

## مطالعه ترازهای انرژی تک‌ذره‌ای با استفاده از پتانسیل WS و حل تقریبی آن در پایه‌های نوسانگر هارمونیک

نعیمه رحیمیان، سیدعلیرضا علوی\*، وحید دهقانی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

دریافت: 1397/09/05 ویرایش نهائی: 1397/12/01 پذیرش: 1397/12/25

### چکیده

در این تحقیق، روش حل تقریبی معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل میدان میانگین وودز-ساکسون در پایه‌های نوسانگر هماهنگ ارائه شده است. ویژه‌مقادیر انرژی و ویژه‌توابع مربوط به ترازهای انرژی مقید تک‌ذره‌ای نوترونی و پروتونی برای تعدادی از هسته‌های سبک نیمه‌سنگین و سنگین تعیین شد. نتایج به‌دست آمده با نتایج حل عددی معادله شرودینگر مقایسه شد و همخوانی خوبی بین هر دو روش مشاهده شد. حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر برای پتانسیل وودز-ساکسون برای تک ذره نوترونی حالت S با استفاده از روش نیکوفورو-یوواروف و با اعمال شرایط مرزی ارائه شده است. ترازهای انرژی حالت S برای تعدادی از هسته‌های سبک نیمه‌سنگین و سنگین محاسبه شد. نتایج به‌دست آمده نشان داد مقدار انرژی ترازها شدیداً به پارامترهای تطبیق پذیر پتانسیل وودز-ساکسون و روش محاسبه وابسته است. به‌طوری‌که با افزایش عدد اتمی و عدد کوآنتومی اصلی اختلاف بین داده‌های محاسبه شده با استفاده از روش عددی و روش تحلیلی به‌ازای مجموعه پارامترهای تطبیق‌پذیر مختلف، بیشتر می‌شود.

**کلیدواژگان:** تراز انرژی، پتانسیل هسته‌ای، نوسانگر هارمونیک، پتانسیل وودز-ساکسون

### مقدمه

میدان میانگین پدیده شناختی هستند [1]. حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر با توجه به کاربردهای گسترده تابع موج و تراز انرژی در مطالعه ساختار هسته و واکنش‌های هسته‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است. ترازهای انرژی و توابع برای پتانسیل نوسانگر هارمونیک به‌صورت تحلیلی و دقیق به‌دست می‌آید که کاربردهای گسترده در فیزیک اتمی مولکولی و فیزیک هسته‌ای و ذرات بنیادی دارد. تاکنون حل تحلیلی و دقیق برای ترازهای انرژی و توابع موج برای پتانسیل WS با در نظر گرفتن پتانسیل اسپین‌مدار ارائه نشده است و با استفاده از روش‌های عددی تعیین می‌شود.

حل معادله شرودینگر و تعیین توابع موج و ترازهای انرژی تک ذره‌ای اهمیت بسیار زیادی در مباحث مختلف فیزیک هسته‌ای دارد. معادله شرودینگر با توجه به شکل انرژی پتانسیل می‌تواند به روش تحلیلی، تقریبی و یا عددی حل شود. مدل لایه‌ای هسته‌ای، یکی از مدل‌های هسته‌ای است که براساس حل معادله شرودینگر و تعیین توابع موج و ترازهای انرژی تک ذره‌ای به‌ازای پتانسیل هسته‌ای بنا شده است. پتانسیل‌های چاه مربعی، نوسانگر هارمونیک و وودز-ساکسون (WS) چند نمونه از پتانسیل‌های هسته‌ای

\* نویسنده مسئول: s.a.alavi@phys.usb.ac.ir

برای محاسبه ماتریس رابطه 5 ابتدا باید مقدار  $h_{lj}(r)g_{vl}(r)$  را محاسبه کرد. با در نظر گرفتن هسته‌ها به صورت کروی و داشتن تقارن کروی، هامیلتونی به صورت رابطه زیر معرفی می‌شود [3].

