاب‌ها مورد توجه بوده است [1-20]. برای این‌گونه از جواب‌ها، فرم چگالی انرژی وابسته، جایگزیده می‌باشد و همانند یک ذره کلاسیکی تمامی روابط انرژی-تکانه نسبیتی را ارضاء می‌کنند و عرض آنها دقیقاً مطابق با پدیده انقباض لورنتس رقم می‌خورد. جواب‌های منفرد کینک و پادکینک، توپولوژیک می‌باشند، به‌این معنی که، فرم تابع میدان وابسته به آنها در حد  $\pm\infty$  به سمت مقادیر متفاوتی میل می‌کند. همین خاصیت توپولوژیک بودن دلیل پایداری آنها می‌باشد. معروفترین سیستم در این زمینه، سیستم سینوسی گوردون می‌باشد که جواب‌های

\*نویسنده مسئول: physmohammadi@pgu.ac.ir

نهان ریشه عدم قطعیت‌ها را برای ما روشن می‌سازد. این فاز اولیه به‌تنهایی نقشی در خصوصیات ذره‌ای بسته‌موج‌ها و کینک (پادکینک)ها ندارد ولی در برخوردها بسیار تأثیر گذار می‌باشد. در برخورد بین زوج کینک-پادکینک‌های مختلط، چنانچه اختلاف فاز غیر صفر باشد، همیشه شاهد ساطع شدن یک زوج بسته تابشی می‌باشیم. به‌صورت عکس نیز می‌توان با مهیا نمودن دو بسته تابشی پر انرژی و برخورد آنها به‌همدیگر، شاهد خلق یک زوج کینک-پادکینک باشیم. علاوه بر این، در رابطه با سیستم حقیقی  $\phi^4$  با جواب‌های کینک و پاد کینک، وجود چنین عدم قطعیت‌هایی، به‌صورت عددی، نیز قابل مشاهده شده است [31].

### معرفی سیستم $\phi^6$ مختلط به‌عنوان مثالی خاص از سیستم‌های کلاین گوردن غیرخطی مختلط

در حالت کلی سیستم‌های کلاین گوردن غیرخطی مختلط نسبتی در فضا زمان  $1 + 1$  را می‌توان به‌وسیله چگالی لاگرانژی زیر معرفی نمود:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V(R) \quad 1$$

که در آن  $\phi$  یک میدان اسکالر مختلط،  $R = |\phi|$  اندازه یا مدول میدان و جمله خود برهم کنش  $V(R)$  را تابع پتانسیل می‌نامیم. با به‌کارگیری اصل کمترین کنش، معادله دینامیکی مربوطه به فرم زیر حاصل خواهد شد:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi^*} = -\frac{1}{2} \frac{\phi}{R} \frac{dV}{dR}. \quad 2$$

بر می‌گرفتند، می‌توان سه نوع جواب منفرد (شبه‌سالیونی) معرفی نمود: کینک‌های (پادکینک‌های) مختلط، بسته‌های تابشی و بسته‌موج‌ها. کینک‌های مختلط و بسته‌های تابشی نخستین بار در مقاله [28] معرفی شده‌اند ولی جواب‌های بسته‌موجی قدمت بیشتری دارند [27-30]. در مقاله [28]، بدون ارائه یک فرمول بندی جامع و مستقل از نوع سیستم کلاین گوردن غیرخطی، تنها به‌مطالعه جواب‌های سیستم سینوسی گوردن مختلط محدود شده است. در مقاله حاضر با به‌کارگیری نمایش قطبی از میدان‌ها، یک جمع‌بندی کامل و سراسر از تمامی این سه نوع جواب در ساده‌ترین شکل ممکن برای هر سیستم کلاین گوردن غیرخطی دلخواه در فضا-زمان  $1 + 1$  بعدی، ارائه خواهیم داد. بسته‌های تابشی جرم سکون صفر دارند و با سرعت نور حرکت می‌کنند. آنها می‌توانند به‌صورت توپولوژیک و یا غیر توپولوژیک باشند. بسته‌موج‌ها، همان‌طور که از نامشان مشخص است، موجوداتی هستند که جرم سکون غیر صفر دارند و هر کدام با یک فرکانس سکون مشخصه  $\omega_0$  خاص خود، شناخته می‌شوند. برای هر کدام از این جواب‌های بسته‌موجی، یک رابطه شبه‌دوبروی خاص وجود دارد که ارتباط بین خصوصیات موجی و ذره‌ای این موجودات دو رگه را برقرار می‌کند. تمامی این جواب‌ها، همه روابط تکانه-انرژی نسبیتی را مطابق انتظار، ارضاء می‌کنند.

