

## معرفی حدهای بالا و پایین برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی

محبوبه مصلحی، حمیدرضا باغشاهی\*، سید یحیی میرافضلی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

دریافت: 1396/12/28 ویرایش نهایی: 1397/03/12 پذیرش: 1397/03/20

### چکیده

تعیین میزان درهم‌تنیدگی در سامانه‌های کوآنتومی، یکی از موضوعات مهم در نظریه اطلاعات کوآنتومی است. در این زمینه، مقیاس‌های متفاوتی برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی سامانه‌های دوجزئی معرفی شده است. مقیاس‌های درهم‌تنیدگی تلافی و تنیدگی دو نمونه از این مقیاس‌ها هستند، که در حالت کلی محاسبه آنها برای حالت‌های آمیخته دلخواه، به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. از این رو برای در دست داشتن تقریبی از میزان درهم‌تنیدگی، جدای از روش‌های عددی، یکسری حدهای بالا و پایین که به راحتی قابل محاسبه باشند برای آنها معرفی شده است. از طرف دیگر مقیاس‌های تلافی و تنیدگی با مقیاس درهم‌تنیدگی رنی در محدوده‌های مشخصی، دارای ارتباط هستند. در این مقاله با استفاده از حدهای بالا و پایین مقیاس‌های تنیدگی و تلافی و با توجه به رابطه بین این مقیاس‌ها و مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، حدهای بالا و پایینی برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی معرفی می‌شود. سپس در یک سامانه اسپینی، کارایی این حدود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**کلیدواژگان:** مقیاس تلافی، مقیاس تنیدگی، مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی، سامانه اسپینی

### مقدمه

به طوری که  $0 \leq p_i \leq 1$  و  $\sum_i p_i = 1$  باشد، حالت جداپذیر و در غیر این صورت، درهم‌تنیده خواهد بود [1]. اینک این سوال را می‌توان مطرح کرد که مقدار درهم‌تنیدگی یک حالت درهم‌تنیده را به چه صورت می‌توان تعیین نمود؟ زیرا برای بعضی اهداف لازم است که میزان درهم‌تنیدگی حالت‌ها مشخص شود. تاکنون تلاش‌های بسیاری برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های کوآنتومی انجام شده که نتیجه آن معرفی مقیاس‌های متنوعی برای درهم‌تنیدگی است [1]. تعدادی از این مقیاس‌ها، بر اساس آنتروپی زیرسامانه‌های یک سامانه کوآنتومی تعریف شده‌اند

درهم‌تنیدگی نوعی همبستگی در سامانه‌های کوآنتومی است که توصیف‌های کلاسیکی از طبیعت را به چالش کشیده و یک پدیده مختص مکانیک کوآنتومی است. به طور ساده می‌توان گفت دو یا چند ذره درهم‌تنیده‌اند اگر نتوان هر یک از آنها را بدون در نظر گرفتن دیگری توصیف کرد. از نظر ریاضی یک حالت درهم‌تنیده از یک سامانه دوجزئی، حالتی است که نتوان آن را به صورت جمع محدب<sup>1</sup> از حاصلضرب تانسوری حالت‌هایی از تک سامانه‌ها نوشت، یعنی اگر بتوان عملگر چگالی حالت سامانه را به صورت جمع محدب از حالت‌های ضربی به صورت زیر نوشت:

\* نویسنده مسئول: Baghshahi@vru.ac.ir

<sup>1</sup> یک جمع محدب از حالت‌های  $\rho_1$  و  $\rho_2$  به صورت  $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$  است که در آن  $0 < \lambda < 1$  می‌باشد.

$$C(\rho_{AB}) = \min \sum_i p_i C(|\psi_{AB}\rangle_i) \quad 6$$

که در آن کمینه به مانند رابطه 4 تعریف می گردد. مقیاس تنیدگی نیز برای یک حالت آمیخته دوجزئی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau(\rho_{AB}) = \min \sum_i p_i C^2(|\psi_{AB}\rangle_i) \quad 7$$

کمینه در رابطه بالا به مانند قبل قابل تعریف است. برای حالت های خالص دو جزئی و حالت های آمیخته  $2 \times d$  بُعدی، تنیدگی با مجذور مقیاس تلاقی برابر است، ولی در حالت کلی داریم  $C^2 \leq \tau$  [4].

