

## درهم‌تندگی دوبخشی و چندبخشی در گراف‌های درهم‌تندیده

احمد آخوند\*، سعید حدادی، محمد علی چمن مطلق

گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، ص. پ. 19395-3697، تهران، ایران

دریافت: 1396/11/24 ویرایش نهائی: 1397/05/30 پذیرش: 1397/07/09

### چکیده

در این پژوهش ابتدا رابطه‌ای پارامتری برای سنجش مقدار درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت برای گراف‌هایی با بیش از چهار کیوبیت به دست می‌آوریم. سپس مقدار درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت را در گراف‌های پنج کیوبیتی محاسبه می‌کنیم. در ادامه ثابت می‌کنیم که تعداد 1024 گراف سیستم پنج کیوبیتی بر اساس بیشینه درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت به 31 دسته و بر اساس تعداد یال‌های گراف و درجات رئوس به 40 دسته تقسیم می‌شوند. علاوه بر این بر اساس نتایج عددی به دست آمده از سنجش‌های درهم‌تندگی چندبخشی به نام‌های سنجه تلافی تعمیم‌یافته، سنجه گلوبال و سنجه مایر-والاج نشان می‌دهیم که تمامی گراف‌های سیستم مذکور به ترتیب در 24، 32 و 23 دسته قرار می‌گیرند. همچنین نتایج حاصل از سه سنجه مذکور نشان می‌دهند که بیشترین مقدار درهم‌تندگی چندبخشی متعلق به گراف حلقه‌ای و کم‌ترین مقدار آن مربوط به گراف تک یال است، در حالی که بیش‌ترین مقدار درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت در گراف تک یال و کمترین مقدار آن مربوط به گراف کامل است.

**کلیدواژگان:** درهم‌تندگی، گراف درهم‌تندیده، سنجه تلافی تعمیم‌یافته، سنجه گلوبال، سنجه مایر-والاج

### مقدمه

گراف‌های درهم‌تندیده مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند. در بخش دوم این مقاله، گراف‌های درهم‌تندیده معرفی می‌شوند. در بخش سوم با استفاده از مفهوم گراف‌های غیر یک‌ریخت، تعداد 1024 گراف سیستم پنج کیوبیتی را در 34 دسته طبقه‌بندی می‌کنیم. در بخش چهارم سنجه درهم‌تندگی دوبخشی معرفی شده و رابطه‌ای پارامتری برای سنجش مقدار درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت به دست می‌آوریم. در بخش پنجم ابتدا سنجش‌های درهم‌تندگی چندبخشی معرفی شده و سپس مقدار درهم‌تندگی گراف‌های درهم‌تندیده سیستم پنج کیوبیتی را توسط سنجش‌های دوبخشی و چندبخشی محاسبه می‌کنیم. در بخش آخر نیز نتایج را ارائه می‌دهیم.

درهم‌تندگی مفهومی کلیدی در نظریه اطلاعات کوآنتومی است و همچنین نقش مهمی را در محاسبات کوآنتومی و پردازش اطلاعات کوآنتومی بر عهده دارد [1و2]. حالت‌های درهم‌تندیده در طراحی الگوریتم‌ها و پروتکل‌های کوآنتومی نقش اساسی دارند [1و2]. برای بررسی و مطالعه برخی از حالت‌های درهم‌تندیده دوبخشی و چندبخشی، گراف یکی از بهترین ابزارهای ریاضی است. در گراف‌های درهم‌تندیده، رئوس نقش سیستم‌های کوآنتومی دو ترازه (کیوبیت) را ایفا می‌کنند و یال‌های بین رئوس معرف درهم‌تندگی بین این کیوبیت‌ها هستند [3-5]. در سال‌های اخیر، موضوع گراف‌های درهم‌تندیده توسط پژوهشگران مورد توجه قرار گرفته است [6-8]. به همین منظور، در این مقاله

\* نویسنده مسئول: aakhound@pnu.ac.ir

## گراف‌های درهم‌تنبیده

برای بررسی و مطالعه برخی از حالت‌های درهم‌تنبیده دوبخشی و چندبخشی، گراف یکی از بهترین ابزارهای ریاضی است. گراف  $G=(V,E)$  را می‌توان متشکل از یک جفت مجموعه محدود  $V \subseteq \mathbb{N}$  و  $E \subseteq V \times V$  دانست. اعضای مجموعه  $V$  یعنی  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  رئوس و مجموعه  $E$  یعنی  $E = \{e_1, \dots, e_l\}$  یال‌ها یا خطوط بین رئوس را نشان می‌دهند [9].

**تعریف 1:** در هر گراف  $N$  رأسی، تعداد  $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$  امکان مختلف برای انتخاب مجموعه یال‌های  $E$  وجود دارد. بنابراین تعداد  $2^{\binom{N}{2}}$  گراف متمایز امکان‌پذیر است [9].

**تعریف 2:** اگر تابعی یک به یک و پوشا به صورت  $f: V \rightarrow V_1$  بین مجموعه رئوس دو گراف  $G=(V,E)$  و  $G_1=(V_1,E_1)$  وجود داشته باشد به طوری که  $\{a,b\} \in E$ ، اگر و تنها اگر  $\{f(a), f(b)\} \in E_1$  باشد، در این صورت دو گراف را یکریخت گویند [9].

