ناپایداری مدولاسیونی امواج الکترومغناطیسی غیرخطی در توری براگ پلاسمایی

جعفر برهانیان*

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، صندوق پستی 179، اردبیل، ایران

دریافت: 1396/05/16 ویرایش نهائی: 1397/11/30 پذیرش: 1397/12/25

چکیده

انتشار غیرخطی امواج الکترومغناطیسی در توری براگ پلاسمایی در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادلات ماکسول همراه با مدل سیالی پلاسما و در رژیم نسبیتی ضعیف، دو معادلهٔ جفت شده به‌دست آمد که حاکم بر تحولات پوش امواج پیشرونده و پسرونده در یک پلاسمای سرد نامغناطیده می‌باشند که چگالی زمینهٔ آن به فرم یک توری براگ مدوله شده است. سپس جواب‌های غیرخطی به‌صورت امواج تخت با دامنهٔ ثابت در نظر گرفته شده و پایداری آنها نسبت به یک اختلال کوچک مورد بررسی قرار گرفته است. وابستگی نرخ رشد و همچنین پنجرهٔ ناپایداری به‌پارامترهای مربوطهٔ سیستم مورد کنکاش قرار گرفته است.

کلیدواژگان: ناپایداری مدولاسیونی، امواج الکترومغناطیسی، توری براگ پلاسمایی

مقدمه

طی چند دههٔ اخیر تکنولوژی لیزر پیشرفت‌های به‌سزایی داشته است به‌گونه‌ای که شاهد تولید پالس‌های با شدت بالا و طول بسیار کوتاه بوده‌ایم. این پیشرفت بیشتر مدیون تکنیک تقویت پالس چیرپ[1] (CPA) بوده است [1]. در این روش با استفاده از المان‌های اپتیکی به‌خصوص توری‌ها پالس لیزری چیرپ شده و پس از تقویت متراکم سازی انجام می‌گیرد [2]. در تکنیک CPA این مشکل وجود دارد که برای شار انرژی بالاتر از حدود $1\ \mathrm{J/cm^2}$ (برای طول پالس فمتوثانیه) کریستال تقویت کننده و همچنین توری‌ها دچار آسیب جدی می‌شوند [3]. با این توضیح ایجاد پالس‌های نسل بعدی مستلزم بالا رفتن اندازه المان‌های اپتیکی و در نتیجه بالا رفتن هزینه می‌باشد. به‌همین خاطر سعی بر آنست که برای تقویت، دست‌کاری و شکل‌دهی پالس‌های لیزری نسل بعد از محیطی استفاده گردد که آستانه آسیب آن بالا باشد.

طی سالیان اخیر محیط پلاسما به‌عنوان یک جایگزین مناسب برای تقویت پالس لیزری مورد توجه بسیاری قرار گرفته است [5و4]. علاوه بر این پلاسما محیط مناسب با آستانه آسیب بسیار بالا برای دست‌کاری و شکل‌دهی پالس لیزری نیز می‌باشد. به‌عنوان مثال آینهٔ پلاسمایی نه فقط به‌عنوان یک انعکاس دهنده بلکه به‌عنوان یک قطعهٔ جایگزین برای بهبود کنتراست پالس استفاده شده است [6]. توری پلاسمایی مورد دیگری است که برای کنترل قطبش پالس [7]، به‌عنوان مدولاتور اپتیکی [8]، متراکم سازی پالس [9]، دست‌کاری پالس [10] و تشکیل سالیتون [11] مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد.

---

* نویسنده مسئول: Borhanian@uma.ac.ir

[1] Chirped Pulse Amplification

ایده تشکیل توری پلاسمایی به‌طور نظری ابتدا توسط بوتون و ران در سال 1991 [12] مطرح شد و سپس در سال‌های بعد توسط دیگران [16-13] مورد توجه جدی‌تر قرار گرفت. در این ایده، نیروی اثرگذار حاصل از برهم‌کنش دو پالس لیزری شدید که در جهت مخالف هم منتشر می‌شوند، چگالی زمینهٔ پلاسما را مدوله کرده و محیطی مانند توری براگ، شبیه آن چیزی که در یک فیبر نوری نیز ایجاد می‌شود، به‌وجود می‌آورند. بسته به‌دامنه و طول موج پالس‌های برهم‌کنش کننده، مدولاسیون می‌تواند عمیق[1] و یا سطحی[2] باشد. یکی از مهمترین مشخصهٔ توری براگ وجود باند گاف فوتونیکی است که باعث بروز پدیده‌های فیزیکی جالبی مانند دوپایداری، سوئیچینگ، ناپایداری مدولاسیونی و تولید سالیتون خواهد شد [17].

از میان پدیده‌های اشاره شده در بالا، ناپایداری مدولاسیونی از جمله مهمترین پدیده‌ها می‌باشد که به‌طور نظری مورد توجه فیزیک غیرخطی و پلاسما بوده و به‌عنوان عامل ایجاد ساختارهای غیرخطی جایگزیده مانند امواج سالیتونی و امواج راگو [18] شناخته شده است. ناپایداری مدولاسیونی در اثر سوار کردن اختلال بر امواج غیرخطی تخت می‌تواند به‌وجود بیاید. چنانچه شرایط فراهم باشد اختلال رشد پیدا کرده و باعث ایجاد قطاری از پالس‌های کوتاه خواهد شد. این پدیده می‌تواند در محیط‌های مختلف مانند سیالات [19]، محیط‌های اپتیکی [20] و پلاسما [21] به‌وقوع بپیوندد. چنانچه معادلهٔ حاکم بر انتشار امواج غیرخطی در یک محیط معادلهٔ شرودینگر غیرخطی باشد، آنگاه این ناپایداری حاصل تعامل بین غیرخطیت و پاشندگی است. برای وقوع ناپایداری لازم است پاشندگی و غیرخطیت هر دو مثبت یا منفی باشند. یکی از خصوصیات مهم توری پلاسمایی مانند توری فیبر که برای ناپایداری مدولاسیونی بسیار مهم است پاشندگی حاصل از مدولاسیون چگالی است. این خاصیت باعث می‌شود تا بتوان پاشندگی سرعت گروه و میزان عدم تطبیق فاز (طول موج) را کنترل کرد. در نتیجه آهنگ تکرار ایجاد قطار پالس‌های کوتاه نیز با این پارامتر کنترل خواهد شد. اگرچه این ناپایداری در توری براگ فیبر بررسی شده است [22] ولی این امر در پلاسما مورد کنکاش قرار نگرفته است. لذا هدف این مقاله مطالعهٔ این موضوع خواهد بود تا بتوان تأثیر پارامترهای پلاسما و پالس را بر وقوع این ناپایداری مورد مداقه قرار داد.