برای هر حالت خالص دلخواه دو جزئی  $2 \times d$  بُعدی  $|\psi_{AB}\rangle$  رابطه زیر بین مجذور مقیاس تلاقی و درهم تنیدگی رنی وجود دارد [3]:

$$E_\alpha(|\psi_{AB}\rangle) = F_\alpha(C^2(|\psi_{AB}\rangle)) \quad 8$$

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left[ \left( \frac{1-\sqrt{1-x}}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{1+\sqrt{1-x}}{2} \right)^\alpha \right]$$

رابطه بالا برای حالت های آمیخته  $2 \times 2$  بُعدی  $\rho_{AB}$  به ازای  $\alpha \geq 0.823$  نیز برقرار است [5]. برای حالت های آمیخته  $2 \times 2$  بُعدی محاسبه مقیاس تلاقی کار ساده ای است [3]، ولی برای حالت های با ابعاد بالاتر محاسبه آن و در نتیجه محاسبه درهم تنیدگی رنی به طور تحلیلی امکان پذیر نیست. از این رو، برای در دست داشتن تقریبی از میزان درهم تنیدگی برای حالت های با ابعاد بالاتر، در مراجع مختلف حدهای بالا و پایین گوناگونی برای مقیاس تلاقی معرفی شده است. از جمله این حدها می توان به حدهای زیر اشاره کرد [۶،۷]:

$$\begin{aligned} 2(Tr\rho_{AB}^2 - Tr\rho_B^2) \leq C^2(\rho_{AB}) \leq 2(1 - Tr\rho_B^2) \\ 2(Tr\rho_{AB}^2 - Tr\rho_A^2) \leq C^2(\rho_{AB}) \leq 2(1 - Tr\rho_A^2) \end{aligned} \quad 9$$

[2]. آنتروپی یک سامانه فیزیکی را با توابع مختلفی می توان محاسبه کرد که یکی از آن ها آنتروپی رنی است که به صورت زیر تعریف می شود [۲،۳]:

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2(Tr\rho^\alpha) \quad 2$$

که در آن  $\alpha$  یک عدد حقیقی مثبت است. برای یک حالت خالص دو جزئی  $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$  بر اساس آنتروپی تعریف شده در بالا می توان مقیاس درهم تنیدگی رنی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$E_\alpha(|\psi_{AB}\rangle) = S_\alpha(\rho_A) \quad 3$$

که در آن  $\rho_A$  ماتریس چگالی کاهش یافته زیر سامانه  $A$ ، به صورت  $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$  است. تعریف بالا برای درهم تنیدگی حالت های خالص، به صورت زیر به حالت های آمیخته بسط داده می شود:

$$E_\alpha(\rho_{AB}) = \min \sum_i p_i E_\alpha(|\psi_{AB}\rangle_i) \quad 4$$

که در آن کمینه روی تمامی بسط های ممکن برای  $\rho_{AB}$  برحسب حالت های خالص به صورت  $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_{AB}\rangle_i\langle\psi_{AB}|_i$  گرفته می شود. برای حالت های آمیخته دلخواه کمینه سازی رابطه 4 کار چندان ساده ای نیست. این موضوع در مورد بسیاری از مقیاس های دیگر درهم تنیدگی از جمله تنیدگی<sup>1</sup> و تلاقی<sup>2</sup> که از جمله مقیاس های پرکاربرد درهم تنیدگی هستند نیز صادق می باشد. مقیاس تلاقی برای یک حالت خالص دوجزئی به صورت زیر تعریف می شود:

$$C(|\psi_{AB}\rangle) = \sqrt{2(1 - Tr\rho_A^2)} \quad 5$$

که در آن  $\rho_A$  ماتریس چگالی کاهش یافته زیر سامانه  $A$  است. برای یک حالت آمیخته دوجزئی نیز به مانند مقیاس درهم تنیدگی رنی، تعریف مقیاس تلاقی به صورت زیر تعمیم داده می شود:

<sup>2</sup>Concurrence<sup>1</sup> Tangle

آنگاه برای حالت‌های آمیخته  $2 \times d$  بُعدی در بازه  $0.823 \leq \alpha \leq 1.303$ ،  $F_\alpha(U(\rho_{AB}))$  و  $F_\alpha(L(\rho_{AB}))$  به ترتیب حدهای بالا و پایینی برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی خواهند بود. به عبارتی:

$$F_\alpha(L(\rho_{AB})) \leq E_\alpha(\rho_{AB}) \leq F_\alpha(U(\rho_{AB})) \quad 12$$

اثبات: از ترکیب روابط 13 و 14 در مرجع [5] داریم:

$$F_\alpha(C^2(\rho_{AB})) \leq E_\alpha(\rho_{AB}) \leq F_\alpha(\tau(\rho_{AB})) \quad 13$$

از طرف دیگر تابع  $F_\alpha(x)$  در محدوده  $0.823 \leq \alpha \leq 1.303$  تابعی یکنوا صعودی و مقعر از  $x$  است [5]. با توجه به این ویژگی  $F_\alpha(x)$  داریم:

$$F_\alpha(L(\rho_{AB})) \leq F_\alpha(C^2(\rho_{AB})), \quad 14$$

$$F_\alpha(\tau(\rho_{AB})) \leq F_\alpha(U(\rho_{AB}))$$

با ترکیب روابط 13 و 14 رابطه 12 اثبات می‌شود.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا اختلاف بین  $U(\rho_{AB})$  و  $L(\rho_{AB})$  کمتر است یا اختلاف بین  $F_\alpha(U(\rho_{AB}))$  و  $F_\alpha(L(\rho_{AB}))$ ؟ عبارت دیگر حدهای بالا و پایین معرفی شده برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی در مقایسه با حدهای بالا و پایین متناظرشان برای مقیاس تلافی کارآیی بهتری دارند یا خیر؟ جواب این سؤال به ویژگی‌های تابع  $F_\alpha(x)$ ، به ازای  $\alpha$ های مختلف، بستگی دارد. به طور دقیقتر با توجه به اینکه در محدوده  $0.823 \leq \alpha \leq 1.303$ ،  $F_\alpha(x)$  تابعی یکنوا صعودی است می‌توان گفت که به ازای هر  $x_1$  و  $x_2$  که اختلاف بین آنها، یعنی  $\Delta x = x_2 - x_1$ ، بیشتر از  $\Delta F_\alpha = F_\alpha(x_2) - F_\alpha(x_1)$  باشد آنگاه اختلاف حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی بیشتر از اختلاف حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی است. در نتیجه، هرگاه  $F'_\alpha(x) = dF_\alpha(x)/dx$  کوچکتر از یک باشد، آنگاه اختلاف بین حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی کمتر از اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی است. از آنجا که حل تحلیلی معادله  $F'_\alpha(x) = 1$  ساده نیست، برای یافتن  $x$ هایی که برای آنها  $F'_\alpha(x)$  کوچکتر از یک است، نمودار  $F'_\alpha(x)$

در رابطه بالا، نامساوی‌های  $\tau \leq 2(1 - \text{Tr} \rho_B^2)$  و  $\tau \leq 2(1 - \text{Tr} \rho_A^2)$  را می‌توان با فرض اینکه  $\{q_i, |\varphi_{AB}\rangle_i\}$  بسط کمینه برای  $\tau$  باشد، به صورت زیر اثبات کرد:

$$\tau = \sum_i q_i C^2(|\varphi_{AB}\rangle_i) = \sum_i 2q_i(1 - \text{Tr} \rho_{Ai}^2) \quad 10$$

$$\leq 2 \left( 1 - \text{Tr} \left( \sum_i q_i \rho_{Ai} \right)^2 \right) = 2(1 - \text{Tr} \rho_A^2)$$