برای انجام محاسبات درهم‌تنبیدگی حالت‌های گراف سیستم‌های کوآنتومی  $N$ -کیوبیتی، هر کیوبیت (سیستم دو ترازه) را در یکی از رأس‌های گراف قرار می‌دهند. در برخی از مقالات هر یال گراف را به‌عنوان برهم‌کنش آیزینگ بین دو کیوبیت در نظر گرفته و حالت‌های کوآنتومی گراف به‌دست می‌آیند [10-14]. در این مقاله هر یال گراف معرف درهم‌تنبیدگی بین دو کیوبیت است و بردار حالت زیر را برای سیستم خالص  $N$ -کیوبیتی در نظر می‌گیریم [3]:

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\dots 0\rangle + \beta |1\dots 1\rangle + \sum_{\{i,j\} \in S} \frac{\gamma}{\sqrt{k}} |1\rangle_i |1\rangle_j |0\dots 0\rangle_{\bar{i}\bar{j}} \quad 1$$

که در آن  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  ویژه‌بردارهای ماتریس پائولی  $\sigma_z$  هستند. در جایگاه کیوبیت‌های  $i$  و  $j$  متصل (درهم‌تنبیده)، حالت  $|1\rangle$  و در جایگاه کیوبیت‌های

باقیمانده  $(\bar{i}\bar{j})$  حالت  $|0\rangle$  قرار می‌گیرد. همچنین  $k$  بیانگر تعداد یال‌های گراف و  $S$  معرف مجموعه عضوهای  $k$  است ( $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ ). ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  شرط بهنجارش  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$  را ارضا می‌کنند.

## گراف‌های درهم‌تنبیده پنج کیوبیتی

بر اساس تعریف 1، در هر گراف پنج رأسی تعداد  $\binom{5}{2} = 10$  امکان مختلف برای انتخاب مجموعه یال‌ها وجود دارد. بنابراین تعداد 1024 گراف متمایز امکان پذیر است. طبق تعریف 2، تعدادی از این گراف‌ها یکریخت هستند و درهم‌تنبیدگی یکسانی دارند، بنابراین نیازی به محاسبه درهم‌تنبیدگی تمامی حالت‌ها نیست. در گراف‌های پنج رأسی تعداد 34 گراف غیر یکریخت وجود دارد که آنها را به‌دست آورده و نمایش گرافی آنها را در شکل 1 رسم نموده‌ایم. به‌عنوان مثال، گراف شماره 1 در شکل 1 تعداد 9 گراف یکریخت دارد [14]. بنابراین با محاسبه درهم‌تنبیدگی گراف‌های غیر یکریخت هر سیستم، می‌توان این مقدار را برای تمامی گراف‌های سیستم مذکور به‌دست آورد [14].

## سنجه تلافی

برای کمی کردن درهم‌تنبیدگی دوبخشی از سنجه تلافی استفاده می‌کنیم. این سنجه ابتدا توسط ووترز برای سامانه‌های دو کیوبیتی خالص یا آمیخته با ماتریس چگالی  $\rho$  به‌صورت زیر معرفی شد [15 و 16]:

$$C(\rho) = \max \{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad 2$$

که در آن  $\lambda_i$ ها  $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4)$  ویژه‌مقدارهای ماتریس  $R = \rho \tilde{\rho}$  هستند. روش محاسبه  $R$  به‌این‌ترتیب است که  $\tilde{\rho}$  به‌صورت  $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$  در آن  $\tilde{\rho}$ ، اسپین-وارون حالت  $\rho$  است. همچنین  $\rho^*$  مزدوج مختلط ماتریس چگالی  $\rho$  در پایه‌های  $|00\rangle_1$

ریشه‌های مربعی ویژه مقادیر ماتریس  $R_{ij}$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$4$$

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\left( |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \frac{k - n_i - n_j + 1}{k} \right) \left( |\beta|^2 + \frac{|\gamma|^2}{k} \right) + \frac{|\alpha||\gamma|}{\sqrt{k}}},$$

$$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\left( |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \frac{k - n_i - n_j + 1}{k} \right) \left( |\beta|^2 + \frac{|\gamma|^2}{k} \right) - \frac{|\alpha||\gamma|}{\sqrt{k}}},$$

$$\sqrt{\lambda_3} = \frac{|\gamma|^2 \sqrt{(n_i - 1)(n_j - 1)}}{k} + \frac{|\gamma|^2 n_{ij}}{k},$$

$$\sqrt{\lambda_4} = \frac{|\gamma|^2 \sqrt{(n_i - 1)(n_j - 1)}}{k} - \frac{|\gamma|^2 n_{ij}}{k}.$$

اینک با استفاده از رابطه 2 و ساده سازی روابط، رابطه سنجه تلافی را برای گراف‌هایی با  $N > 4$  و  $\{i, j\} \in S$  به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$5 \quad C(\rho_{ij}) = \max \left\{ 0, \frac{2|\alpha||\gamma|}{\sqrt{k}} - \frac{2|\gamma|^2 \sqrt{(n_i - 1)(n_j - 1)}}{k} \right\}$$

در سال 2016، اسدی و جعفرپور در مقاله‌ای [8] رابطه سنجه تلافی را برای گراف‌هایی با  $N = 4$  و  $\{i, j\} \in S$  به دست آوردند. در این مقاله برای اولین بار رابطه 5 برای گراف‌هایی با  $N > 4$  و  $\{i, j\} \in S$  به دست آمد.