$$\begin{aligned} h &= \frac{-\hbar^2}{2m_N} \nabla^2 + v(r) + v_{LS}(r) L \cdot s \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m_N} \left( \nabla_r^2 - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2} \right) + v_{WS}(r) \\ &\quad + v_C(r) + v_{LS}(r) L \cdot S \end{aligned} \quad 6$$

در نتیجه تأثیر هامیلتونی روی  $\left| nl \frac{1}{2} j m \right\rangle$  داریم:

$$\begin{aligned} h \left| nl \frac{1}{2} j m \right\rangle &= \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m_N} \left[ \nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + v_{WS}(r) + v_C(r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{4} ] \hbar^2 v_{LS}(r) \right\} \left| nl \frac{1}{2} j m \right\rangle \end{aligned} \quad 7$$

با توجه به معادله شرودینگر به‌ازای پتانسیل نوسانگر هارمونیک داریم:

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m_N} \left[ \nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_{nl}(r) \\ + (-V_1 + \frac{1}{2} m_N \omega^2 r^2) g_{nl}(r) = \varepsilon_{nl}(r) g_{nl}(r) \end{aligned} \quad 8$$

که در آن ویژه‌توابع نوسانگر هارمونیک و  $\varepsilon_{nl}(r)$  مقادیر انرژی هستند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nl} &= -V_1 + (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega = \\ &\quad -V_1 + \delta_{n'n} (2n + l + \frac{3}{2}) \hbar \omega \end{aligned} \quad 9$$

$$N = 2n + 1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

به‌منظور استفاده از ترازهای انرژی و توابع موج به‌صورت تحلیلی می‌توان به‌روش حل تحلیلی و تقریبی پتانسیل  $WS$  در پایه‌های نوسانگر هارمونیک اشاره کرد. در حالت خاص  $S$  ترازهای انرژی و توابع موج تک‌ذره‌ای نوترونی را می‌توان برای به‌صورت تحلیلی و دقیق با استفاده از روش نیکیفوروف-یوواروف  $NU$  (Nikiforov-Uvarov)، اعمال شرایط مرزی و روش حل نموداری تعیین کرد [2].

### تئوری

با استفاده از روش تقریبی، ویژه‌توابع (تابع موج) را می‌توان به‌صورت تحلیلی و ترکیب خطی ویژه‌توابع نوسانگر هارمونیک ( $g_{nl}$ ) به‌دست آورد.

$$h_{lj}(r) f_{nlj}(r) = \varepsilon_{nlj} f_{nlj}(r) \quad 1$$

رابطه تعاملی بین توابع موج مطابق رابطه زیر برقرار است.

$$\int_0^\infty r^2 dr f_{nlj}(r) f'_{n'l'j'}(r) = \delta_{nn'} \quad 2$$

تابع  $f$  که در رابطه زیر نوشته شده است به‌عنوان تابع موج، ترکیب خطی از ویژه‌توابع هارمونیک است که ضرایب آن شرط بهنجارش را دارند.

$$f_{nlj}(r) = \sum_v A_v^{(nlj)} g_{vl}(r) \quad 3$$

$$\sum_v [A_v^{(nlj)}]^2 = 1 \quad 4$$

برای تعیین ویژه‌مقادیر باید ماتریس را مطابق رابطه زیر تشکیل داد و المان‌های ماتریس را محاسبه نمود.

$$\int_0^\infty r^2 dr g_{vl}(r) h_{lj}(r) g_{v'l'}(r) \equiv \langle v' | h_{lj}(r) | v \rangle \quad 5$$

با استفاده از رابطه 9 و مقادیر زیر [4]:  
 قسمت) و مساوی تقسیم کرده و در این نقاط تابع موج را به دست آوریم.

مشتق اول و مشتق دوم در نقاط  $m$  و  $m+1$  طبق روابط زیر تعریف می‌کنیم.