که نامساوی موجود در رابطه بالا، با توجه به محدب بودن  $\text{Tr} \rho_A^2$  نوشته شده است [7]. حدهای ارائه شده در رابطه 9 را می‌توان به صورت چشمداشتی مشاهده‌پذیرهای فیزیکی نمایش داد و از اینرو دارای این مزیت هستند که به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری اند [6,7].

در این مقاله حدهای بالا و پایینی برای درهم‌تنیدگی رنی، با استفاده از ارتباط آن با مقیاس تلافی (رابطه 8)، برای حالت‌های آمیخته  $2 \times d$  معرفی و کارآیی آنها را با حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی مقایسه می‌کنیم. سپس با محاسبه حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی و درهم‌تنیدگی رنی برای یک سامانه اسپینی، میزان کارآیی حدهای بالا و پایین معرفی شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

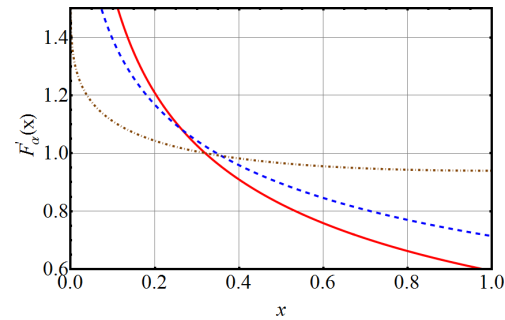
### معرفی حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی

در این بخش ابتدا در قالب یک قضیه، یک سری حدهای بالا و پایین برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی معرفی می‌کنیم.

قضیه: اگر  $U(\rho_{AB})$  و  $L(\rho_{AB})$  به ترتیب حدهای بالا و پایینی برای تنیدگی  $(\tau(\rho_{AB}))$  و مربع مقیاس تلافی  $(C^2(\rho_{AB}))$  باشند یعنی:

$$L(\rho_{AB}) \leq C^2(\rho_{AB}) \leq \tau(\rho_{AB}) \leq U(\rho_{AB}) \quad 11$$

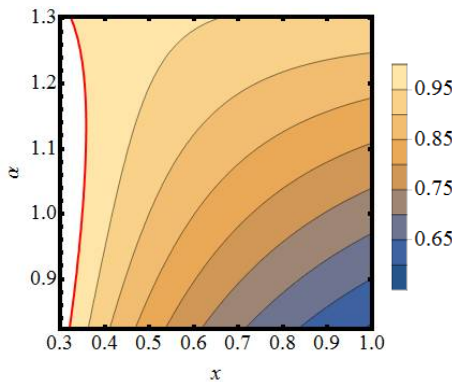
برحسب  $x$  برای چند  $\alpha$  متفاوت در بازه  $0.823 \leq \alpha \leq 1.303$  در شکل 1 رسم شده است.



شکل 1: نمودار  $F'_\alpha(x)$  به ازای  $0 \leq x \leq 1$ ،  $\alpha = 0.82$  (نمودار توپر)،  $\alpha = 0.99$  (نمودار خطچین) و  $\alpha = 1.303$  (نمودار نقطه خطچین).

با توجه به این شکل می توان دریافت که تقریباً به ازای  $x \geq 0.31$ ،  $F'_\alpha(x)$  به ازای همه  $\alpha$  ها، کوچکتر از یک می باشد. به طور دقیقتر  $F'_\alpha(x)$  به ازای  $\alpha = 0.823$  تقریباً در بازه  $0.319 \leq x \leq 1$ ، به ازای  $\alpha = 0.99$  تقریباً در بازه  $0.347 \leq x \leq 1$  و به ازای  $\alpha = 1.303$  تقریباً در بازه  $0.321 \leq x \leq 1$  کوچکتر از یک می باشند.