### سنجه‌های درهم‌تنیدگی چندبخشی

با وجود اینکه تلاش برای یافتن معیارها و سنجه‌های جدید همچنان ادامه دارد، اما نمی‌توان گفت کدام معیار کارآیی و جامعیت بیشتری دارد، زیرا هر کدام از آنها در بررسی رده خاصی از حالت‌ها مفید هستند. در ادامه این مقاله سه سنجه درهم‌تنیدگی چندبخشی معرفی می‌شوند.

#### تلافی تعمیم یافته

بر اساس تعریف بخش قبل، سنجه تلافی نخستین بار توسط ووترز برای سامانه‌های کیوبیتی خالص و آمیخته دوبخشی ارائه شد. سپس برای حالت‌های خالص

$|01\rangle_2, |10\rangle_3$  و  $|11\rangle_4$  بوده و  $\sigma_y$  مؤلفه‌های  $y$  ماتریس پائولی است. مقدار  $C(\rho)$  برای حالت‌هایی با بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی برابر با یک بوده و برای حالت‌های جدایی‌پذیر برابر با صفر است [16].

با استفاده از سنجه رابطه 2، درهم‌تنیدگی بین هر جفت کیوبیت  $i$  و  $j$  که بین آنها یال وجود دارد، محاسبه می‌شود. برای این منظور از بردار حالت  $|\Psi\rangle$  معرفی شده در رابطه 1 استفاده می‌کنیم. ماتریس چگالی کاهش یافته بردار  $|\Psi\rangle$  برای هر جفت کیوبیت  $i$  و  $j$  متصل یا درهم‌تنیده  $\{(i, j) \in S\}$  با رابطه زیر داده می‌شود [3]:

$$3 \quad \rho_{ij} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \frac{k - n_i - n_j + 1}{k} & 0 & 0 & \frac{|\alpha||\gamma|}{\sqrt{k}} \\ 0 & |\gamma|^2 \frac{n_i - 1}{k} & |\gamma|^2 \frac{n_{ij}}{k} & 0 \\ 0 & |\gamma|^2 \frac{n_{ij}}{k} & |\gamma|^2 \frac{n_j - 1}{k} & 0 \\ \frac{|\alpha||\gamma|}{\sqrt{k}} & 0 & 0 & |\beta|^2 + \frac{|\gamma|^2}{k} \end{pmatrix}$$

که در آن  $n_{ij}$  بیانگر درجه رأس  $i(j)$  و  $i(j)$  معرف تعداد رئوسی است که به صورت مستقیم و مشترک با رأس‌های  $i$  و  $j$  در ارتباط هستند. اکنون برای سنجه مقدار درهم‌تنیدگی بین هر جفت کیوبیت سیستم  $N$ -کیوبیتی ( $N > 4$ ) یک رابطه پارامتری به دست می‌آوریم.

ابتدا ماتریس  $R_{ij} = \rho_{ij} \tilde{\rho}_{ij}$  را تعیین می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن شرایط زیر [3 و 8]:

$$1 \leq n_i \leq k,$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \frac{k}{2},$$

$$\sqrt{(n_i - 1)(n_j - 1)} \geq n_{ij},$$

$$k - n_i - n_j + 1 \geq 0$$

سیستم‌های  $N$ -ذره‌ای نیز سنجه تلافی تعمیم‌یافته به‌صورت زیر معرفی شد [17-19]:

$$C_N(|\psi\rangle) = 2^{1-\frac{N}{2}} \sqrt{2^N - 2 - \sum_{\alpha} \text{Tr}[\rho_{\alpha}^2]} \quad (6)$$

که در آن  $\rho_{\alpha}$  ماتریس چگالی کاهش‌یافته است که با گرفتن ردّ جزئی از ماتریس چگالی کل  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  نسبت به هر یک از زیرسیستم‌ها تعیین می‌شود و  $\sum_{\alpha}$  نشان دهنده مجموع تمام زیرسیستم‌ها است.

### گلوبال

سنجه گلوبال یک سنجه درهم‌تنبیدگی چندبخشی است که برای حالت‌های خالص سیستم  $N$ -کیوبیتی به‌صورت زیر تعریف شده است [20 و 21]:

$$\mathcal{R}(|\psi\rangle) = \left( \prod_{|S|=m} \eta_S(|\psi\rangle) \right)^{1/(2^{N-1}-1)}, \quad (7)$$

$$m = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor,$$

$$\eta_S(|\psi\rangle) = \frac{2^{|S|}}{2^{|S|-1}} (1 - \text{Tr}[\rho_S^2]).$$

در رابطه فوق  $\rho_S$ ها ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته هستند که با گرفتن ردّ جزئی از ماتریس چگالی کل  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  نسبت به تعداد  $2^{N-1}-1$  زیرسیستم به‌دست می‌آیند و  $\prod$  نشان دهنده ضرب این زیرسیستم‌ها است. اگر و فقط اگر حداقل یکی از  $\eta_S(|\psi\rangle)$ ها برابر با صفر شود، مقدار درهم‌تنبیدگی گلوبال  $\mathcal{R}(|\psi\rangle)$  برابر با صفر خواهد شد. به‌عبارت دیگر در صورتی یک حالت چندبخشی بر اساس سنجه  $\mathcal{R}(|\psi\rangle)$  درهم‌تنبیده است که تمامی بخش‌های آن با یکدیگر درهم‌تنبیده باشند.