نظریهٔ مدهای جفت شده

در این بخش می‌خواهیم ابتدا در مورد تولید توری براگ پلاسمایی و سپس انتشار امواج غیرخطی در آن بحث کنیم. دو پالس لیزری با قطبش خطی و با پتانسیل برداری $\vec{A}_{1,2}=b_{1,2}\cos(k_{1,2}z-\omega_{1,2}t)\hat{x}$ در نظر بگیرید که در خلاف جهت هم منتشر می‌شوند به‌طوری‌که $k_1=-k_2=k$ و $\omega_1=\omega_2$ به‌ترتیب عدد موج و فرکانس آنها و $b_{1,2}$ نیز دامنهٔ آنها است. در اثر نیروی اثرگذار وارد بر الکترون‌ها چگالی زمینهٔ آنها دچار اختلالی به‌شکل $N_0=1-\delta N_0$ خواهد شد که در آن [13]

$$\delta N_0=2\kappa\cos(2kz)(1-\cos t) \qquad 1$$

و $\kappa=k^2 b_1 b_2$ تعریف شده است. لازم به‌ذکر است که در عبارت فوق چگالی با چگالی زمینهٔ n_0، زمان با فرکانس پلاسما $\omega_{p0}=(n_0 e^2/m_e\varepsilon_0)^{1/2}$، طول با ω_{p0}/c و پتانسیل برداری نیز با $m_e c^2/e$ بی‌بعد شده‌اند که در آن e بار الکترون، m_e جرم آن و c سرعت نور است. در به‌دست آوردن رابطهٔ فوق فرض شده است که غیرخطیت ضعیف بوده به‌طوری‌که

[1] Deep grating

[2] Shallow grating

$|b_{1,2}|<1$ باشد. لازم به‌ذکر است که اختلال وارد بر چگالی یون‌ها در مقایسه با اختلال چگالی الکترون‌ها ناچیز بوده و از آن صرف‌نظر شده است [13]. اگر $\delta N_0 \ll 1$ باشد آنگاه مدولاسیون را سطحی و در غیر این‌صورت عمیق گویند. حال می‌خواهیم انتشار پالس لیزری را در چنین پلاسمایی مطالعه کنیم. برای حصول چنین نتیجه‌ای از نظریهٔ مدهای جفت شده [23] استفاده خواهیم کرد. در تقریب یک بعدی و همچنین تقریب سیالی معادلات حاکم بر انتشار امواج الکترومغناطیسی نسبیتی به‌صورت زیر می‌باشند [24]

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}=\frac{N\vec{A}}{\gamma} \qquad 2$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=N-1 \qquad 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial (Nu)}{\partial z}=0 \qquad 4$$

$$\frac{\partial (\gamma u)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}(\phi-\gamma) \qquad 5$$

که در آن $\gamma=((1+A^2)/(1-u^2))^{1/2}$ فاکتور نسبیتی، u مؤلفهٔ سرعت الکترون‌ها در امتداد انتشار موج، $A(\phi)$ پتانسیل برداری (پتانسیل اسکالر) و N چگالی پلاسما می‌باشد. در معادلات بالا همچنین سرعت با سرعت نور و پتانسیل اسکالر نیز با $m_e c^2/e$ بی‌بعد شده‌اند. در رژیم نسبیتی ضعیف که $|A|<1$ است می‌توان فرض کرد $N=1-\delta N_0+\delta n$ که در آن δN_0 در $\delta n \ll 1$ می‌باشد. لازم به‌ذکر است که δN_0 چگالی زمینهٔ پلاسما است که توسط دو پالس اولیه ایجاد می‌شود در حالی‌که δn اختلالی است در چگالی پلاسما که توسط پالس سوم ایجاد می‌شود. یعنی ابتدا دو پالس پرتوان محیط خنثی را تبدیل به پلاسما کرده و چگالی آن‌را مدوله می‌کنند و سپس پالس سوم در این محیط منتشر می‌شود. همچنین در این رژیم می‌توان فاکتور نسبیتی را به‌صورت $\gamma \simeq 1+A^2/2$ تقریب زد. با در نظر گرفتن تقریبات بالا معادلهٔ2 به‌شکل زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)\vec{A}=\left(\delta n-\delta N_0-\frac{1}{2}A^2\right)\vec{A} \qquad 6$$

اکنون اگر مدولاسیون چگالی زمینهٔ سطحی باشد با خطی‌سازی معادلات سیالی 5-3 و ترکیب آنها خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1\right)\delta n \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A^2}{\partial z^2} \qquad 7$$

در نظریهٔ مدهای جفت شده فرض بر آنست که یک میدان دلخواه در یک محیط ناهمگن را می‌توان برحسب مدهای محیط همگن متناظر بسط داد. ناهمگنی باعث مبادلهٔ انرژی بین این مدها شده و در نتیجه دامنهٔ آنها تابعی از زمان و مکان خواهد بود. ولی چنانچه حداقل به‌صورت تقریبی تطابق فازی بین دو یا چند مد وجود داشته باشد آنگاه تبادل انرژی بیشتر بین آنها بوده و جفت شدگی با سایر مدها را می‌توان در نظر نگرفت. بر این اساس پتانسیل برداری به‌شکل زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\vec{A}(z,t)=\frac{1}{2}\hat{x}\left[A_1 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)}+A_2 e^{-i(\beta_0 z+\omega_0 t)}+c.c\right] \qquad 8$$

که در آن $A_{1,2}(z,t)$ دامنهٔ امواج پیش‌رونده و پس‌رونده بوده، ω_0 فرکانس مرکزی و $\beta_0=(\omega_0^2-1)^{1/2}$ نیز عدد موج مرکزی است. با قرار دادن رابطهٔ8 در معادلهٔ7 در پایین‌ترین مرتبه، اختلال چگالی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\delta n \simeq \frac{\beta_0^2}{2(4\beta_0^2+3)} A_1^2 e^{2i(\beta_0 z-\omega_0 t)} + \frac{\beta_0^2}{2(4\beta_0^2+3)} A_2^2 e^{-2i(\beta_0 z+\omega_0 t)} - \beta_0^2 A_1 A_2^* e^{2i\beta_0 z} + c.c. \quad (9)$$