در شکل 2 نمودار  $F'_\alpha(x)$  برحسب  $x$  برای تمامی  $\alpha$  های بازه  $0.823 \leq \alpha \leq 1.303$  رسم شده است. خط قرمز نشان داده شده در این شکل، که خطی راست نیست، نشان دهنده تقاطعی می باشد که در آنها  $F'_\alpha(x)$  برابر با یک است و با توجه به این خط می توان این نکته را تصدیق کرد که تقریباً به ازای  $x \geq 0.31$ ،  $F'_\alpha(x)$  به ازای همه  $\alpha$  ها، کوچکتر از یک می باشد. به علاوه، با توجه به این شکل دیده می شود که برای  $\alpha$  های کوچکتر،  $F'_\alpha(x)$  می تواند مقادیر کوچکتری را به خود بگیرد و در نتیجه کارایی حدهای بالا و پایین در هم تنیدگی رنی بهتر گردد. به طور کلی، از شکل های 1 و 2 می توان دریافت که به ازای یک  $\alpha$  مشخص، همیشه کارایی حدهای بالا و پایین در هم تنیدگی رنی بیشتر از حدهای بالا و پایین در هم تنیدگی تلافی نیست (به ازای  $1 \geq x \geq 0.31$ ، کارایی آنها بیشتر و به ازای



شکل 2: نمودار  $F'_\alpha(x)$  به ازای  $0.3 \leq x \leq 1$ ، برای تمامی  $\alpha$  های بازه  $0.823 \leq \alpha \leq 1.303$  لازم به ذکر است که سانگ و همکاران [8] برای حالت های آمیخته دلخواه دوجزئی  $m \times n$  بعدی روشی را ارائه دادند که با آن می توان حدهای بالا و پایینی برای در هم تنیدگی رنی با استفاده از حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی به دست آورد. با استفاده از روش آنها برای یک حالت دوجزئی آمیخته  $2 \times d$  بعدی حد پایینی برای در هم تنیدگی رنی به دست می آید که با حد پایین معرفی شده در رابطه 12 یکسان می باشد ولی حد بالایی که برای این حالت ها از روش سانگ به دست می آید در حالت کلی با حد بالای ارائه شده در رابطه 12، یکسان نیست زیرا در این رابطه،  $U(\rho_{AB})$  حد بالایی برای تنیدگی در نظر گرفته شده است ولی در روش سانگ از حدهای بالای در هم تنیدگی تلافی برای به دست آوردن حدهای بالای در هم تنیدگی رنی استفاده می شود. در ادامه، به منظور دستیابی به درک بهتری از کارایی حدهای بالا و پایین معرفی شده، از این حدها برای تخمین میزان در هم تنیدگی در یک سامانه اسپینی، استفاده می کنیم.

مثال

در این مثال یک سامانه دوجزئی شامل یک ذره با اسپین  $1/2$  (جزء A) و یک محیط اسپینی (جزء B)، متشکل از  $N$  ذره با اسپین  $1/2$ ، در نظر می‌گیریم که با هامیلتونی به شکل زیر با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند [9]:

$$H = \sum_{i=1}^N g(\sigma_+^A I_-^{(i)} + \sigma_-^A I_+^{(i)}) \quad 15$$

که در آن  $\sigma_{\pm}^A$  و  $I_{\pm}^{(i)}$  به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش برای اسپین A و  $i$  امین اسپین محیط می‌باشند. همچنین  $g$  نشان‌دهنده ثابت جفت‌شدگی بین اسپین A و هر یک از اسپین‌های محیط است. هامیلتونی بالا می‌تواند توصیف‌کننده سامانه‌های فیزیکی متنوعی باشد. به عنوان مثال هامیلتونی بالا می‌تواند برهم‌کنش فوق ریز بین اسپین یک الکترون مقید در یک نقطه کوآتومی را توصیف کند که با اسپین هسته‌های اطراف خود برهم‌کنش می‌کند [10].