### مایر-والاچ تعمیم‌یافته

سنجه مایر-والاچ تعمیم‌یافته (سنجه اسکات) یک سنجه درهم‌تنبیدگی چندبخشی است که برای

حالت‌های خالص سیستم  $N$ -کیوبیتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [21 و 22]:

$$Q_m(|\psi\rangle_a) = \frac{d^m}{d^m - 1} \left( 1 - \frac{m!(N-m)!}{N!} \sum_{|S|=m} \text{Tr}[\rho_S^2] \right), \quad (8)$$

$$m = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$$

که در آن  $Q_m$  بیانگر میانگین درهم‌تنبیدگی بین  $m$  کیودیت با  $N-m$  کیودیت باقی مانده است و  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  کران پایین جزء صحیح  $\frac{N}{2}$  است. همچنین ماتریس چگالی کاهش‌یافته برای  $m$  کیودیت است که با گرفتن ردّ جزئی از  $N-m$  کیودیت باقی مانده روی ماتریس چگالی کل ( $\rho$ ) به‌دست می‌آید و  $\sum$  نشان دهنده مجموع این زیرسیستم‌ها است [22]. از آنجایی که حالت‌های به‌دست آمده از رابطه 1 کیوبیتی یا دو ترازه ( $d=2$ ) هستند، رابطه 5 به‌رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$Q_m(|\psi\rangle) = \binom{N}{m}^{-1} \sum_{|S|=m} \frac{2^m}{2^m - 1} (1 - \text{Tr}[\rho_S^2]). \quad (9)$$

برای محاسبه درهم‌تنبیدگی چندبخشی حالت‌های خالص پنج کیوبیتی متناظر با گراف‌های شکل 1 توسط سه سنجه مذکور، ابتدا ماتریس چگالی هر حالت را توسط رابطه  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  به‌دست می‌آوریم. سپس ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته زیرسیستم اول را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

10

$$\rho_1 = \text{Tr}_{2345}(\rho), \quad \rho_2 = \text{Tr}_{1345}(\rho), \quad \rho_3 = \text{Tr}_{1245}(\rho),$$

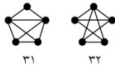


$$\rho_4 = \text{Tr}_{1235}(\rho), \quad \rho_5 = \text{Tr}_{1234}(\rho).$$

با توجه به اینکه برای حالت‌های خالص سیستم پنج کیوبیتی، رابطه زیر برقرار است [14]:

$$\text{Tr}[\rho_i^2] = \text{Tr}[\rho_{jklp}^2], \quad \text{Tr}[\rho_{ij}^2] = \text{Tr}[\rho_{klp}^2], \quad (11)$$

$$(i \neq j \neq k \neq l \neq p) \in \{1, \dots, 5\}.$$

ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته باقیمانده به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$k=8$	
$k=9$	
$k=10$	

شکل 1. نمایش گرافی غیر یک‌ریخت گراف‌های درهم‌تنبه پنج کیوبیتی.

### محاسبه مقدار درهم‌تندگی

برای محاسبه مقدار درهم‌تندگی دوبخشی و چندبخشی گراف‌های شکل 1، ابتدا تعداد 34 حالت کوآنتومی نظیر هر گراف را توسط رابطه 1 به دست آوردیم. به‌عنوان مثال حالت‌های متناظر با گراف‌های شماره 2، 15 و 34 عبارتند از:

$$|G_2\rangle_\psi = \alpha |00000\rangle + \beta |11111\rangle + \gamma |11000\rangle,$$

$$|G_{15}\rangle_\psi = \alpha |00000\rangle + \beta |11111\rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{5}} (|00011\rangle + |00110\rangle + |01100\rangle + |10001\rangle + |11000\rangle),$$

$$|G_{34}\rangle_\psi = \alpha |00000\rangle + \beta |11111\rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{10}} (|00011\rangle + |00101\rangle + |00110\rangle + |01001\rangle + |01010\rangle + |01100\rangle + |10001\rangle + |10010\rangle + |10100\rangle + |11000\rangle).$$