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\psi_{m+1} - \psi_m}{x_{m+1} - x_m}$$

$$\lim_{x_{m+1} \rightarrow x_m} \quad 13$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d\psi}{dx} \right) = \frac{d\psi(m+1) - d\psi(m)}{x_{m+1} - x_m}$$

$$= \frac{\psi_{m+2} - 2\psi_{m+1} + \psi_m}{x_{m+1} - x_m} \quad 14$$

و با جای‌گذاری آنها در معادله شرودینگر داریم:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\psi_{m+1} - 2\psi_m + \psi_{m-1}}{\Delta^2} + V_m \psi_m = E \psi_m \quad 15$$

که در این رابطه  $V(x)$  مجموع پتانسیل‌های هسته‌ای، کولنی و مرکز گرا است و  $\Delta = x_{m+1} - x_m$  می‌باشد.

حال ماتریس رابطه 15 را تشکیل داده و با قطری کردن آن توابع موج متناظر با انرژی‌های متفاوت را به دست آمده است [5].

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{m\Delta^2} + V_1 & \frac{-\hbar^2}{2m\Delta^2} & 0 & \dots \\ \frac{-\hbar^2}{2m\Delta^2} & \frac{\hbar^2}{m\Delta^2} + V_2 & \frac{-\hbar^2}{2m\Delta^2} & \dots \\ 0 & \frac{-\hbar^2}{2m\Delta^2} & \frac{\hbar^2}{m\Delta^2} + V_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad 16$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{m_N b^2}$$

$$\omega^2 = \frac{\hbar^2}{m_N^2 b^4} \quad 10$$

معادله 8 به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_N} \left[ \nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_{nl}(r) =$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_n} \left[ \delta_{m'} \frac{4n+2l+3}{b^2} - \frac{r^2}{b^4} \right] g_{nl}(r) \quad 11$$

با توجه به رابطه 11 آرایه‌های ماتریس  $h$  در پایه‌های نوسانگر هارمونیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\langle v' | h_{ij}(r) | v \rangle =$$

$$\int_0^\infty r^2 dr g_{v'l}(r) g_{vl}(r) \left[ \frac{\hbar^2}{2m_n} \left( \delta_{v'v} \frac{4n+2l+3}{b^2} - \frac{r^2}{b^4} \right) \right.$$

$$\left. + v_{WS}(r) + v_C(r) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \hbar^2 v_{LS}(r) \quad 12$$

که در آن  $v_{WS}$  پتانسیل وودز-ساکسون،  $v_C$  پتانسیل کولنی و جمله  $v_{LS}$  مربوط به پتانسیل اسپین-مدار می‌باشد و با قطری کردن ماتریس می‌توان ترازهای انرژی و ضرایب تابع موج با پتانسیل وودز-ساکسون را به دست آورد.

برای حل معادله شرودینگر به روش حل عددی باید بازه مورد نظر را به بازه‌های خیلی کوچکتر (مثلاً 100

پتانسیل وودز-ساکسون به فرم ساده  $V_{WS} = -V_0 y$  تبدیل می‌شود و با جای‌گذاری آن در رابطه 19 می‌توان این رابطه را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y(1-y)R'' + (1-2y)R' + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 y}{y(1-y)} R = 0$$

$$-\varepsilon^2 = \frac{2m\dot{a}E}{\hbar^2}; \quad \beta^2 = \frac{2m\dot{a}V_0}{\hbar^2} \quad 21$$

برای حل معادله 21 باید آن را به شکل معادله دیفرانسیلی شناخته شده‌ای تبدیل کرد. روش NU یک روش شناخته شده برای حل معادله دیفرانسیل است. در این روش با استفاده از جداسازی متغیرها، معادله دیفرانسیل را به شکل معادلات تعمیم یافته خاص درمی‌آید. از این روش در منابع مختلفی استفاده شده است. در منابع [6-10] از این روش برای تعیین تابع موج و ویژه مقدار مربوط به آن به ترتیب برای پتانسیل‌های مختلف استفاده شده است. برای استفاده از این روش باید معادله دیفرانسیلی را به شکل زیر تبدیل کرد [11].

$$\psi''(y) + \frac{\tilde{\tau}(y)}{\sigma(y)} \psi'(y) + \frac{\tilde{\sigma}(y)}{\sigma(y)^2} \psi(y) = 0 \quad 22$$