اکنون برای اینکه با گذشت چندین دوره مدولاسیون دامنه تأثیرگذار باشد و موجب تبادل مؤثر انرژی بین دو موج پیشرونده و پسرونده گردد لازم است حداقل یک شرط شبه تشدید یا تطابق فاز وجود داشته باشد. با توجه به نحوه تغییرات زمانی و مکانی δN_0 و عبارات مربوط به δn و A^2 خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)A_1 e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} = \left[-k^2 b_1 b_2 A_2 e^{-2i\delta\beta z} - \left(q_1|A_1|^2+q_2|A_2|^2\right)A_1\right]e^{i(\beta_0 z-\omega_0 t)} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1\right)A_2 e^{-i(\beta_0 z+\omega_0 t)} = \left[-k^2 b_1 b_2 A_1 e^{2i\delta\beta z} - \left(q_1|A_2|^2+q_2|A_1|^2\right)A_2\right]e^{-i(\beta_0 z+\omega_0 t)} \quad (11)$$

که در آن

$$q_1 = \frac{3}{8}-\frac{\beta_0^2}{2(4\omega_0^2-1)};\ q_2 = \frac{3}{8}+\beta_0^2 \quad (12)$$

بوده و $\delta\beta = \beta_0 - k$ نشانگر عدم تطابق فازی است. اکنون برای به‌دست آوردن معادلات نهایی برای دامنه‌های $A_{1,2}$ و منظور کردن مرتبه‌های مختلف پاشندگی می‌توان معادلات بالا را ابتدا در فضای فوریه نوشته و پس از اعمال کردن عملگرهای سمت چپ دوباره به فضای زمانی برگرداند. جزئیات این مرحله در مرجع [25] به تفصیل بیان شده است لذا از تکرار آن صرف‌نظر کرده و نتیجهٔ نهایی به‌صورت زیر گزارش می‌شود

$$i\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A_1}{\partial t}\right)-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}+\kappa A_2 e^{-2i\delta\beta z} + \left(Q_1|A_1|^2+Q_2|A_2|^2\right)A_1 = 0 \quad (13)$$

$$i\left(-\frac{\partial A_2}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A_2}{\partial t}\right)-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}+\kappa A_1 e^{2i\delta\beta z} + \left(Q_1|A_2|^2+Q_2|A_1|^2\right)A_2 = 0 \quad (14)$$

که در آن $Q_j = q_j / 2\beta_0$ بوده، $\kappa = k^2 b_1 b_2 / 2\beta_0$ ضریب جفت‌شدگی و $\beta_m = \left(d^m\beta / d\omega^m\right)_{\omega=\omega_0}$ می‌باشد. در به‌دست آوردن معادلات فوق از تقریب پوش کند تغییر در فضای فوریه یعنی شرط $\partial^2 A_j(z,\omega)/\partial z^2 \ll \beta_0 \partial A_j(z,\omega)/\partial z$ استفاده شده است [25]. چنانچه از تبدیل زیر استفاده شود

$$A_1 = U_1 e^{-i\delta\beta z};\quad A_2 = U_2 e^{i\delta\beta z} \quad (15)$$

و از پاشندگی سرعت گروه (β_2) نیز صرف‌نظر گردد آنگاه به‌جفت معادلات حاکم بر تحولات مدهای جفت شده در توری براگ پلاسمایی دست پیدا خواهیم کرد

$$i\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)+\delta\beta U_1+\kappa U_2 + \left(Q_1|U_1|^2+Q_2|U_2|^2\right)U_1 = 0 \quad (16)$$

$$i\left(-\frac{\partial U_2}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)+\delta\beta U_2+\kappa U_1 + \left(Q_1|U_2|^2+Q_2|U_1|^2\right)U_2 = 0 \quad (17)$$

در معادلات بالا Q_1 ضریب خود مدولاسیون فازی[1] (SPM) و Q_2 نیز ضریب مدولاسیون فاز متقابل[2] (XPM) می‌باشند. با استفاده از جفت معادلات فوق

---

[1] Self-Phase Modulation

[2] Cross-Phase Modulation

می‌توان تحولات دو پالس پیش‌رونده و پس‌رونده را در در توری براگ پلاسمایی هم در رژیم خطی و هم در رژیم غیرخطی مورد بحث قرار داد. چنانچه از جملات غیرخطی صرف‌نظر شود آنگاه تحلیل معادلات به‌دست آمده نشان می‌دهد که رابطهٔ پاشندگی خطی امواج تخت در توری براگ پلاسمایی به‌صورت $\beta = \pm\sqrt{\delta\beta^2 - \kappa^2}$ است [17و9]. بنابراین توری پلاسمایی باند گاف فوتونیکی به‌فرم $-\kappa < \delta\beta < \kappa$ دارد که امواج الکترومغناطیسی مجاز به‌انتشار در توری پلاسمایی را نیستند. همچنین سرعت گروه به‌وسیلهٔ رابطهٔ $\upsilon_g = \pm\upsilon_{g0}\sqrt{1-\kappa^2 / \delta\beta^2}$ و پاشندگی سرعت گروه نیز مطابق رابطهٔ $\beta_2 = -\mathrm{sign}(\delta\beta)\kappa^2 / \upsilon_{g0}^2(\delta\beta^2 - \kappa^2)^{3/2}$ تعیین می‌گردد که در آن $\upsilon_{g0} = \beta_0 / \omega_0$ است [17]. دو رابطهٔ اخیر خواص جالبی برای توری براگ از خود بروز می‌دهند. از جمله اینکه سرعت پالس در نزدیکی‌های باند گاف بسیار کوچک شده و همچنین خواص پاشندگی توری براگ رفتاری متفاوت نسبت به‌محیط همگن از خود بروز می‌دهد. بدین معنی که پاشندگی سرعت گروه علامت خود را در عبور از باند گذر پایین به‌باند گذر بالا تغییر می‌دهد. یعنی نوع پاشندگی محیط (عادی یا غیرعادی) در عبور از باند گاف تغییر می‌کند. چنانچه جملات غیرخطی در معادلات جفت شدهٔ 17و16 حفظ شوند پدیده‌های غیرخطی زیادی قابل پیش‌بینی خواهد شد. از این میان در ادامه به ناپایداری مدولاسیونی پرداخته می‌شود.