خوشبختانه برای سیستم  $\phi^6$  مختلط، جواب‌های کینک و بسته‌موج‌ها به‌صورت تحلیلی و دقیق حاصل خواهند شد. نکته جالبی که در رابطه با برخوردهای جواب‌های بسته‌موجی و کینک (پادکینک)های مختلط این سیستم غیرخطی خاص، قابل توجه می‌باشد، وجود یک عدم قطعیت واضح در برخوردها می‌باشد که ریشه در یک فاز اولیه دلخواه دارد. این فاز اولیه همانند یک متغیر

در اینجا  $\eta$  و  $C$  صرفاً دو عدد ثابت دلخواه می‌باشند و  $\epsilon^{\mu\nu}$  تانسور پاد متقارن  $2 \times 2$  می‌باشد [27].

برای سادگی محاسبات و نتایج، به جای استفاده از میدان‌های  $\phi$  و  $\phi^*$  می‌توان میدان‌های قطبی  $R$  (اندازه) و  $\theta$  (فاز) را به‌طور معادل به کار بست:

$$\phi = R e^{i\theta} \quad 8$$

با به‌کارگیری چنین نمایشی، فرم چگالی لاگرانژی 1 و چگالی انرژی 4 به صورت‌های معادل زیر حاصل خواهند شد:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu R \partial^\mu R + R^2 (\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta) - V(R) \quad 9$$

$$\varepsilon = \dot{R}^2 + R'^2 + R^2 (\dot{\theta}^2 + \theta'^2) + V(R) \quad 10$$

به‌همین نسبت معادلات دینامیکی مربوطه، به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\partial_\mu \partial^\mu R - R (\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta) = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dR} \quad 11$$

$$\partial_\mu (R^2 \partial^\mu \theta) = 0 \quad 12$$

معادله دینامیکی 12 چیزی جدا از رابطه پایستگی چگالی جریان الکتریکی در نمایش قطبی نمی‌باشد، به عبارت دیگر:

$$j^\mu = \eta R^2 \partial^\mu \theta \quad 13$$

در حالت کلی بسته به نوع پتانسیل انتخابی  $V(R)$ ، سیستم‌های کلاین گوردون غیرخطی مختلط متفاوتی را می‌توان تعریف نمود. در این مقاله به‌طور خاص توجه خود را به جواب‌های شبه‌سالیونی (منفرد) یک تابع پتانسیل خاص که آن را پتانسیل  $\phi^6$  مختلط می‌نامیم، معطوف می‌نماییم. این سیستم توسط پتانسیل زیر معرفی می‌شود:

$$V(R) = R^2 (R^2 - 1)^2 \quad 14$$

تانسور انرژی تکانه وابسته به چگالی لاگرانژی 1 در حالت کلی با به‌کارگیری قضیه نودر<sup>1</sup> حاصل خواهد شد:

$$T^{\mu\nu} = 2\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad 3$$

که در آن  $g^{\mu\nu}$  تانسور متریک برای فضا-زمان  $1 + 1$  بعدی مینکوفسکی می‌باشد ( $g^{00} = 1$ ،  $g^{11} = -1$  و  $g^{01} = g^{10} = 0$ ). مؤلفه  $T^{00}$  این تانسور متناظر با چگالی انرژی می‌باشد:

$$\varepsilon(x, t) = T^{00} = \dot{\phi} \dot{\phi}^* + \phi' \phi'^* + V(R) \quad 4$$

که در آن علامت نقطه به معنای مشتق زمانی و علامت پریم به معنای مشتق مکانی است. دقت داشته باشید که در کل این مقاله ما سرعت نور  $C$  را برای سادگی محاسبات برابر با واحد فرض نموده‌ایم.

برای این نوع از سیستم‌های غیرخطی در حالت کلی می‌توان دو کمیت پایستار به نام‌های بار توپولوژیک  $Q$  و بار الکتریکی  $q$  به دست آورد که توسط انتگرال‌های زیر معرفی می‌شوند:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 dx \quad \text{و} \quad Q = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx. \quad 5$$

$j^0$  (چگالی بار الکتریکی) و  $J^0$  (چگالی بار توپولوژیک) مؤلفه‌های صفرم دو چار بردار نسبیتی  $j^\mu$  (چگالی جریان بار الکتریکی) و  $J^\mu$  (چگالی جریان بار توپولوژیک) هستند:

$$j^\mu = i\eta (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad 6$$

$$J^\mu = C \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad 7$$

<sup>1</sup> Noether's theorem

$$\phi(x, t) = e^{i\theta} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh[\pm\gamma(x - x_0 - vt)])} \quad 17$$

که در آن  $\theta$  همان طور که گفته شد تنها یک فاز ثابت است. برای چنین جواب هایی اگر  $C = 1$  فرض شود، برای بار توپولوژیک وابسته نتیجه زیر حاصل می شود:

$$Q = \pm e^{i\theta} \quad 18$$

که در آن علامت  $+$  ( $-$ ) برای جواب های کینک (پادکینک) می باشد. علاوه بر این، به دلیل ثابت بودن فاز  $\theta$ ، به سادگی می توان نشان داد که بار الکتریکی چنین جواب هایی صفر است.