سپس با استفاده از سنج‌های بخش قبل (روابط 16-13 و 5) و محاسبات جبری طولانی، مقدار درهم‌تندگی گراف‌های شکل 1 را محاسبه نموده و نتایج عددی به دست آمده را در جدول‌های 1 الی 4 درج نمودیم. برای محاسبه مقدار بیشینه درهم‌تندگی دوبخشی و چندبخشی گراف‌های سیستم پنج کیوبیتی، ابتدا روابط پارامتری هر یک از سنج‌ها را به دست آوردیم. سپس با محاسبه ماتریس چگالی کل سیستم و تعیین ماتریس‌های چگالی کاهش یافته، رابطه‌ای برحسب ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  برای هر یک از حالت‌های کوآنتومی متناظر با گراف‌های شکل 1 به دست آمد. در خاتمه با توجه به شرط بهنجارش  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$

$$\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{15}, \rho_{23},$$

12

$$\rho_{24}, \rho_{25}, \rho_{34}, \rho_{35}, \rho_{45},$$

بنابراین رابطه سنج تلافی تعمیم یافته را برای سیستم

پنج کیوبیتی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

13

$$C_5 = \sqrt{\frac{15 - (\text{Tr}\rho_1^2 + \dots + \text{Tr}\rho_5^2) + (\text{Tr}\rho_{12}^2 + \dots + \text{Tr}\rho_{45}^2)}{8}}$$

رابطه سنج درهم‌تندگی گلوبال نیز برای سیستم پنج

کیوبیتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{R}(|\psi\rangle) = (\eta_1 \times \eta_2 \times \dots \times \eta_{45})^{\frac{1}{15}},$$

14

که در آن:

$$\eta_i = 2(1 - \text{Tr}[\rho_i^2]), \quad \eta_{ij} = \frac{4}{3}(1 - \text{Tr}[\rho_{ij}^2]),$$

$$(i < j) \in \{1, \dots, 5\}.$$

همچنین سنج مایر-والاج تعمیم یافته را برای سیستم

پنج کیوبیتی با توجه به رابطه  $m = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$



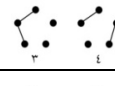
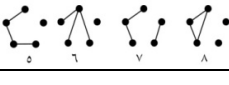

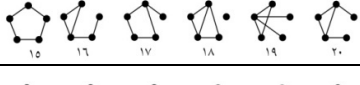
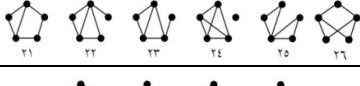
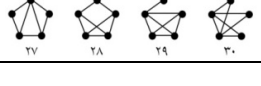
به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$Q_1(|\psi\rangle) = \frac{2}{5} [(1 - \text{Tr}\rho_1^2) + \dots + (1 - \text{Tr}\rho_5^2)],$$

15

$$Q_2(|\psi\rangle) = \frac{2}{15} [(1 - \text{Tr}\rho_{12}^2) + \dots + (1 - \text{Tr}\rho_{45}^2)],$$

16

$k=0$	
$k=1$	
$k=2$	
$k=3$	
$k=4$	
$k=5$	
$k=6$	
$k=7$	

چندبخشی، متعلق به گراف تک یال (گراف شماره 2) است.

با توجه با اینکه مقدار درهم‌تندگی بین هر زوج کیوبیت بدون یال برابر با صفر است، نتایج عددی این مقاله نشان می‌دهند مقدار درهم‌تندگی چندبخشی هر یک از گراف‌های سیستم پنج کیوبیتی ( $1 \leq k \leq 10$ ) مخالف صفر است. بنابراین صفر شدن مقدار درهم‌تندگی بین هر زوج کیوبیت به معنی جداپذیر بودن حالت کلی سیستم نیست.

و بیشینه سازی مقدار هر یک از ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$ ، مقدار بیشینه درهم‌تندگی را با استفاده از سنج‌های مذکور محاسبه نمودیم.

برای گراف‌های شکل 1، روابط تحلیلی به دست آمده از سنج تلافی (رابطه 5) در ستون ششم جدول 1 درج شده‌اند. نتایج ارائه شده در جدول 1 بیانگر آن است که تعداد 1024 گراف درهم‌تندیده ( $1 \leq k \leq 10$ ) بر اساس تعداد یال‌های گراف ( $k$ ) و درجات رئوس  $i$  ( $n_i$ ) و  $j$  ( $n_j$ ) در 40 کلاس طبقه‌بندی می‌شوند ولی بر اساس مقدار بیشینه درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت متصل، همه گراف‌های سیستم مذکور در 31 دسته قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، گراف‌های مذکور فقط دارای 31 مقدار عددی پارامتر تلافی بیشینه بین هر جفت کیوبیت متصل هستند. همچنین بیشترین مقدار درهم‌تندگی ( $C_{ij} = 1$ ) بین جفت کیوبیت‌های گراف تک یال (گراف شماره 2) و کمترین مقدار ( $C_{ij} = 0,1359$ ) بین جفت کیوبیت‌های گراف کامل (گراف شماره 34) به دست می‌آید. در حالت کلی درهم‌تندگی بین هر زوج کیوبیت بدون یال برابر با صفر است، در حالی که درهم‌تندگی حالت کل سیستم ممکن است مخالف صفر باشد. بنابراین رابطه 5 در این مقاله لزوماً درهم‌تندگی بین زوج کیوبیت‌ها را محاسبه می‌کند و صفر شدن مقدار آن به معنی جداپذیر بودن حالت کلی سیستم نیست.