با انتخاب  $R(y)$  به صورت رابطه زیر:

$$R(y) = y^q (1-y)^u f(y) \quad 23$$

و محاسبه  $R'$  و  $R''$  و جایگزینی در رابطه 21 و جداسازی ضرایب  $f$ ،  $f'$  و  $f''$  به رابطه‌های زیر می‌رسیم:

تابع موج و تراز انرژی تک نوکلئونی با استفاده از معادله شرودینگر برای یک پتانسیل میدان میانگین هسته‌ای مناسب حاصل شود. معادله شرودینگر شعاعی تک نوکلئونی برای پتانسیل مرکزی به این صورت است:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \left( \nabla_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad 17$$

با معرفی تابع موج شعاعی کاهش یافته به صورت  $R(r) = r\psi(r)$  (تابع موج  $\psi(r)$  با استفاده از رابطه  $\int |\psi(r)|^2 d^3r = 1$  نرمالیزه می‌شود) معادله 17 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R(r) = 0 \quad 18$$

در رابطه 18 پتانسیل تک ذره‌ای نوترون به صورت مجموع پتانسیل هسته‌ای و پتانسیل اسپین-مدار می‌باشد و با در نظر گرفتن پتانسیل هسته‌ای وودز-ساکسون برای حالت  $S$  ( $l=0$ ) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R_0)/a}} \right] = 0 \quad 19$$

$V_0$ ،  $R_0$  و  $a$  به ترتیب عمق چاه پتانسیل، شعاع هسته و پارامتر پخش شدگی سطحی است. برای حل این معادله باید از متغیرهای جدید استفاده کرد. با انتخاب متغیر جدید به صورت زیر

$$y = \frac{1}{1 + e^{(r-R_0)/a}} \quad 20$$

$$\frac{\lambda R_0}{a} - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \tan^{-1} \frac{2\lambda}{n} - \tan^{-1} \frac{\lambda}{n+\varepsilon} - \tan^{-1} \frac{\lambda}{n+\varepsilon+1} \right) \quad 29$$

$$+ \tan^{-1} \frac{\lambda}{\varepsilon} + \tan^{-1} \frac{\lambda}{\varepsilon+1} = n\pi \quad 30$$

$$\Phi(\xi) = k_0 R_0 \xi + \tan^{-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)+\zeta} + \left(\frac{1+\eta'}{k_0 a}\right)} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{2k_0 a}{n} \xi \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)+\zeta} + \left(\frac{n-\eta'}{k_0 a}\right)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)+\zeta} + \left(\frac{n+\eta'+1}{k_0 a}\right)} \right) \right]$$

$$\text{که در آن } \xi = \frac{k}{k_0} = \sqrt{1 - \frac{|E|}{V_0}} \text{ است.}$$

بنابراین شرایط ویژه مقادیر انرژی تابعی از  $\xi$  به دست می‌آید.

$$-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \tan \Phi(\xi) \quad 31$$

مقادیر  $\xi$  در رابطه 31 را می‌توان به آسانی از روش حل نموداری به دست آورد. بنابراین ویژه مقادیر انرژی تک ذره نوترون با داشتن  $\xi$  و جای‌گذاری آن در رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|E| = V_0(1-\xi^2) \quad 32$$

پارامتر  $\xi$  برای هسته‌های مختلف متفاوت است. بنابراین همان‌طور که انتظار داریم ویژه مقادیر انرژی تک

24

$$y(1-y)f'' + [(2\nu+1) - y(2\nu+2\mu+2)]f' + [\nu(\nu-1)\frac{1-y}{y} + \mu(\mu-1)\frac{y}{1-y} - 2\mu\nu + \nu\frac{1-2y}{y} - \mu\frac{1-2y}{1-y} + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 y - \gamma^2 y^2}{y(1-y)}]f = 0$$