با به کارگیری تانسور انرژی تکانه معادله 3، به سادگی می توان نشان داد چنین جواب هایی فارغ از فاز ثابت  $\theta$  روابط جرم و انرژی نسبی استاندارد را طبق انتظار ارضاء می کنند:

$$E_v = \gamma E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{00} dx \quad 19$$

$$p = \gamma m_0 v = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{01} dx \quad 20$$

در اینجا  $E_0 = m_0 c^2$ ،  $E_v$  و  $p$  به ترتیب انرژی سکون، انرژی کل و تکانه یک جواب کینک (پادکینک) مختلط می باشد که با سرعت  $v$  حرکت می کند. عملاً فارغ از مقدار  $\theta$ ، انرژی سکون تمامی جواب های کینک (پادکینک) مختلف به عنوان یک مشخصه ثابت، یکی می باشد.

### بسته های تابشی<sup>3</sup>

به سادگی می توان نشان داد که برای سیستم  $\phi^6$  مختلط، جواب هایی به فرم زیر، در حالت کلی معادلات موج 11 و 12 را ارضاء می کنند:

$$R(x, t) = 1 \quad \text{و} \quad \theta(x, t) = f(x \pm ct) \quad 21$$

برای چنین پتانسیلی سه نقطه خلأ<sup>2</sup> در  $R = -1.0.1$  وجود خواهد داشت. چون قید گذاشته ایم که  $R \geq 0$  باشد، بنابراین تنها باید دو نقطه خلأ  $R = 0.1$  را برای پتانسیل سیستم  $\phi^6$  مختلط معادله 14 مد نظر قرار داد. برای این سیستم خاص سه نوع جواب منفرد متفاوت وجود خواهد داشت که به ترتیب آنها را کینک (پادکینک) های مختلط، بسته های تابشی و بسته موج ها می نامیم. در این بخش، در سه قسمت جداگانه به ترتیب به معرفی تک تک آنها می پردازیم.

### کینک ها و پادکینک های مختلط

اگر تابع فاز  $\theta(x, t)$  را برابر با مقداری ثابت فرض نماییم، در این صورت معادله 12 به طور خودکار ارضاء می شود و معادله 11 به فرم ساده زیر خلاصه می شود.

$$\partial_\mu \partial^\mu R = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dR} \quad 15$$

که در واقع نمایش یک معادله کلاین گوردون حقیقی با جواب های مشهور کینک و پادکینک می باشد. با قید دو نقطه خلأ  $R = 0.1$ ، عملاً برای معادله موج 15 با یک روش کاملاً استاندارد و شناخته شده، دو نوع از جواب های کینک و پادکینک به فرم زیر حاصل می شوند [20]:

$$R(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh[\pm\gamma(x - x_0 - vt)])} \quad 16$$

که در آن علامت  $+$  ( $-$ ) برای جواب های کینک (پادکینک)،  $v$  سرعت این موج رونده،  $x_0$  مکان اولیه و  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$  می باشد. بنابراین یک جواب کینک (پادکینک) مختلط رونده سیستم  $\phi^6$  مختلط در حالت کلی به فرم زیر قابل نمایش است:

<sup>3</sup> Radiative profiles

<sup>2</sup> vacuum point

$$\phi_i = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x \pm t)} \quad 27$$

در این صورت یک بسته تابشی معرفی نموده‌ایم. در حالت کلی با توجه به رابطه 6 به سادگی می‌توان اثبات نمود که اگر توابع  $\phi_r$  و  $\phi_i$  زوج (غیر زوج) باشند، بار الکتریکی صفر (غیر صفر) است. به همین روال با توجه به رابطه 7 اگر توابع  $\phi_r$  و  $\phi_i$  توپولوژیک (غیر توپولوژیک) باشند، بار توپولوژیک وابسته غیر صفر (صفر) می‌باشد.

#### بسته‌موج‌ها<sup>4</sup>

در حالت کلی مایل به یافتن جواب‌هایی هستیم به نحوی که برای توابع  $R$  و  $\theta$ ، وابستگی‌های فضا-زمانی به فرم زیر باشند:

$$R(x, t) = R(\gamma(x - vt)) \quad 28$$

$$\theta(x, t) = k_\mu x^\mu + \theta_0 = \omega t - kx + \theta_0. \quad 29$$

به سادگی و با جایگذاری این جواب‌های پیشنهادی در معادلات موج 11 و 12، با قید روابط

$$k = \frac{\omega}{c^2} v \quad \text{و} \quad \omega = \gamma \omega_0 \quad 30$$

و معادله

$$\partial_\mu \partial^\mu R = -\frac{d^2 R}{d\bar{x}^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dR} + \omega_0^2 R \quad 31$$

که در آن  $\bar{x} = \gamma(x - vt)$  عملاً می‌توانیم جواب‌های بسته‌موجی مختلف را به ازای  $\omega_0$  (فرکانس سکون)‌های متفاوت به دست آورد. در واقع یک طیف پیوسته از جواب‌های بسته‌موجی وجود خواهند داشت که می‌توانند توسط یک طیف پیوسته از فرکانس‌های سکون ( $\omega_0$ ) مشخص شوند.  $\theta_0$  یا فاز اولیه صرفاً یک