حال حالت اولیه آمیخته کل سامانه را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\rho_{AB}(0) = \frac{1}{2}(|\uparrow\bar{0}\rangle\langle\uparrow\bar{0}| + |\uparrow\bar{1}\rangle\langle\uparrow\bar{1}|) \quad 16$$

که در آن  $|\uparrow\rangle$  نشان‌دهنده اسپین بالای ذره A،  $|\bar{0}\rangle = |\downarrow\downarrow\dots\downarrow\rangle$  نشان‌دهنده حالتی است که در آن اسپین تمام هسته‌ها پایین و  $|\bar{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i I_+^{(i)} |\bar{0}\rangle$  نشان‌دهنده حالتی است که در آن اسپین هسته  $i$ ام بالا و اسپین بقیه هسته‌ها پایین باشند.

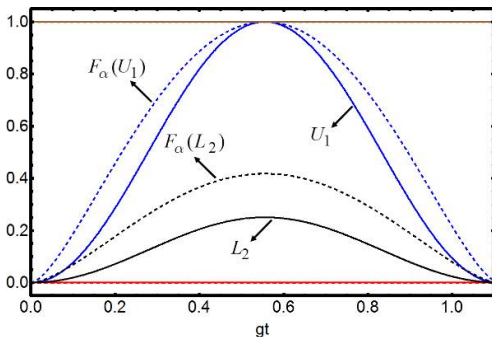
با اثر دادن عملگر تحوّل زمانی  $U(t) = e^{-iHt}$  بر روی حالت اولیه بالا، ماتریس چگالی کل سامانه در هر زمان دلخواه  $t$  ( $\rho_{AB}(t)$ ) به دست می‌آید.

در ادامه قصد داریم با استفاده از حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، تقریبی از درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌های A و B به دست آوریم. برای این منظور با بهره‌گیری از حدهای بالا و پایین مجذور مقیاس تلافی که در رابطه 9 معرفی شده‌اند و با توجه به

قضیه ذکر شده در بخش قبل، حدهای بالا و پایینی برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی بدست می‌آوریم. برای انجام این کار، در ابتدا حدهای معرفی شده در رابطه 9 را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

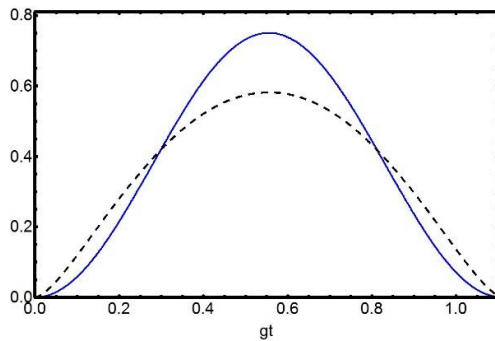
$$U_1 = 2(1 - \text{Tr}\rho_A^2), U_2 = 2(1 - \text{Tr}\rho_B^2) \quad 17$$

$$L_1 = 2(\text{Tr}\rho_{AB}^2 - \text{Tr}\rho_A^2), L_2 = 2(\text{Tr}\rho_{AB}^2 - \text{Tr}\rho_B^2)$$

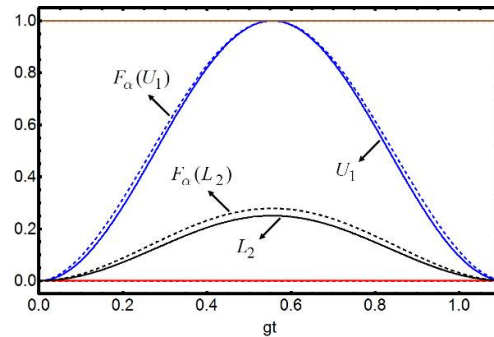


شکل 3. حدهای بالا و پایین مقیاس‌های تلافی و درهم‌تنیدگی رنی با  $\alpha = 0.823$ .