با ساده سازی ضرایب  $f$  داریم:

$$y(1-y)f'' + [(2\nu+1) - y(2\nu+2\mu+2)]f' - [(v+\mu)(v+\mu+1) - \gamma^2]f = 0$$

5

جواب معادله 25 یک معادله دیفرانسیلی فوق هندسی است که به صورت زیر می‌باشد:

$$f = F(a, b, c; y) \quad 26$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a &= (\mu + \vartheta + \frac{1}{2}) - \eta \\ b &= (\mu + \vartheta + \frac{1}{2}) + \eta \\ c &= 2\vartheta + 1 \end{aligned} \quad 27$$

و  $\eta = \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{4}}$  است. تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R(y) = N y^\varepsilon (1-y)^\mu {}_2F_1(a, b, c; y) \quad 28$$

با اعمال شرایط مرزی روابط زیر به دست می‌آید. [۲۰، ۲۱]

به روش عددی) و روش تقریبی (به دست آمده با استفاده از قطری کردن ماتریس هامیلتونی در پایه‌های نوسانگر هارمونیک) در جدول 1 و 2 در واحد  $MeV$  ارائه شده است. در محاسبات از پارامترهای  $R_0 = 1.27A^{1/3}$  و  $V_0 = 51 - 33(N - Z) / A$  در پتانسیل وودز-ساکسون استفاده شده است. با مقایسه اعداد جداول 1 و 2 مشاهده می‌کنیم نتایج حاصل از سه روش حل تحلیلی، حل عددی و حل تقریبی برای تراز نوترونی و نتایج حاصل از حل عددی و حل تقریبی برای تراز پروتونی هم‌خوانی خوبی با یکدیگر دارند اگرچه در ترازهای بالاتر اختلاف بین نتایج بیشتر می‌شود.

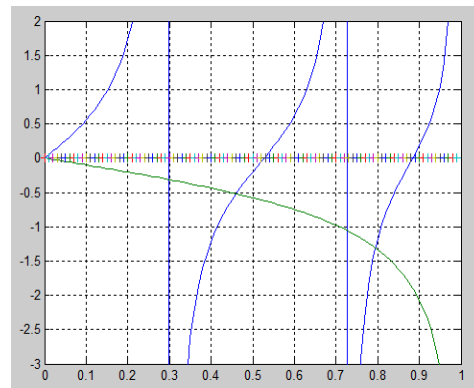
به منظور تعیین ترازهای انرژی برای حالت‌های مختلف با  $l = 0$  و  $l \neq 0$  از روش حل تقریبی از رابطه 12 و داده‌های ورودی  $V_0 = 51 - 33 \frac{N - Z}{A} MeV$ ،  $a = 0.67 fm$  و  $r_0 = 1.27 fm$  استفاده می‌شود. جداول 3 و 4 انرژی ترازهای وودز-ساکسون و دامنه‌ها را به ترتیب برای تک ذره پروتونی و نوترونی  $^{51}Fe$  ارائه می‌دهد.

همان‌طور که از این جداول مشخص است جمله اصلی مربوط به زمانی است که  $v = n$  می‌باشد، یعنی این جمله وزن اصلی را دارد و مقدار آن در مقایسه با بقیه جملات ( $v \neq n$ ) بزرگتر است. جمله انرژی نیز همان‌گونه که مشخص است هرچه به سمت ترازهای بالاتر می‌رود افزایش می‌یابد یعنی ترازهای پایین‌تر مقیدتر می‌باشند. با استفاده از مقادیر به دست آمده ضرایب در جداول و با توجه به رابطه 3 تابع موج

ذره نوترون به پارامترهای پتانسیل هسته‌ای وابسته است.

## نتایج

شکل 1 نشان می‌دهد در روش حل نموداری برای هسته  $^{51}Fe$  مقادیر قابل قبول  $\xi$  در محدوده  $0 < \xi < 1$  استفاده شده است. با توجه به شکل می‌توان دید که تابع  $\tan \Phi(\xi)$  و  $-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$  در دو نقطه  $\xi = 0.46$  و  $\xi = 0.77$  متقاطع‌اند. بنابراین با استفاده از معادله 32 انرژی متناظر تک ذره نوترون برای تراز  $S$  به ترتیب  $E = -41.19 MeV$  و  $E = -20.22 MeV$  به دست می‌آید.