که در آن  $f$  هر تابع دلخواه خوش تعریفی می‌تواند باشد. برای چنین جواب‌هایی تابع چگالی انرژی 10 به فرم ساده زیر تقلیل می‌یابد:

$$\varepsilon(x, t) = 2 \left( \frac{df}{d\bar{x}} \right)^2 \quad 22$$

که در آن  $\bar{x} = x \pm ct$  اگر برای یک تابع دلخواه  $f(\bar{x})$ ، فرم چگالی انرژی مربوطه رابطه 22 به صورت جایگزیده ظاهر شود، در این صورت یک بسته تابشی داریم. در واقع یک بسته تابشی، یک بسته از انرژی جایگزیده است که با سرعت نور حرکت می‌کند. به سادگی می‌توان نشان داد که برای چنین جواب‌هایی در حالت کلی همانند ذراتی با جرم سکون صفر، رابطه تکانه-انرژی نسبییتی مطابق انتظار به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{01} dx = \pm \frac{E}{c} \quad 23$$

به صورت معادل می‌توان روشی دیگر برای معرفی جواب‌های تابشی ارائه نمود:

$$\phi(x, t) = e^{if(\bar{x})} = \phi_r(\bar{x}) + i\phi_i(\bar{x}) \quad 24$$

مشروط به اینکه:

$$1 = \sqrt{\phi_r^2 + \phi_i^2}. \quad 25$$

به عنوان نمونه اگر قسمت حقیقی میدان  $\phi$  را به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$\phi_r = \operatorname{sech}(x \pm t) \quad 26$$

و قسمت موهومی آن را به صورت زیر فرض نماییم:

<sup>4</sup> Wave packets

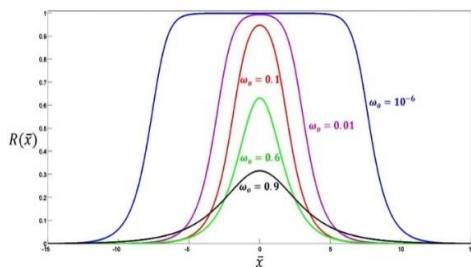
$$p = \hbar k \quad 35$$

که یک رابطه شبه دوبروی می باشد. برای سیستم  $\phi^6$  مختلط با پتانسیل معرف رابطه 14 با کمک نرم افزار maple، به سادگی می توان انتگرال معادله 33 را در برای تمامی  $\omega_0$  های ممکنه حل نمود و جواب های بسته موجی را به فرم کلی زیر به دست آورد:

$$R(\bar{x}) = \frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\sqrt{1+|\omega_0| \cosh(2\sqrt{1-\omega_0^2}\bar{x})}} \quad 36$$

کاملاً واضح می باشد که بر روی  $\omega_0$  ها قید داریم. به عبارت دیگر تنها آن دسته از  $\omega_0$  هایی که در بازه  $0 < |\omega_0| < 1$  قرار دارند مجاز می باشند و به نتایج صحیح، که در واقع بسته موج ها باشند، ختم می شوند. برای حد  $0 \rightarrow |\omega_0|$  عملاً جواب معادله 36 به صورت ترکیبی از یک جواب کینک به علاوه یک جواب پادکینک که با فاصله دور از همدیگر قرار گرفته اند، تبدیل می شود (شکل 1).

شکل 1. به ازای فرکانس های سکون مختلف  $\omega_0$  جواب های منفرد مختلف حاصل خواهند شد.



با به کارگیری رابطه 10، انرژی سکون یک بسته موج با فرکانس سکون  $\omega_0$  به فرم زیر قابل حصول می باشد:

$$E_0(\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [R'^2 + \omega_0^2 R^2 + V(R)] \quad 37$$

عدد ثابت دلخواه می باشد که هیچ گونه نقشی در معادلات و روابط بالا ندارد. اگر دو طرف معادله 31 را در  $\frac{dR}{d\bar{x}}$  ضرب نماییم و انتگرال بگیریم، نهایتاً به دست خواهیم آورد:

$$\left(\frac{dR}{d\bar{x}}\right)^2 + \omega_0^2 R^2 = V(R) + C' \quad 32$$

که در آن  $C'$  صرفاً یک ثابت انتگرال گیری می باشد که ملاحظات مربوط به انرژی ایجاب می کند آن را برابر با صفر قرار دهیم. در صورتی که تابع پتانسیل  $V(R)$  به طور دقیق شناخته شده باشد، حل کلی یک بسته موج به ازای یک  $\omega_0$  خاص از طریق انتگرال زیر حاصل خواهد شد:

$$\bar{x} - x_0 = \pm \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{V(R) - \omega_0^2 R^2}} \quad 33$$

با یک سری محاسبات سرراست به راحتی می توان نشان داد که دقیقاً مشابه با روابط انرژی تکانه نسبی 19 و 20، برای جواب های بسته موجی نیز روابط مشابه ای وجود خواهد داشت.