در ادامه، حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی ( $U_1, U_2$ )،  $L_1$  و  $L_2$ ) را به صورت تابعی از زمان محاسبه می‌کنیم و با جای‌گذاری آنها در رابطه 12، حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی را به ازای  $\alpha$  های متفاوت به دست می‌آوریم. با توجه به شکل 2، به ازای  $\alpha = 0.823$  بیشترین کارایی و به ازای  $\alpha = 1.303$  کمترین کارایی را برای حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی انتظار داریم و برای بقیه  $\alpha$  ها، کارایی حدهای بالا و پایین، چیزی بین این دو مقدار حدی  $\alpha$  است. از این رو، در ادامه، در نمودارهای مختلف، بررسی‌های خود را به این دو مقدار حدی  $\alpha$  محدود کرده‌ایم. در شکل‌های 3 و 4 نمودار حدهای ذکر شده به ازای  $\alpha = 0.823$  و  $\alpha = 1.303$  برحسب زمان مشخصه  $gt$  رسم شده است.



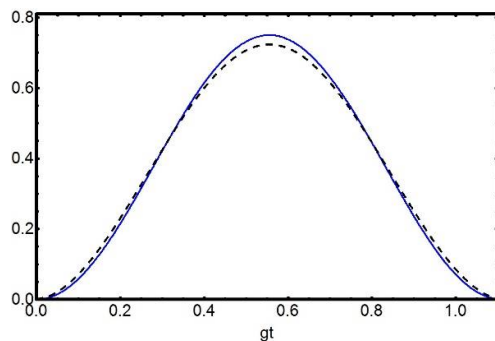
شکل 5. اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی (نمودار توپر) و حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی (نمودار خطچین) با  $\alpha = 0.823$ .



شکل 4. حدهای بالا و پایین مقیاس‌های تلافی و درهم‌تنیدگی رنی با  $\alpha = 1.303$ .

لازم به ذکر است که در این دو نمودار، حدهای  $L_1$  و  $U_2$  و در نتیجه  $F_\alpha(L_1)$  و  $F_\alpha(U_2)$  به ترتیب مقادیر ثابت صفر و یک را در تمام زمان‌ها دارا هستند. بنابراین،  $U_1$  نسبت به  $U_2$  حد بالای بهتری برای تلافی و  $F_\alpha(U_1)$  نسبت به  $F_\alpha(U_2)$  حد بالای بهتری برای درهم‌تنیدگی رنی است. از طرف دیگر،  $L_2$  نسبت به  $L_1$  حد پایین بهتری برای تلافی و  $F_\alpha(L_2)$  نسبت به  $F_\alpha(L_1)$  حد پایین بهتری برای درهم‌تنیدگی رنی است. در نتیجه در ادامه،  $U_1$  و  $L_2$  به ترتیب به عنوان حدهای بالا و پایین تلافی و همچنین،  $F_\alpha(U_1)$  و  $F_\alpha(L_2)$  به ترتیب به عنوان حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

همان‌طور که از هر دو شکل 3 و 4 پیداست، حد پایین  $F_\alpha(L_2)$  بزرگتر از  $L_2$  و حد بالای  $U_1$  کوچکتر از  $F_\alpha(U_1)$  است. از اینرو، برای مقایسه کارایی حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی با حدهای بالا و پایین تلافی، اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی و اختلاف بین حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی را برای  $\alpha = 0.823$  و  $\alpha = 1.303$  به ترتیب در شکل‌های 5 و 6 رسم نموده‌ایم.



شکل 6. اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی (نمودار توپر) و حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی (نمودار خطچین) با  $\alpha = 1.303$ .