شکل 1. نمودار حل نموداری برای  $^{51}Fe$ . محور افقی پارامتر  $\xi$  و محور عمودی تابع  $\tan \Phi(\xi)$  و  $-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$  را نشان می‌دهد.

برای سه هسته  $^{51}Fe$ ،  $^{123}I$  و  $^{208}Pb$  هسته‌های نتایج مربوط به ترازهای انرژی تک ذره‌ای محاسبه شده با استفاده از روش تحلیلی (ارائه شده در قسمت قبل)، روش عددی (به دست آمده از حل معادله شرودینگر

پتانسیل وودز-ساکسون به صورت ترکیب خطی از توابع موج نوسانگر هارمونیک به دست آمده است.

جدول 1. ترازهای انرژی تک ذره نوترونی با استفاده از سه روش حل تقریبی، حل عددی و حل تحلیلی برای سه هسته  $^{51}\text{Fe}$ ،  $^{123}\text{I}$  و  $^{208}\text{Pb}$

Neutron	روش حل تقریبی			روش حل عددی			روش حل تحلیلی دقیق		
	$^{51}\text{Fe}$	$^{123}\text{I}$	$^{208}\text{Pb}$	$^{51}\text{Fe}$	$^{123}\text{I}$	$^{208}\text{Pb}$	$^{51}\text{Fe}$	$^{123}\text{I}$	$^{208}\text{Pb}$
$0s_{1/2}$	-41.09	-40.60	-39.95	-41.01	-40.56	-39.92	-41.19	-40.75	-40.06
$0p_{3/2}$	-32.68	-35.34	-36.11	-32.62	-35.31	-36.09			
$0p_{1/2}$	-30.60	-34.62	-35.74	-30.55	-34.59	-35.72			
$0d_{5/2}$	-23.53	-29.31	-31.59	-23.46	-29.27	-31.56			
$1s_{1/2}$	-19.66	-26.55	-29.47	-19.41	-26.37	-29.33	-20.22	-26.21	-29.72
$0d_{3/2}$	-19.11	-27.11	-30.68	-19.04	-27.55	-30.65			
$0f_{7/2}$	-13.89	-22.16	-26.49	-13.80	-22.61	-26.46			
$1p_{3/2}$	-9.62	-18.38	-23.34	-9.47	-18.71	-23.25			
$1p_{1/2}$	-7.25	-17.15	-22.61	-7.12	-17.47	-22.52			
$0f_{5/2}$	-6.77	-19.10	-24.78	-6.70	-19.50	-24.75			
$0g_{9/2}$	-3.96	-15.06	-20.90	-3.86	-15.44	-20.86			
$1d_{5/2}$	-0.86	-10.64	-16.93	-0.83	-10.93	-16.84			
$2s_{1/2}$	-0.08	-9.12	-15.16	-0.44	-8.83	-14.90		-6.27	-15.14
$0g_{7/2}$		-10.69	-18.14		-10.63	-18.10			
$1d_{3/2}$		-8.75	-15.46		-8.64	-15.37			
$0h_{1/2}$		-7.94	-14.90		-7.86	-14.84			
$1f_{7/2}$		-3.47	-10.34		-3.38	-10.25			
$2p_{3/2}$		-1.92	-8.17		-1.87	-8.04			
$0h_{9/2}$		-1.25	-10.84		-1.20	-10.80			
$2p_{1/2}$		-0.92	-7.27		-0.97	-7.13			
$1f_{5/2}$		-0.40	-8.03		-0.35	-7.95			