نتایج عددی درج شده در جدول‌های 2 الی 4 نشان می‌دهند که تعداد 1024 گراف سیستم پنج کیوبیتی ( $1 \leq k \leq 10$ ) بر اساس سنج تلافی تعمیم‌یافته در 24 دسته، بر اساس سنج گلوبال در 32 دسته و بر اساس سنج مایر-والاچ تعمیم‌یافته (سنج اسکات) در 23 دسته طبقه‌بندی می‌شوند. همچنین بر اساس هر سه سنج درهم‌تندگی چندبخشی، بیشترین مقدار درهم‌تندگی چندبخشی، متعلق به گراف حلقه‌ای (گراف شماره 15) و کمترین مقدار درهم‌تندگی

جدول 1. طبقه‌بندی گراف‌های درهم‌تنیده پنج کیوبیتی بر اساس تعداد یال‌های گراف و درجات رئوس و مقدار درهم‌تنیدگی بین جفت کیوبیت‌ها. برای محاسبه بیشینه تابع دو متغیره پارامتر تلافی  $(C_{ij})_{\max}$ ، مقدار پارامترهای  $\alpha$  و  $\gamma$  را به دست آورده و در ستون هفتم جدول قرار داده‌ایم.

کلاس	شماره گراف	$n_i$	$n_j$	$k$	$C_{ij}$	مقادیر عددی $\alpha$ و $\gamma$ که $C_{ij}$ را بیشینه می‌کنند	$(C_{ij})_{\max}$
1	2	1	1	1	$2\alpha\gamma$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	1
2	3-4	1	2	2	$2\alpha\gamma/\sqrt{2}$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	0,7071
3	3-4	1	1	2			
4	5-8	1	1	3	$2\alpha\gamma/\sqrt{3}$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	0,5773
5	5-8	1	2	3			
6	5-8	1	3	3			
7	5-8	2	2	3	$(2\alpha\gamma/\sqrt{3}) - (2\gamma^2/3)$	$\alpha = 0,8660, \gamma = 0,5000$	0,3333
8	9-14	1	2	4	$\alpha\gamma$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	0,5000
9	9-14	1	3	4			
10	9-14	1	4	4			
11	9-14	1	1	4			
12	9-14	2	3	4	$\alpha\gamma - (\sqrt{2}\gamma^2/2)$	$\alpha = 0,8881, \gamma = 0,4597$	0,2588
13	9-14	2	2	4	$\alpha\gamma - (\gamma^2/2)$	$\alpha = 0,8506, \gamma = 0,5257$	0,3090
14	15-20	1	3	5	$2\alpha\gamma/\sqrt{5}$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	0,4472
15	15-20	1	4	5			
16	15-20	1	2	5			
17	15-20	3	3	5	$(2\alpha\gamma/\sqrt{5}) - (4\gamma^2/5)$	$\alpha = 0,9129, \gamma = 0,4082$	0,2000
18	15-20	2	2	5	$(2\alpha\gamma/\sqrt{5}) - (2\gamma^2/5)$	$\alpha = 0,8391, \gamma = 0,5439$	0,2899
19	15-20	2	4	5	$(2\alpha\gamma/\sqrt{5}) - (2\sqrt{3}\gamma^2/5)$	$\alpha = 0,8979, \gamma = 0,4402$	0,2193
20	15-20	2	3	5	$(2\alpha\gamma/\sqrt{5}) - (2\sqrt{2}\gamma^2/5)$	$\alpha = 0,8759, \gamma = 0,4824$	0,2463
21	21-26	2	3	6	$(2\alpha\gamma/\sqrt{6}) - (\sqrt{2}\gamma^2/3)$	$\alpha = 0,8660, \gamma = 0,5000$	0,2357
22	21-26	2	2	6	$(2\alpha\gamma/\sqrt{6}) - (\gamma^2/3)$	$\alpha = 0,8300, \gamma = 0,5577$	0,2743
23	21-26	3	3	6	$(2\alpha\gamma/\sqrt{6}) - (2\gamma^2/3)$	$\alpha = 0,9034, \gamma = 0,4287$	0,1937
24	21-26	3	4	6	$(2\alpha\gamma/\sqrt{6}) - (\sqrt{6}\gamma^2/3)$	$\alpha = 0,9239, \gamma = 0,3827$	0,1691
25	21-26	2	4	6	$(2\alpha\gamma/\sqrt{6}) - (\sqrt{3}\gamma^2/3)$	$\alpha = 0,8881, \gamma = 0,4597$	0,2113
26	21-26	1	4	6	$2\alpha\gamma/\sqrt{6}$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	0,4082
27	21-26	1	3	6			
28	27-30	2	4	7	$(2\alpha\gamma/\sqrt{7}) - (2\sqrt{3}\gamma^2/7)$	$\alpha = 0,8797, \gamma = 0,4755$	0,2043
29	27-30	4	4	7	$(2\alpha\gamma/\sqrt{7}) - (6\gamma^2/7)$	$\alpha = 0,9354, \gamma = 0,3535$	0,1428
30	27-30	2	3	7	$(2\alpha\gamma/\sqrt{7}) - (\sqrt{2}\gamma^2/7)$	$\alpha = 0,7931, \gamma = 0,6090$	0,2902
31	27-30	3	3	7	$(2\alpha\gamma/\sqrt{7}) - (4\gamma^2/7)$	$\alpha = 0,8953, \gamma = 0,4455$	0,1881
32	27-30	3	4	7	$(2\alpha\gamma/\sqrt{7}) - (2\sqrt{6}\gamma^2/7)$	$\alpha = 0,9163, \gamma = 0,4004$	0,1651
33	27-30	1	4	7	$2\alpha\gamma/\sqrt{7}$	$\alpha = \gamma = 0,7071$	0,3780
34	31-32	3	3	8	$(2\alpha\gamma/\sqrt{8}) - (\gamma^2/2)$	$\alpha = 0,8881, \gamma = 0,4597$	0,1830
35	31-32	3	4	8	$(2\alpha\gamma/\sqrt{8}) - (\sqrt{6}\gamma^2/2)$	$\alpha = 0,9096, \gamma = 0,4155$	0,1615
36	31-32	2	4	8	$(2\alpha\gamma/\sqrt{8}) - (\sqrt{3}\gamma^2/4)$	$\alpha = 0,8724, \gamma = 0,4887$	0,1981
37	31-32	4	4	8	$(2\alpha\gamma/\sqrt{8}) - (6\gamma^2/8)$	$\alpha = 0,9294, \gamma = 0,3690$	0,1404
38	33	3	4	9	$(2\alpha\gamma/3) - (2\sqrt{6}\gamma^2/9)$	$\alpha = 0,9034, \gamma = 0,4287$	0,1582
39	33	4	4	9	$(2\alpha\gamma/3) - (6\gamma^2/9)$	$\alpha = 0,9238, \gamma = 0,3827$	0,1381
40	34	4	4	10	$(2\alpha\gamma/\sqrt{10}) - (6\gamma^2/10)$	$\alpha = 0,9188, \gamma = 0,3948$	0,1359