با توجه به این دو شکل مشخص است که برای هر دو مقدار  $\alpha$ ، اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی در برخی از بازه‌های زمانی، کوچکتر از اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی است و در برخی از بازه‌های زمانی دیگر بالعکس. این بدان مفهوم است که کارایی حدهای درهم‌تنیدگی رنی، در بسیاری از زمان‌ها نسبت به حدهای تلافی، می‌تواند بهتر باشد. همچنین مقایسه بین شکل‌های 5 و 6 نشان می‌دهد که مزیت استفاده از حدهای درهم‌تنیدگی رنی نسبت به حدهای تلافی برای  $\alpha$ های کوچکتر، چشمگیرتر می‌گردد. لازم به ذکر است که در تمامی نمودارها، تمامی

entanglement, *Reviews of Modern Physics* **81** (2009) 865-942.

[2] J.S. Kim, B.C. Sanders, Unified entropy, entanglement measures and monogamy of multi-party entanglement, *The Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011) 295303, 1-14.

[3] Y-X. Wang, L-Z. Mu, V. Vedral, H. Fan, Entanglement Rényi  $\alpha$  entropy, *Physical Review A* **93** (2016) 022324, 1-10.

[4] T.J. Osborne, Entanglement measure for rank-2 mixed states, *Physical Review A* **72** (2005) 022309, 1-4.

[5] W. Song, Y-K. Bai, M. Yang, M. Yang, Z-L. Cao, General monogamy relation of multiqubit systems in terms of squared Rényi- $\alpha$  entanglement, *Physical Review A* **93** (2016) 022306, 1-7.

[6] F. Mintert, A. Buchleinter, Observable entanglement measure for mixed quantum states, *Physical Review Letters* **98** (2007) 140505, 1-3.

[7] C.J. Zhang, Y.X. Gong, Y.S. Zhang, G.S. Guo, Observable estimation of entanglement for arbitrary finite-dimensional mixed state, *Physical Review A* **78** (2008) 042308, 1-5.

[8] W. Song, L. Chen, Z-L. Gao, Lower and upper bounds for entanglement of Rényi- $\alpha$  entropy, *Scientific Reports* **6** (2016) 23, 1-10.

[9] L. Li, J. Zou, Z. He, J-G. Li, B. Shao, L.A. Wu, New features of entanglement dynamics with initial system-bath correlation, *Physics Letters A* **376** (2012) 913-918.

[10] L.A. Wu, Dressed qubits in nuclear spin baths, *Physical Review A* **81** (2010) 044305, 1-4.

حدهای بالا و پایین توابعی تناوبی با دوره تقریبی  $gt = 1.2$  هستند.

## بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش‌های مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی سامانه‌های درهم‌تنیده معرفی شده است. از جمله مقیاس‌هایی که در این مقاله نیز به بررسی آنها پرداخته شد، مقیاس‌های درهم‌تنیدگی تلافی، تنیدگی و رنی است. همان‌طور که گفته شد برای حالت‌های خالص و حالت‌های آمیخته  $2 \times 2$  بُعدی مقیاس تلافی و تنیدگی به راحتی قابل محاسبه هستند، اما در حالت‌های آمیخته  $2 \times d$  بُعدی، محاسبه آنها چندان آسان نیست. به همین دلیل برای داشتن تقریبی از میزان درهم‌تنیدگی برای چنین حالت‌هایی، حدهای بالا و پایین متعددی برای مقیاس تلافی و تنیدگی معرفی گردیده است. از آنجا که این دو مقیاس با مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، برای حالت‌های آمیخته  $2 \times d$  بُعدی، دارای ارتباط مستقیم هستند، با استفاده از این ارتباط و همچنین حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی و تنیدگی، در قالب یک قضیه، حدهای بالا و پایینی برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی معرفی کردیم. همچنین کارایی این حدها را به‌طور کلی در مقایسه با حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی مورد بررسی قرار دادیم. با در نظر گرفتن یک مثال، این مقایسه را با جزئیات بیشتری انجام دادیم. نتایج نشان می‌دهند که در مثال ذکر شده حدهای بالا و پایین مقیاس رنی در مقایسه با حدهای بالا و پایین مقیاس تلافی، در بسیاری از شرایط دقیق‌تر هستند.

## مرجع‌ها

[1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Quantum