ناپایداری مدولاسیونی

در این بخش هدف مطالعهٔ ناپایداری مدولاسیونی امواج تخت (پیوسته) با دامنهٔ ثابت ولی بزرگ می‌باشد. لذا ابتدا باید جواب تخت را برای معادلات 17و16 پیدا کرده و سپس دینامیک اختلالات وارد بر آن مطالعه شود. اگر جوابی به‌صورت زیر برای این جفت معادله در نظر گرفته شود

$$U_1 = V_1 e^{i\eta z}; \; U_2 = V_2 e^{i\eta z} \tag{18}$$

که در آن V_j دامنهٔ ثابت و حقیقی و η طول موج اختلال است، با قرار دادن عبارات فوق در معادلات 17و16 و تعریف پارامترهای جدید $f = V_2 / V_1$ (نسبت دامنهٔ دو موج) و $W_0 = V_1^2 + V_2^2$ (توان دو موج)، و پس از انجام عملیات جبری خواهیم داشت

$$\eta = \frac{1}{2}\kappa\left(f - \frac{1}{f}\right) + \frac{(Q_1 - Q_2)(f^2 - 1)W_0}{2(f^2 + 1)} \tag{19}$$

$$\delta\beta = -\frac{1}{2}\kappa\left(f + \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}W_0(Q_1 + Q_2) \tag{20}$$

حال اختلال کوچک ϵ_j $(|\epsilon_j| \ll V_j)$ را بر امواج تخت سوار می‌کنیم

$$\begin{aligned} U_1 &= (V_1 + \epsilon_1)e^{i\eta z}; \\ U_2 &= (V_2 + \epsilon_2)e^{i\eta z} \end{aligned} \tag{21}$$

با جای‌گذاری روابط فوق در معادلات 17و16 و خطی سازی نسبت به ϵ_j و استفاده از روابط 20و19 خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &i\left(\frac{\partial\epsilon_1}{\partial z} + \beta_1\frac{\partial\epsilon_1}{\partial t}\right) - \kappa f\epsilon_1 + \kappa\epsilon_2 + \\ &G[Q_1(\epsilon_1 + \epsilon_1^*) + Q_2 f(\epsilon_2 + \epsilon_2^*)] = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &i\left(-\frac{\partial\epsilon_2}{\partial z} + \beta_1\frac{\partial\epsilon_2}{\partial t}\right) - \frac{\kappa}{f}\epsilon_2 + \kappa\epsilon_1 + \\ &G[Q_1 f^2(\epsilon_2 + \epsilon_2^*) + Q_2 f(\epsilon_1 + \epsilon_1^*)] = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

که در آن $G = W_0 / (1+f^2)$ است. اکنون اگر فرض کنیم ϵ_j به‌صورت زیر باشد

$$\epsilon_j = c_j e^{i(\lambda z - \Omega t)} + d_j e^{-i(\lambda z - \Omega t)} \quad 24$$

آنگاه با قرار دادن رابطهٔ فوق در معادلات 23و22 به‌یک دستگاه معادلات جبری خطی همگن به‌شکل $[M][Y]=0$ دست پیدا خواهیم کرد که در آن $[Y]^T = [c_1, d_1, c_2, d_2]$ بوده، بالانویس T به‌معنی ترانهاده و مؤلفه‌های ماتریس M_{ij} به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{aligned}
&M_{11} = M_{22} = GQ_1; M_{33} = M_{44} = GQ_1 f^2\\
&M_{12} = GQ_1 - \beta_1\Omega - f\kappa + \lambda\\
&M_{13} = M_{31} = M_{42} = M_{24} = GQ_2 f\\
&M_{14} = M_{41} = M_{32} = M_{23} = GQ_2 f + \kappa\\
&M_{21} = GQ_1 + \beta_1\Omega - f\kappa - \lambda\\
&M_{34} = (GQ_1 f^3 - \beta_1\Omega f - f\lambda - \kappa)/f\\
&M_{43} = (GQ_1 f^3 + \beta_1\Omega f + f\lambda - \kappa)/f
\end{aligned}$$

شرط وجود جواب برای دستگاه معادلات جبری همگن فوق این است که دترمینان ضرایب صفر باشد که منجر به‌معادلهٔ چندجمله‌ای زیر خواهد شد

$$S^4 + \alpha_2 S^2 + \alpha_1 S + \alpha_0 = 0 \quad 25$$

که در آن $S = \beta_1\Omega = \Omega/\upsilon_{g0}$ بوده و ضرایب α_j به‌شکل زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{aligned}
\alpha_0 = \lambda^2[&4Gf^3\kappa(Q_1+Q_2) - f^4\kappa^2 +\\
&2f^2\kappa^2 + f^2\lambda^2 - \kappa^2]/f^2\\
\alpha_1 = 2&\kappa^2\lambda(1-f^2)/f^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = [&4Gf^3\kappa(Q_1-Q_2) - f^4\kappa^2 -\\
&2f^2\kappa^2 - 2f^2\lambda^2 - \kappa^2]/f^2
\end{aligned}$$

مطالعهٔ ناپایداری مدولاسیونی در توری براگ پلاسمایی بر پایهٔ معادلهٔ پاشندگی25 استوار است. چون در توری پلاسمایی همزمان پالس الکترومغناطیسی پیشرونده و پسرونده وجود دارد، لذا زمان است که برای هر دو در گذر می‌باشد. پس برای مطالعهٔ ناپایداری و نرخ رشد (بهره) آن فرض می‌شود λ حقیقی بوده و Ω یا معادل آن S بتواند مختلط باشد.

ریشه‌های معادلهٔ پاشندگی25 وابسته به پنج پارامتر f ، W_0، κ، ω_0 و λ می‌باشند. f بیانگر نحوهٔ توزیع توان کل W_0 بین امواج پیشرونده و پسرونده می‌باشد. وقتی $|f|>1$ ($|f|<1$) باشد موج پسرونده (پیشرونده) غالب می‌باشد. از طرف دیگر $f<0$ ($f>0$) برای شاخهٔ بالایی (شاخهٔ پایینی) منحنی پاشندگی خطی اتفاق می‌افتد و متناظر با پاشندگی منفی یا غیرعادی (مثبت یا عادی) است. همچنین $f=\pm 1$ نیز مربوط به‌دو لبهٔ باند گاف است که در آنجا پاشندگی بیشنه مقدار خود را دارا است. $f=-1$ ($f=1$) مربوط به پایین‌ترین (بالاترین) نقطهٔ شاخه بالایی (پایینی) منحنی پاشندگی می‌باشد. برای کسب اطلاعات به‌مرجع [22] مراجعه گردد. با توجه به‌اینکه تحلیل انجام شده در رژیم نسبیتی ضعیف و برای توری با مدولاسیون سطحی اعتبار دارد لذا نسبت به انتخاب مقادیر W_0 و κ محدودیت وجود دارد بدین معنی که W_0 همیشه کوچکتر از یک و κ خیلی کوچکتر از نیم در نظر گرفته شود. در اینجا حد بالا برای W_0 یک و برای κ نیز 0/1 در نظر گرفته خواهد شد.