جدول 2. مقدارهای عددی درهم‌تندگی به‌دست آمده بر اساس سنجه تلافی تعمیم‌یافته (C).

ردیف	شماره گراف	$(C)_{Max}$	ردیف	شماره گراف	$(C)_{Max}$
1	2	1,4162	13	18	1,4806
2	3	1,4391	14	19	1,4880
3	24,14,4	1,4797	15	20	1,5012
4	5	1,4730	16	21	1,5227
5	8,6	1,4528	17	22	1,4993
6	33,26,17,7	1,5063	18	23	1,5100
7	32,12,9	1,5151	19	25	1,5182
8	10	1,4916	20	27	1,5149
9	11	1,4618	21	28	1,5180
10	13	1,4746	22	30,29	1,5011
11	15	1,5390	23	31	1,5084
12	16	1,5177	24	34	1,5000

جدول 4. مقدارهای عددی درهم‌تندگی بر اساس سنجه مایر-والاج تعمیم‌یافته  $(Q_m)$ . برای تمامی گراف‌های سیستم پنج کیوبیتی  $(1 \leq k \leq 10)$ ،  $(Q_1)_{Max} = 1$  به‌دست آمده است.

ردیف	شماره گراف	$(Q_2)_{Max}$	ردیف	شماره گراف	$(Q_2)_{Max}$
1	2	0,7539	13	18	0,8548
2	3	0,7939	14	19	0,8694
3	24,14,4	0,8498	15	25,21	0,9090
4	6,5	0,8454	16	26,22	0,8812
5	7	0,8876	17	23	0,8943
6	8	0,8168	18	28,27	0,8987
7	12,9	0,9014	19	30,29	0,8794
8	10	0,8724	20	31	0,8860
9	11	0,8317	21	32	0,8934
10	15	0,9310	22	33	0,8792
11	16	0,9068	23	34	0,8675
12	20,17	0,8865			

جدول 3. مقدارهای عددی درهم‌تندگی به‌دست آمده بر اساس سنجه گلوبال  $(\mathcal{R})$ .

ردیف	شماره گراف	$(\mathcal{R})_{Max}$	ردیف	شماره گراف	$(\mathcal{R})_{Max}$
1	2	0,8039	17	18	0,8833
2	3	0,8340	18	19	0,8899
3	4	0,8695	19	20	0,9060
4	5	0,8726	20	21	0,9324
5	6	0,8507	21	22	0,9044
6	7	0,9067	22	23	0,9171
7	8	0,8497	23	25	0,9249
8	9	0,9220	24	26	0,9137
9	10	0,8939	25	27	0,9234
10	11	0,8608	26	28	0,9274
11	12	0,9176	27	29	0,9075
12	13	0,8751	28	30	0,9073
13	24,14	0,8832	29	31	0,9168
14	15	0,9523	30	32	0,9249
15	16	0,9246	31	33	0,9154
16	17	0,9129	32	34	0,9089

### نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار رابطه‌ای برای گراف‌هایی با  $N > 4$  و  $\{i, j\} \in S$  به‌دست آوردیم. سپس به‌کمک این رابطه مقدار درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت را برای سیستم پنج کیوبیتی محاسبه کردیم. برای انجام این کار تعداد 1024 گراف سیستم پنج کیوبیتی را در 34 دسته طبقه‌بندی نمودیم. نتایج مهم این پژوهش به شرح زیر است:

1- محاسبات این مقاله نشان می‌دهند که همه گراف سیستم پنج کیوبیتی بر اساس تعداد یال‌های گراف و درجات رئوس  $i$  و  $j$ ، در 40 کلاس طبقه‌بندی می‌شوند و بر اساس مقدار بیشینه درهم‌تندگی بین هر جفت کیوبیت متصل، تمامی گراف‌های سیستم مذکور در 31 دسته قرار می‌گیرند.