برای یک بسته موج تابشی مطابق با رابطه 30 و رابطه نسبی 19 متوجه می شویم که فرکانس و انرژی کل با یک ضریب مشترک  $\gamma$  بر حسب  $\omega_0$  و  $E_0$  تغییر پیدا می کنند. بنابراین همیشه می توانیم با معرفی یک ثابت تناسب  $\hbar$  آنها را به هم مرتبط نمود، به عبارت دیگر:

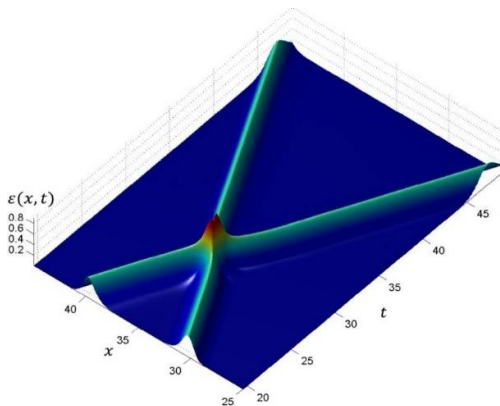
$$E = \hbar \omega \quad 34$$

به سادگی می توان درک نمود که ثابت  $\hbar$  خود تابعی از فرکانس سکون  $\omega_0$  می باشد و عملاً برای بسته موج های مختلف،  $\hbar$  های مختلفی داریم. علاوه بر این، به سادگی می توان متوجه شد که تکانه نسبی  $p$  یک بسته موج و عدد موج آن توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند:

پایداری جواب‌های بسته‌موجی افزایش می‌یابد. بنابراین علی‌رغم اینکه برای حالتی مانند  $\omega_0 = 0.75$  به لحاظ انرژی شرایط برای شکافته شدن بسته‌موج مهیا می‌باشد ولی نتایج عددی از پایداری بالای این جواب خاص دلالت می‌کنند.

### برخوردها و عدم قطعیت

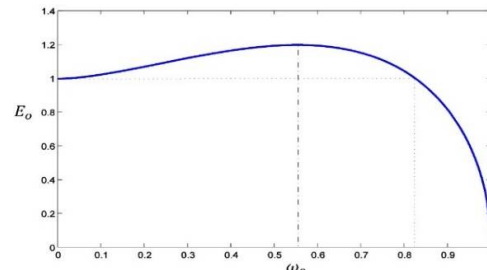
با به‌کارگیری یک روش تفاضلی محدود بر مبنای یک الگوریتم هرمی [31 و 17] به‌سادگی می‌توان برخوردهای بین زوج کینک-پادکینک‌های مختلف و زوج بسته‌موج‌های مختلف را بررسی نمود. نتایج عددی به‌خوبی نشان می‌دهند که خروجی برخوردها به شدت متأثر از اختلاف فاز بین کینک و پادکینک می‌باشد. در برخورد بین یک زوج کینک-پادکینک، چنانچه هم فاز باشند، عملاً رفتار حاصله دقیقاً همانی می‌باشد که از یک سیستم  $\phi^6$  حقیقی انتظار داریم (شکل 4).



شکل 4. برخورد یک زوج کینک-پادکینک با سرعت  $v = 0.5c$  و اختلاف فاز صفر ( $\theta_2 - \theta_1 = 0$ ).

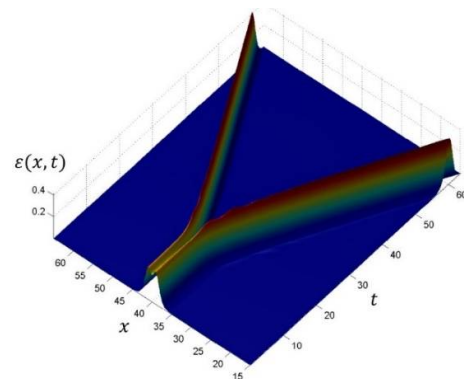
در صورتی که اختلاف فاز بین آنها وجود داشته باشد همیشه شاهد ساطع شدن دو بسته تابشی می‌باشیم (شکل 5). برخلاف سیستم سینوسی گوردن مختلط که اختلاف فاز  $\pi$  بین یک زوج کینک-پادکینک برخورد کننده به نابودی مطلق آنها و تولید دو بسته‌موج تابشی

به‌صورت عددی با جایگذاری نتیجه معادله 36 در معادله 37، به‌سادگی می‌توان نمودار تغییرات انرژی سکون  $E_0$  را برحسب  $\omega_0$  برای جواب‌های بسته‌موجی مختلف پیدا نمود (شکل 2).



شکل 2. نمودار انرژی سکون جواب‌های مفرد مختلف برحسب فرکانس سکون  $\omega_0$  معرف آنها.