در مطالعهٔ ناپایداری مدولاسیونی بررسی دو موضوع اهمیت دارد. اولی یافتن نواحی از فضای پارامتری است که ناپایداری می‌تواند روی دهد (پنجرهٔ ناپایداری) و دیگری وابستگی نرخ رشد ناپایداری به پارامترهای مختلف سیستم است. معادلهٔ جبری25 دارای چهار جواب است. شرط وقوع ناپایداری این است که حداقل

یکی از جواب‌ها دارای بخش مجازی باشد. نرخ رشد و یا بهره را به‌صورت $\Gamma = |\mathrm{Im}(S_m)|$ تعریف می‌کنیم که در آن S_m ریشه‌ای است که دارای بزرگترین بخش مجازی است. برای شروع ابتدا به‌حالت خاصی می‌پردازیم که در آن $f = \pm 1$ (لبه‌های گاف) است. در این حالت $\alpha_1 = 0$ بوده و معادلهٔ25 دارای جواب‌هایی به‌صورت زیر است

$$S_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_0}} \qquad 26$$

از رابطهٔ فوق مشخص است چنانچه آرگومان هر یک از رادیکال‌ها منفی باشد آنگاه ناپایداری به‌وقوع خواهد پیوست.

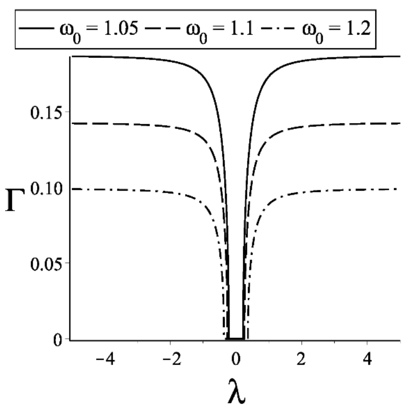
برای حالتی که $f = 1$ (بیشینهٔ پاشندگی عادی) است با توجه به رفتار ضرایب $Q_{1,2}$ برحسب ω_0 (معادل با β_0)، به‌غیر از پلاسمای با چگالی زمینه نزدیک به‌چگالی بحرانی (ω_0 در همسایگی یک)، برای همه مقادیر پارامترها داریم $\alpha_0 > 0$، $\alpha_2 < 0$ و $\alpha_2^2 > 4\alpha_0$. بنابراین احتمال ناپایداری مدولاسیونی فقط برای پلاسمای با چگالی زمینه نزدیک به‌چگالی بحرانی امکان پذیر خواهد بود. برای چگالی نزدیک به‌چگالی بحرانی یعنی در حد $\omega_0 \to 1^+$، $Q_2 \to 2Q_1$ و یک آستانه توان برای وقوع ناپایداری به‌صورت $W_0 > \kappa / Q_1$ وجود دارد. علاوه بر آن ناپایداری فقط برای طول موجی رخ می‌دهد که شرط زیر را ارضا کند [22]

$$|\lambda| > (\kappa + Q_1 G)\sqrt{\kappa / (2Q_1 G - \kappa)} \qquad 27$$

آنگاه نرخ رشد ناپایداری برای λ بزرگ چنین خواهد بود [22]

$$\Gamma_{f=1} = \sqrt{\kappa(2Q_1 G - \kappa)} \qquad 28$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که برای $f = 1$ بهرهٔ ناپایداری مدولاسیونی تقریباً مستقل از طول موج اختلال اعمالی می‌باشد. تغییرات نرخ رشد برحسب عدد موج برای ω_0 مختلف در شکل1 به‌نمایش گذاشته شده است. همان‌طور که مشخص است برای طول موج‌های بزرگ نرخ رشد به‌آن وابسته نیست که در توافق با رابطهٔ28 نیز می‌باشد. با دور شدن از چگالی بحرانی نرخ رشد کاهش می‌یابد. همچنین در بازهٔ کوچکی حول $\lambda = 0$ ناپایداری وجود ندارد که این بازه توسط رابطهٔ27 به‌صورت دقیق معین می‌گردد.



شکل1. تغییرات نرخ رشد برای $f = 1$ ، $W_0 = 0.8$ و $\kappa = 0.1$.

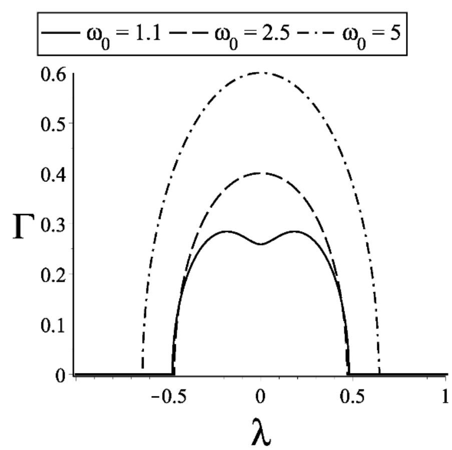
اکنون ملاحضات فوق را برای حالت $f = -1$ (بیشینه پاشندگی غیرعادی) بررسی می‌کنیم. نتایج بررسی عددی نشان می‌دهد که در این حالت رابطهٔ $\alpha_2^2 \approx |4\alpha_0|$ برقرار است. در نتیجه با توجه به‌رابطهٔ26 شرط وقوع ناپایداری این است که $\alpha_2 > 0$ باشد. این اتفاق در بازهٔ کوچکی حول $\lambda = 0$ اتفاق می‌افتد. با نگاه به‌رابطهٔ مربوط به α_2 به‌راحتی می‌توان دریافت که شرط وقوع

ناپایداری این است که $|\lambda|<\sqrt{2\kappa W_0(Q_2-Q_1)-2\kappa^2}$ باشد.

در این حالت نیز نرخ رشد ناپایداری توسط رابطهٔ زیر تعیین می‌گردد (برای علامت منفی)

$$\Gamma_{f=-1}=\sqrt{4\kappa W_0(Q_2-Q_1)-4\kappa^2-2\lambda^2} \qquad 29$$

همان‌طور که واضح است برخلاف حالت $f=1$ ، اکنون نرخ رشد به‌طول موج اختلال نیز بستگی دارد. رفتار نرخ رشد برای حالت $f=1$ برحسب عدد موج و برای چگالی‌های مختلف در شکل2 نشان داده شده است. واضح است که اولاً ناپایداری فقط به‌ازای مقادیری از عدد موج روی می‌دهد که شرط گفته شده در بالا را ارضا کند و ثانیاً با دور شدن از چگالی بحرانی (کاهش چگالی) نرخ رشد افزایش می‌یابد. همچنین پنجرهٔ ناپایداری برای پلاسمای رقیق‌تر بزرگتر است.



شکل2. تغییرات نرخ رشد برای $f=-1$ ، $W_0=0.8$ و $\kappa=0.1$.