2- تمامی گراف‌های سیستم پنج کیوبیتی  $(1 \leq k \leq 10)$  بر اساس سنجه‌های درهم‌تندگی چندبخشی از قبیل تلافی تعمیم‌یافته، گلوبال و مایر-والاج تعمیم‌یافته به‌ترتیب در 24، 32 و 23 دسته طبقه‌بندی می‌شوند.



*The European Physical Journal D* **61** (2011) 507-512.

[7] M. Gharahi Ghahi and S.J. Akhtarshenas, Entangled graphs: a classification of four-qubit entanglement, *The European Physical Journal D* **70** (2016) 54-59.

[8] L. Assadi and M. Jafarpour, Classification of 4-qubit entangled graph states according to bipartite entanglement, multipartite entanglement and non-local properties, *International Journal of Theoretical Physics* **55** (2016) 4809-4821.

[9] R. Diestel, *Graph theory*, Springer, Heidelberg, (2010).

[10] M. Hein, J. Eisert and H.J. Briegel, Multiparty entanglement in graph states, *Physical Review A* **69** (2004) 062311, pp. 1-20.

[11] M. Hein, W. Dur, J. Eisert, R. Raussendorf, M. Van den Nest and H.J. Briegel, *Entanglement in graph states and its application*, Proc. Int. School Phys. Enrico Fermi. Quantum Computers, Algorithms and Chaos. **162** (2006), pp. 1-115.

[12] H. Ma, F. Li, N. Mao, *et al.*, Network-based arbitrated quantum signature scheme with graph State, *International Journal of Theoretical Physics* **56** (2017) 2551-2561.

[13] L. Jian-Wu, L. Xiao-Shu, S. Jin-Jing, *et al.*, Multiparty quantum blind signature scheme based on graph states, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 2404-2414.

[14] A. Akhound, S. Haddadi and M.A. Chaman Motlagh, Calculation of entanglement in graph states up to five-qubit based on generalized concurrence, arXiv:[1610.02560](https://arxiv.org/abs/1610.02560) (2016), 1-5.

[15] S. Hill and W.K. Wootters, Entanglement of a pair of quantum bits, *Physical Review Letters* **78** (1997) 5022-5025.

[16] W.K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Physical Review Letters* **80** (1998) 2245-2248.

[17] A.R.R. Carvalho *et al.*, Decoherence and multipartite entanglement, *Physical Review Letters* **93** (2004) 230501, 1-4.

3- مقدار درهم‌تنیدگی بین هر جفت کیوبیتی که با تعداد یال‌های کمتری به سایر کیوبیت‌ها متصل باشند، بیشتر است.

4- مشاهده می‌شود که مقدار درهم‌تنیدگی دو بخشی و چندبخشی در گراف‌های درهم‌تنیده به پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  وابسته است. بنابراین می‌توان با تنظیم پارامترهای مذکور، یک گراف درهم‌تنیده با مشخصات درهم‌تنیدگی دو بخشی و چندبخشی مورد نظر در یک کلاس خاص را انتخاب نمود.

5- نتایج به دست آمده بیانگر آن است که بر اساس هر سه سنجه مذکور، بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی متعلق به گراف حلقه‌ای و کمترین مقدار آن متعلق به گراف تک یال است در حالی که بر اساس سنجه درهم‌تنیدگی دو بخشی (سنجه تلافی و وترز)، بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی بین هر جفت کیوبیت متعلق به گراف تک یال بوده و کمترین مقدار آن مربوط به گراف کامل است.

## مرجع‌ها

[1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Quantum entanglement, *Reviews of Modern Physics* **81** (2009) 865-942.

[2] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, (2000).

[3] M. Plesch and V. Bužek, Entangled graph: Bipartite entanglement in multiqubit systems, *Physical Review A* **67** (2003) 012322, pp. 1-6.

[4] W. Dür, Multipartite entanglement that is robust against disposal of particles, *Physical Review A* **63** (2001) 020303(R) pp. 1-4.

[5] C. Sabín and G. García-Alcaine, A classification of entanglement in three-qubit systems, *The European Physical Journal D* **48** (2008) 435-442.

[6] P. Jakubczyk, Y. Kravets, and D. Jakubczyk, Entanglement of one-magnon Schur-Weyl states,

- [18] X.N. Zhu and Sh.M. Fei, Lower bound of concurrence for qubit systems, *Quantum Information Processing* **13** (2014) 815-823.
- [19] X.N. Zhu, M. Li and Sh.M. Fei, A lower bound of concurrence for multipartite quantum systems, *Quantum Information Processing* **17** (2018) 30-39.
- [20] D.A. Meyer and N.R. Wallach, Global entanglement in multiparticle systems, *Journal of Mathematical Physics* **43** (2002) 4273-4278.
- [21] P.J. Love, *et al.*, A characterization of global entanglement, *Quantum Information Processing* **6** (2007) 187-195.
- [22] A.J. Scott, Multipartite entanglement, quantum-error-correcting codes, and entangling power of quantum evolutions, *Physical Review A* **69** (2004) 052330, 1-10.