برای  $\omega_0 < 0.83$  عملاً انرژی جواب بسته‌موجی بیشتر از انرژی یک زوج کینک-پادکینک می‌باشد ( $\omega_0 = 0$ ). بنابراین به‌لحاظ انرژی این امکان وجود دارد که برای چنین حالت‌هایی ( $\omega_0 < 0.83$ ) با اعمال اختلالات کوچک شاهد شکافته شدن یک جواب بسته‌موجی به یک زوج کینک-پادکینک مجزا باشیم (شکل 3).



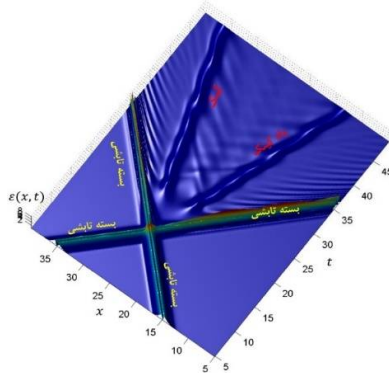
شکل 3. یک بسته‌موج با فرکانس سکون  $\omega_0 = 0.65$  تحت تأثیر یک اختلال بسیار کوچک به یک زوج کینک-پادکینک تبدیل می‌شود.

با این وجود، نتایج عددی روند دیگری را برای پایداری جواب‌ها نشان می‌دهند. نتایج عددی نشان می‌دهند که به‌ازای  $\omega_0 > 0.55$ ، با افزایش  $\omega_0$  روند

خواهد داشت. به عنوان نمونه برای دو بسته تابشی مشابه غیرتوپولوژیک پر انرژی که فرم تابعیت آنها توسط رابطه زیر معرفی می شود:

$$\phi_r = 0.99 \operatorname{sech}^2(x \pm t) \quad 38$$

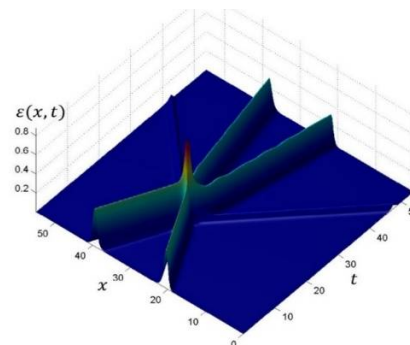
چنانچه با هم برخورد نمایند، نتایج عددی به خوبی نشان می دهند که یک زوج کینک-پادکینک به همراه یک زوج بسته تابشی جدید بعد از برخورد تولید می شود (شکل 7).



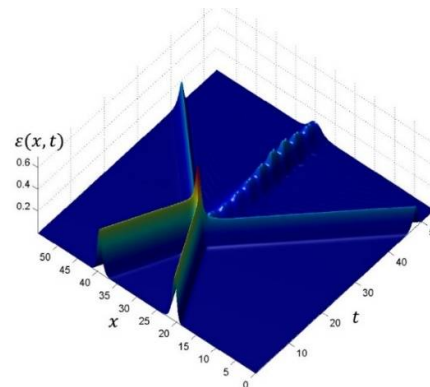
شکل 7. برخورد یک زوج بسته تابشی پر انرژی که از حاصل آن یک زوج کینک-پادکینک تولید می شود.

عدم قطعیت در برخورد بسته موجها با همدیگر، به شکل مؤثرتری خود را به نمایش می گذارد. در برخورد بین بسته موجها، در ظاهر انتخاب مقادیر متفاوت فاز اولیه  $\theta_0$  برای هر کدام از آنها ممکن است کاملاً بی اهمیت باشد، کما اینکه در خصوصیات ذره ای بسته موج، همانند انرژی سکون، تکانه و بار الکتریکی هیچ گونه نقشی ندارد ولی در برخوردها شاهد تأثیر گذاری بسیار مهم این فاز اولیه در خروجی برخوردها می باشیم. به عبارت دیگر شاهد یک عدم قطعیت اساسی در خروجی برخوردهای بسته موجی می باشیم که ریشه در فازهای اولیه بسته موجهای برخورد کننده دارد (شکل های 8 و 9). به لحاظ کوآنتوم مکانیکی این نتایج بسیار جالب می باشند زیرا در اینجا نقش فاز اولیه

ختم می شد، در اینجا هیچ گاه چنین وضعیتی را مشاهده نمی کنیم و در بدترین وضعیت از باقی مانده برخورد یک زوج کینک-پادکینک با اختلاف  $\frac{\pi}{2}$ ، فارغ از دو بسته موج تابشی، یک موجود نوسان کننده واسطه (Breather) ایجاد می شود (شکل 6). بنابراین فازها در اینجا همانند یک سری پارامترهای نهان نقش مهمی در ایجاد عدم قطعیت در خروجی برخوردها خواهند داشت.