اگرچه در بالا ناپایداری مدولاسیونی برای حالت خاص $f=\pm1$ بررسی شد ولی شمای کلی برای $f\neq\pm1$ تغییر آنچنانی ندارد. با این حال تأثیر پارامترهای دیگر را می‌توان برای نقاط خارج از لبهٔ غلاف $|f|\neq1$ مورد مطالعه قرار داد. در این حالت جواب‌های معادله پاشندگی25 پیچیده‌تر است چرا که $\alpha_1\neq0$ می‌باشد. در حالت کلی چهار جواب معادلهٔ25 را می‌توان به‌شکل زیر نوشت [26]

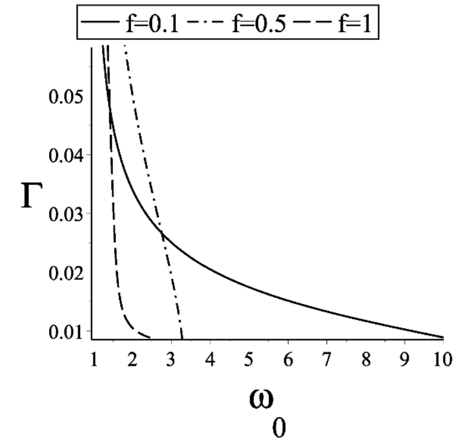
$$S_{1,2}=\frac{\sqrt{D-\alpha_2}\pm\sqrt{-\alpha_2-D-2\sqrt{D^2-4\alpha_0}}}{2} \qquad 30$$

$$S_{3,4}=\frac{-\sqrt{D-\alpha_2}\pm\sqrt{-\alpha_2-D+2\sqrt{D^2-4\alpha_0}}}{2} \qquad 31$$

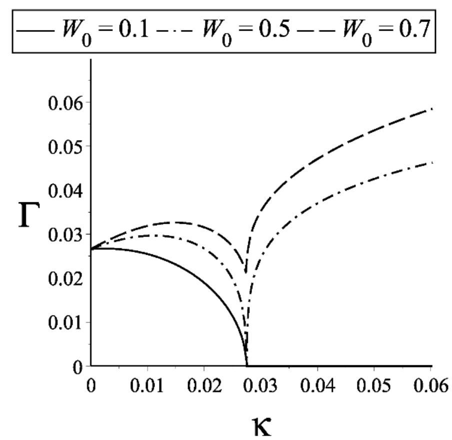
که در آن D جواب حقیقی معادله زیر است

$$D^3-\alpha_2D^2-4\alpha_0D+4\alpha_2\alpha_0-\alpha_1^2=0 \qquad 32$$

به‌دلیل تعداد زیاد پارامترها نمی‌توان به‌صورت تحلیلی شرایط وقوع ناپایداری و نرخ رشد را تعیین کرد، به‌همین دلیل از روش‌های عددی برای بررسی موضوع کمک خواهیم گرفت. ابتدا حالت $f>0$ (پاشندگی عادی) را در نظر می‌گیریم. نتایج عددی نشان می‌دهند که در این حالت وابستگی نرخ رشد به f و $1/f$ یکسان است. لذا بررسی‌های خود را محدود به‌مقادیری از f می‌نماییم که کوچکتر از یک می‌باشد. رفتار نرخ رشد نسبت به‌تغییرات λ برای $0<f<1$ شبیه آن چیزی است که برای $f=1$ بررسی شد لذا از تکرار آن پرهیز می‌شود. شکل3 تغییرات نرخ رشد برحسب فرکانس بی‌بعد ω_0 را برای مقادیر مختلف f نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با دور شدن از چگالی بحرانی نرخ رشد شدیداً کاهش پیدا می‌کند.

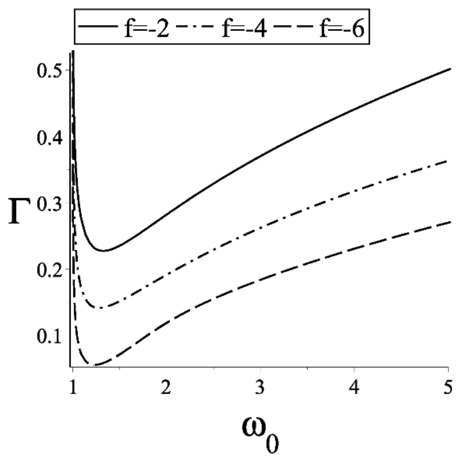


شکل3. تغییرات نرخ رشد برای برحسب فرکانس برای مقادیر مختلف $f>0$ و برای $W_0=0.8$، $\kappa=0.1$ و $\lambda=10$.



شکل4. تغییرات نرخ رشد برای برحسب ضریب جفت شدگی برای مقادیر مختلف توان و برای $f=0.5$ ، $\omega_0=1.5$ ، $\lambda=10$.

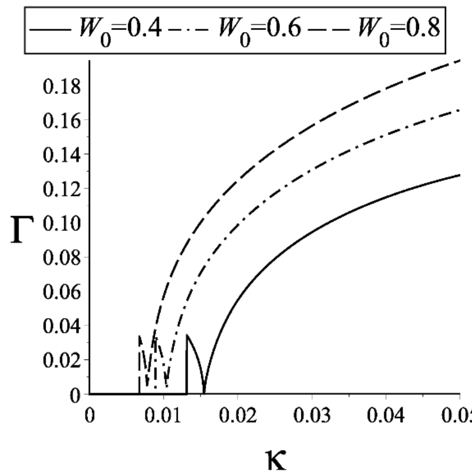
همچنین بازه‌ای از چگالی که در آن احتمال وقوع ناپایداری وجود دارد با افزایش f کاهش می‌یابد. بدین معنی که وقتی توزیع توان بین دو موج پیشرونده و پسرونده متفاوت‌تر باشد آنگاه پنجرهٔ ناپایداری بزرگتر است. همچنین تغییرات نرخ رشد برحسب ضریب جفت شدگی و برای مقادیر مختلف توان W_0 در شکل4 به‌نمایش گذاشته شده است. برای توان‌های پایین با افزایش ضریب جفت‌شدگی یعنی با عمیق‌تر شدن مدولاسیون چگالی، نرخ رشد کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد. ولی برای توان‌های بالاتر نرخ رشد افزایش یافته به یک مقدار بیشینه رسیده و سپس کاهش یافته و دوباره رو به افزایش می‌گذارد. بنابراین در توان‌های بالاتر عمق مشخصی برای مدولاسیون چگالی وجود دارد که به‌ازای آن نرخ رشد کمینهٔ مقدار خود را دارا است.



شکل5. تغییرات نرخ رشد برای برحسب فرکانس برای مقادیر مختلف $f<0$ و برای $W_0=0.8$، $\kappa=0.1$ و $\lambda=0.25$.

مانند حالت $f=-1$ ، وقتی $f<0$ است ناپایداری زمانی به‌وقوع می‌پیوندد که عدد موج حول یک همسایگی $\lambda=0$ قرار گیرد (رجوع شود به‌شکل2). این همسایگی با افزایش ω_0، W_0 و κ افزایش می‌یابد. باز هم نرخ رشد برای f و $1/f$ یکسان می‌باشد. اگر خود را محدود به $f<-1$ کنیم خواهیم دید ناپایداری برای تمام مقادیر ω_0 مقدور است. در نزدیکی‌های چگالی بحرانی نرخ رشد بزرگ بوده با کاهش چگالی (یا افزایش فرکانس) به یک نقطه کمینه رسیده و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین در پلاسمای با

چگالی زمینه نزدیک به چگالی بحرانی و یا در پلاسمای با چگالی پایین نرخ رشد بالا خواهد بود. در این حالت نیز هرچقدر توزیع توان بین موج پیشرونده و پسرونده ناعادلانه‌تر باشد آنگاه نرخ رشد بالاتر است.



شکل6. تغییرات نرخ رشد برای برحسب ضریب جفت شدگی برای مقادیر مختلف توان و برای $f=-2$ ، $\omega_0=1.2$ ، $\lambda=0.1$.

در شکل6 نیز تغییرات نرخ رشد برحسب ضریب جفت شدگی برای مقادیر مختلف توان به‌نمایش گذاشته شده است. مشاهده می‌شود که یک ضریب جفت‌شدگی آستانه وجود دارد که ناپایداری برای مقادیر بزرگتر از آن اتفاق می‌افتد. با افزایش توان مقدار این آستانه کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که واضح است مانند حالت $f>0$ نرخ رشد ابتدا با افزایش κ کاهش یافته سپس به‌یک مقدار کمینه رسیده و دوباره رو به‌افزایش می‌گذارد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ناپایداری مدولاسیونی امواج تخت غیرخطی در توری براگ پلاسمایی مورد تحلیل قرار گرفت. با شروع از معادلات ماکسول و استفاده از مدل سیالی برای پلاسمای سرد نامغناطیده که چگالی زمینهٔ آن توسط دو باریکهٔ لیزری دچار مدولاسیونی به‌شکل یک توری براگ شده است، نشان داده شد که چنانچه شرط تطابق فاز یا حداقل شبه‌تطابق فاز وجود داشته باشد آنگاه تحولات امواج پیش‌رونده و پس‌رونده به‌وسیلهٔ یک جفت معادلهٔ غیرخطی حاکمیت می‌شود. برای مطالعهٔ ناپایداری مدولاسیونی جوابی به‌شکل امواج تخت با دامنهٔ غیرخطی و ثابت برای این معادلات در نظر گرفته شد. سپس اختلال کوچکی بر این جواب‌ها سوار کرده و دینامیک آن مورد بررسی قرار گرفت. شرط سازگاری منجر به یک معادلهٔ جبری درجهٔ چهار برای فرکانس اختلالات گردید که با استفاده از آن می‌توان شرایط وقوع ناپایداری و همچنین نرخ رشد (بهره) ناپایداری را مورد تحلیل قرار داد. مباحث ذکر شده هم برای حالت خاص $f=\pm1$ (f نسبت توزیع توان بین موج پیش‌رونده و پس‌رونده را بیان می‌کند) که در آن سیستم بیشترین میزان پاشندگی را از خود نشان می‌دهد و هم برای حالت‌هایی که $|f|\neq-1$ است جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است.

برای حالتی که $f=1$ (بیشینهٔ پاشندگی عادی) است ناپایداری فقط برای چگالی زمینهٔ نزدیک به‌چگالی بحرانی و عدد موج اختلال دور از همسایگی صفر می‌تواند رخ دهد. در این حالت نرخ رشد برای عدد موج بزرگ مستقل از آن بوده و با دور شدن از چگالی زمینهٔ پلاسما از چگالی کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که نتایج فوق برای حالت $f=-1$ (بیشینه پاشندگی غیرعادی) عکس می‌باشد یعنی ناپایداری فقط برای مقادیری از عدد موج اختلال اتفاق می‌افتد که در همسایگی صفر قرار می‌گیرند. به‌عبارت دیگر برای طول موج‌های کوچک ناپایداری رخ نمی‌دهد. همچنین نرخ رشد با دور شدن چگالی پلاسما از چگالی بحرانی

افزایش می‌یابد. رفتار نرخ رشد و پنجره ناپایداری نسبت به‌طول موج اختلال برای حالتی که $|f|\neq 1$ کمابیش مانند $f=\pm 1$ است.

نکتهٔ قابل ذکر برای حالت $|f|\neq 1$ این است که رفتار نرخ رشد و پنجرهٔ ناپایداری برای حالت‌های f و $1/f$ یکسان است. وقتی $f>0$ باشد (پاشندگی عادی) با افزایش آن پنجره ناپایداری بزرگتر می‌شود بدین معنی که برای مقادیر متنوع‌تری از چگالی زمینهٔ پلاسما (یا فرکانس موج) ناپایداری قابل حصول است. با افزایش ضریب جفت‌شدگی نرخ رشد ابتدا افزایش یافته سپس کاهش و به‌یک مقدار کمینه رسیده و بعد از آن دوباره رو به‌افزایش می‌گذارد. همچنین با افزایش توان امواج تخت، نرخ رشد نیز افزایش می‌یابد. اکنون اگر $f<0$ باشد (پاشندگی غیرعادی) آنگاه نرخ رشد برای پلاسمای رقیق‌تر و یا برای پلاسمای با چگالی نزدیک به‌چگالی بحرانی بزرگتر است. در این حالت افزایش قدر مطلق f میزان نرخ رشد را کاهش می‌دهد که برخلاف حالت قبل است. در این وضعیت ناپایداری نه به‌ازای تمام مقادیر ضریب جفت‌شدگی بلکه به‌ازای مقادیری از آن رخ می‌دهد که بزرگتر از یک مقدار آستانه باشد. این آستانه با افزایش توان کاهش یافته ولی نرخ رشد افزایش می‌یابد.

همان‌طور که از روابط مربوطه می‌توان فهمید ضرایب غیرخطی در توری براگ پلاسمایی همیشه مثبت است (رجوع شود به‌رابطهٔ12). از طرف دیگر می‌دانیم که اگر ناپایداری مدولاسیونی به‌وسیلهٔ معادلهٔ شرودینگر تفسیر شود آنگاه شرط وقوع ناپایداری این است که ضرایب پاشندگی و غیرخطیت هم علامت باشند. یعنی اگر ضریب غیرخطیت مثبت باشد آنگاه ناپایداری فقط برای پاشندگی غیرعادی ممکن است. در حالی‌که برای توری براگ پلاسمایی ناپایداری برای پاشندگی عادی نیز اتفاق می‌افتد.