شکل 5. برخورد یک زوج کینک-پادکینک با سرعت  $v = 0.5c$  و اختلاف فاز  $\theta_2 - \theta_1 = \frac{7\pi}{36}$  همان طور که در شکل مشخص است به همراه ظهور مجدد زوج کینک-پادکینک، دو بسته تابشی با سرعت نور محیط برخورد را ترک می کنند.



شکل 6. برخورد یک زوج کینک-پادکینک با سرعت  $v = 0.5c$  و اختلاف فاز صفر  $(\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2})$ ، همان طور که در شکل مشخص است، دو بسته تابشی به همراه یک جواب Breather از برخورد حاصل خواهد شد.

به صورت عکس در برخورد یک زوج بسته تابشی پر انرژی، امکان خلق یک زوج کینک-پادکینک وجود

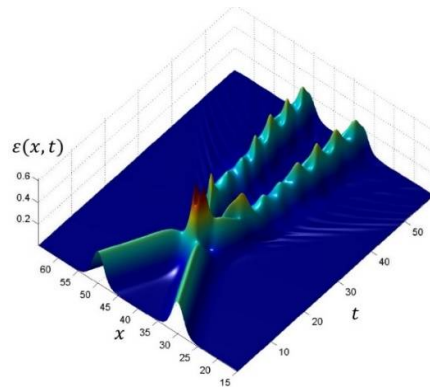


بسته‌موج‌ها جرم سکون صفر دارند و با سرعت نور حرکت می‌کنند. همه این جواب‌ها تمامی روابط قابل انتظار جرم-انرژی نسبیتی را ارضاء می‌کنند. برای بسته‌موج‌ها روابط موجی ذره‌ای مشابه‌ای همانند آنچه که در کوانتوم مکانیک معمولی وجود دارد قابل حصول می‌باشد ( $E = \hbar\omega$  و  $p = \hbar k$ ). هر کدام از جواب‌های بسته‌موجی را می‌توان با یک فرکانس سکون مشخصه  $\omega_0$  برچسب گذاری نمود. در برخورد بین کینک‌ها و پادکینک‌های مختلط این سیستم، بسته به اینکه اختلاف فاز بین آنها چقدر باشد، نتایج حاصل از برخورد کاملاً متفاوت ظاهر می‌شود. در صورتی که اختلاف فاز بین زوج کینک-پادکینک غیر صفر باشد همیشه شاهد تولید بسته‌های تابشی هستیم. به صورت عددی می‌توان نشان داد که در فرآیندی عکس، چنانچه دو بسته تابشی پراثری با همدیگر برخورد نمایند از حاصل برخورد آنها امکان خلق یک زوج کینک-پادکینک وجود دارد. همچنین در رابطه با خروجی برخوردهای بین جواب‌های بسته‌موجی سیستم  $\phi^6$  مختلط شاهد نتایج متفاوتی می‌باشیم که ریشه در یک فاز اولیه دلخواه دارد. این فاز اولیه هیچ گونه نقشی در خصوصیات ذره‌ای جواب منفرد ندارد ولی در خروجی برخوردها به‌طور اساسی تأثیر گذار می‌باشد و به‌عنوان یک متغیر نهان می‌تواند توجیه‌کننده عدم قطعیت در برخوردها باشد.

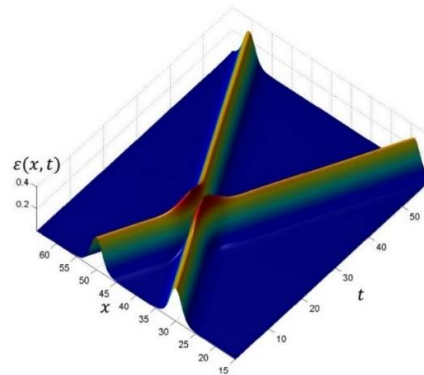
### مرجع‌ها

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Elsevier, Amsterdam, (1982).
- [2] A. Das, *Integrable Models*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [3] G.L. Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory*, Wiley, New York, (1980).
- [4] P.G. Drazin, R.S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press,

همانند یک متغیر نهان می‌باشد که ریشه عدم قطعیت‌ها را برای ما روشن می‌سازد.



شکل 8: برخورد یک زوج بسته‌موج منفرد با فرکانس سکون  $\omega_0 = 0.85$  و اختلاف فاز صفر ( $\theta_2 - \theta_1 = 0$ ) که با تندی  $v = 0.5c$  به‌همدیگر برخورد می‌کنند.



شکل 9: برخورد یک زوج بسته‌موج منفرد با فرکانس سکون  $\omega_0 = 0.85$  و اختلاف فاز  $\theta_2 - \theta_1 = \pi$  که با تندی  $v = 0.5c$  به‌همدیگر برخورد می‌کنند. در اینجا رفتار بسته‌موج‌ها در برخورد همانند سالتون‌ها می‌باشد.