بررسی ناپایداری مدولاسیونی در توری براگ پلاسمایی و همچنین در توری فیبر نمایانگر تفاوت‌ها و تشابهاتی است. بدین معنی که در هر دو محیط، برخلاف محیط همگن، امکان وقوع ناپایداری مدولاسیونی هم در رژیم پاشندگی عادی و هم غیرعادی وجود دارد. همچنین در هر دو محیط شرط توان آستانه برای ایجاد ناپایداری در رژیم عادی متصور است در حالی‌که برای رژیم غیرعادی این شرط لازم نیست. اگرچه شمای کلی تحلیل و نتایج حاصله برای دو محیط شبیه به‌نظر می‌رسد ولی مقایسهٔ پنجره ناپایداری و نرخ رشد در دو محیط نشانگر تفاوت‌هایی نیز می‌باشد. تغییر محیط از فیبر به‌پلاسما باعث نمودار شدن پارامترهایی در نرخ رشد و پنجرهٔ ناپایداری می‌شود که این پارامترها عموماً وابسته به‌چگالی پلاسما می‌باشند (به‌عنوان مثال روابط27 و 28 مقاله حاضر با روابط29 و 30 مرجع [22] مقایسه شود). این وابستگی یکی از مزایای محیط پلاسما است چرا که بدون صرف هزینه می‌توان به‌راحتی چگالی پلاسما را (مثلاً با تغییر فشار) تغییر داد در حالی‌که که برای محیط فیبر این امر مستلزم ساخت دوباره فیبر می‌باشد که هزینه و زمان‌بر است. ضمن اینکه محیط پلاسما برای هر شدت موجی دارای دوام است در حالی‌که توری فیبر در شدت‌های بالای پالس لیزری دچار آسیب شده و کارایی خود را از دست می‌دهد. اعمال میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند تعداد پارامترهای پلاسما را افزایش داده و در نتیجه کنترل‌پذیری پلاسما را افزایش دهد که خود می‌تواند در یک تحقیق جداگانه بررسی شود. در نهایت باید متذکر شد که پلاسمای مورد بحث در این مقاله می‌تواند از برهم‌کنش پالس پرتوان لیزری با محیط‌های گازی یا جامد به‌وجود بیاید.

مرجع‌ها

[1] D. Strickland, G. Mourou, Compression of amplified chirped optical pulse, *Optics Communications* **56** (1985) 219-221.

[2] G. Mourou, T. Tajima, S.V. Bulanov, Optics in relativistic regime, *Review of Modern Physics* **78** (2006) 309-371.

[3] An-Chun Tien, S. Backus, et. al., Short-pulse laser damage in transparent materials as a function of pulse durations, *Physical Review Letters* **82** (1999) 3883-3886.

[4] S. Suckewer, Ultra-intense laser: Beyound a pettawat, *Nature Physics* **7** (2011) 11-12.

[5] G. Mourou, J. Fisch, et. al., Exawat-Zettawat pulse generation and applications, *Optics Communications* **285** (2012) 720-724.

[6] C. Thaury, F. Quere, et. al., Plasma mirros for ultrahigh-intensity optics, *Nature Physics* **3** (2007) 424-429.

[7] P. Michel, L. Divol, D. Turnball, J.D. Moody, Dynamic control of the polarization of intense laser beams via optical wave mixing in plasmas, *Physical Review Letters* **113** (2014) 205001.

[8] Lu-Le Yu, Yao Zhao, et. al., Plasma optical modulator for intense lasers, *Nature Communications* **7** (2016) 11893.

[9] H.C. Wu, Z.M. Sheng, J. Zhang, Chirped pulse compression in nonuniform plasma gratings, *Applied Physics Letters* **87** (2005) 201502.

[10] H.C. Wu, Z.M. Sheng, Q.J. Zhang, J. Zhang, Manipulating ultrashort intense laser pulses by plasma Bragg gratings, *Physics of Plasmas* **12** (2005) 113103.

[11] S.X. Luan, Q.J. Zhang, Z.M. Sheng, The formation of relativistic electromagnetic solitons in plasma Bragg gratings induced by two counter-propagating laser pulses, *Applied Physics B* **93** (2008) 793-799.

[12] M. Botton, A. Ron, Efficiency enhancement of a plasma filled backward wave oscillator by self-induced distributed feedback, *Physical Review Letters* **66** (1991) 2468-2471.

[13] Z.M. Sheng, J. Zhang, D. Umstadter, Plasma density gratings induced by intersecting laser pulses in underdense plasmas, *Applied Physics B* 77 (2003) 673-680.

[14] H.Y. Chen, Y. Yin, et. al., Moving electron density gratings induced in the beat-wave field of two counter-propagating laser pulses, *Physics of Plasmas* **17** (2010) 083112.

[15] M. Durand, A. Jarnac, et. al., Dynamics of plasma gratings in atomic and molecular gases, *Physical Review E* **86** (2012) 036405.

[16] G. Lehmann, K.H. Spatschek, Transient Plasma Photonic Crystals for High-Power Lasers, *Physical Review Letters* **116** (2016) 225002.

[17] G.P. Agrawal, *Applications of nonlinear fiber optics 2nd Edition*, Academic Press, New York, (2008).

[18] V.E. Zakharov, L.A. Ostrovsky, Modulational instability: the beginning, *Physica D* **238** (2009) 540-548.

[19] T.B. Benjamin, K. Hasselmann, Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, *Proceedings of the Royal Society A* **299** (1967) 59-75.

[20] L.A. Ostrovsky, Propagation of wave packets and space-time self-focusing in nonlinear medium, *Soviet Physics JETP* **24** (1967) 797-800.

[21] A. Hasegawa, Observation of self-trapping instability of a plasma cyclotron wave in a computer experiment, *Physical Review Letters* **24** (1970) 1165-1168.

[22] C.M. De Sterke, Theory of modulational instability in fiber Bragg

gratings, *Journal of the Optica Society of America B* **15** (1998) 2660-2667.

[23] A. Yariv, P. Yeh, *Photonics 6th Edition*, Oxford Univerity Press, Oxford, (2007).

[24] J. Borhanian, Nonlinear birefringence in plasmas: Polarization dynamics, vector modulational instability and vector solitons, *Physics of Plasmas* **21** (2014) 062312.

[25] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics 4th Edition*, Academic Press, New York, (2007).

[26] M.R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Mathematical handbook of formulas and table 3rd edition*, Mc Graw-Hill, New York (2009).