### بحث و نتیجه‌گیری

برای سیستم غیرخطی  $\phi^6$  مختلط به‌عنوان نمونه‌ای از سیستم‌های کلاین گوردون غیرخطی مختلط در فضا زمان  $1 + 1$  بعدی در حالت کلی سه نوع جواب منفرد (شبه‌سالتونی) وجود دارد که به ترتیب آنها را کینک (پادکینک)های مختلط، بسته‌های تابشی و بسته‌موج‌ها می‌نامیم. بسته‌های تابشی برخلاف کینک‌های مختلط و

- Internal modes of relativistic solitons, *International Journal of Theoretical Physics*, **45** (2006) 57.
- [17] M. Mohammadi, N. Riazi, A. Azizi, Radiative Properties of Kinks in the  $\sin^4(\phi)$  System, *Progress of Theoretical Physics* **128** (2012) 615.
- [18] M. Mohammadi and N. Riazi, Approaching integrality in bi- dimensional nonlinear field equations, *Progress of Theoretical Physics* **126** (2011) 237.
- [19] P. Dorey, et.al, Kink-antikink collisions in the  $\phi^6$  model, *Physical Review Letter*, **107** (2011) 091602.
- [20] N. Riazi, S. Hoseinmardi, Particle behavior of the  $\phi^6$  model in an external potential compared and contrasted with classical behavior, *Iranian Journal of Physics Research*, **10**, (2011) 370.
- [21] T.H.R. Skyrme, A non-linear field theory, *Proceeding of the Royal Society A*, **260**, (1961) 127.
- [22] Wong, what exactly is a Skyrmion?, S.M.H. hep-ph/0202250v2 (2002).
- [23] G.'t Hooft, Magnetic monopoles in a unified gauge theories, *Nuclear Physics B*, **79** (1974) 276.
- [24] A.M. Polyakov, Particle spectrum in quantum field theory, *JETP Letter*, **20** (1974) 194.
- [25] R. Friedberg, T.D. Lee, A. Sirlin, Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions, *Physical Review D*, **13** (1976) 2739.
- [26] J. Werle, Stability of particle-like solutions of Nonlinear {Klein-Gordon} and Dirac equations, *Acta Physica. Polonia. B*, **12** (1981) 601.
- [27] N. Riazi, Wave particle duality in non-linear Klein-Gordon equation, *International Journal of Theoretical Physics*, **28** (1989) 1237.
- [28] M.V. Berry, Regular and irregular motion, *AIP Conferences. Proceedings* **46** (1978) 16.
- [29] N. Riazi, A. Azizi, S.M. Zebarjad, Soliton decay in a coupled system of scalar fields, *Physical Review D*, **66** (2002) 065003.
- [30] L.V. Yakushevich, *Nonlinear Physics of DNA*, Wiley-VCH (2004).
- [31] L.V. Yakushevich, A.V. Savin, L.I. Manevitch, Nonlinear dynamics of topological solitons in DNA, *Physical Review E*, **66** (2002) 016614.
- [32] S. Cuenda A. Sanchez, N.R. Quintero, Does the dynamics of sine-Gordon solitons predict active regions of DNA?, *Physica D*, **223** (2006) 214.
- [33] J. Timonen, M. Stirland, D.J. Pilling, Y. Cheng, R.K. Bullough, Statistical mechanics of the sine-Gordon equation, *Physical Review Letter*, **56** (1986) 2233.
- [34] D.K. Campbell, M. Peyrard, Kink-antikink interactions in double sine-Gordon equation, *Physica D*, **19** (1986) 165.
- [35] D.K. Campbell, M. Peyrard, Solitary wave collisions revisited, *Physica D*, **18** (1986) 47.
- [36] D.K. Campbell, J.S. Schonfeld, C.A. Wingate, Nonlinear waves in integrable and non-integrable systems, *Physica D*, **9** (1983) 1.
- [37] M. Peyrard, D.K. Campbell, Kink antikink interactions in a modified sine-Gordon model, *Physica D*, **9** (1983) 33.
- [38] R. H. Goodman and R. Haberman, *Siam Journal on Applied Dynamical Systems*, **4**, (2005) 1195.
- [39] A.R. Gharaati, N. Riazi, F. Mohebbi,

*Journal of Theoretical Physics*, **50** (2011) 3451.

[28] M. Mohammadi, N. Riazi Bi-dimensional soliton-like solutions of the non-linear complex sine-Gordon systems, *Progress of Theoretical and experimental Physics*, **2014** (2014) 023A03.

[29] T.D. Lee and Y. Pang, Non-topological solitons, *Physics Reports*, **221** (1992) 251-350.

[30] م. محمدی، م. قناعتیان، ف. سهولی، عوامل مؤثر در عدم قطعیت برخوردهای جواب‌های کینک در سیستم  $\phi^4$ ، فصلنامه اپتوالکترونیک **1** 4 (1396) 25-36.

[30] M. Mohammadi, M. Ghanaatian, F. Soholi, The Affective Factors on the Uncertainty of the Collisions of the Kink Solutions in  $\varphi^4$  System, *Quarterly Journal of Optoelectronic* **1** 4 (2017) 25-36.