جدول 2. مقایسه انرژی تک‌ذره پروتونی با استفاده از دو روش حل تقریبی و حل عددی برای سه هسته  $^{51}\text{Fe}$ ،  $^{123}\text{I}$  و  $^{208}\text{Pb}$ 

proton	روش حل تقریبی			روش حل عددی		
	$^{51}\text{Fe}$	$^{123}\text{I}$	$^{208}\text{Pb}$	$^{51}\text{Fe}$	$^{123}\text{I}$	$^{208}\text{Pb}$
$0s_{1/2}$	-29.22	-33.00	-32.29	-29.16	-32.99	-32.31
$0p_{3/2}$	-21.50	-28.21	-29.02	-21.46	-28.21	-29.04
$0p_{1/2}$	-19.36	-27.30	-28.48	-19.33	-27.30	-28.50
$0d_{5/2}$	-13.02	-22.50	-24.87	-12.97	-22.48	-24.88
$1s_{1/2}$	-9.08	-19.00	-21.75	-8.87	-18.85	-21.66
$0d_{3/2}$	-8.55	-20.40	-23.62	-8.50	-20.38	-23.64
$0f_{7/2}$	-4.06	-16.07	-20.02	-3.98	-16.04	-20.02
$1p_{3/2}$	-0.11	-11.35	15.71	-0.02	-11.27	-15.66
$1p_{1/2}$		-9.90	-14.79		-9.81	-14.74
$0f_{5/2}$		-12.34	-17.76		-12.32	-17.77
$0g_{9/2}$		-9.05	-14.59		-9.01	-14.59
$1d_{5/2}$		-3.61	-9.33		-3.52	-9.28
$0g_{7/2}$		-3.33	-11.03		-3.30	-11.03
$0h_{11/2}$		-1.56	-8.67		-1.51	-8.65
$2s_{1/2}$		-1.24	-6.98		-0.98	-6.78
$1d_{3/2}$		-0.90	-7.48		-0.82	-7.44
$0h_{9/2}$			-3.51			-3.51
$1f_{7/2}$			-2.68			-2.63
$0i_{13/2}$			-2.30			-2.27



جدول 3. انرژی ترازهای وودز-ساکسون  $\varepsilon_{nlj}$  و ضرایب تابع موج وودز-ساکسون در پایه‌های نوسانگر  $A_\nu$  برای تک ذره پروتونی در  $^{51}\text{Fe}$ 

nlj	$\varepsilon_{nlj} (MeV)$	s	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$
$0s_{1/2}$	-29.22	0.9913	-0.1248	-0.0396	-0.0098	0.0051	0.0037	0.0017
$0p_{3/2}$	-21.50	0.9963	-0.0729	-0.0396	-0.0236	0.0017	0.0033	0.0035
$0p_{1/2}$	-19.36	0.9988	-0.0263	-0.0270	-0.0264	-0.0024	0.0009	0.0033
$0d_{5/2}$	-13.02	-0.9988	0.0259	0.0211	0.0363	0.0023	0.0001	-0.0050
$1s_{1/2}$	-9.08	0.1222	0.9892	-0.0638	0.0019	-0.0502	-0.0001	-0.0009
$0d_{3/2}$	-8.55	-0.9989	-0.0246	-0.0154	0.0358	0.0046	0.0058	-0.0029
$0f_{7/2}$	-4.06	-0.9985	0.0021	-0.0174	0.0501	0.0012	0.0078	-0.0062
$1p_{3/2}$	-0.11	0.0683	0.9778	-0.1406	0.0917	-0.1000	0.0258	-0.0175

جدول 4. مشابه جدول 3 برای تک ذره نوترونی در  $^{51}\text{Fe}$ 

nlj	$\varepsilon_{nlj} (MeV)$	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$
$0s_{1/2}$	-41.09	0.9963	-0.0740	-0.0423	-0.0116	0.0031	0.0035	0.0018
$0p_{3/2}$	-32.68	0.9987	-0.0160	-0.0409	-0.0238	-0.0014	0.0029	0.0034
$0p_{1/2}$	-30.60	0.9989	0.0293	-0.0267	-0.0250	-0.0052	0.0005	0.0029
$0d_{5/2}$	-23.53	0.9984	0.0386	-0.0227	-0.0330	-0.0069	-0.0002	0.0042
$1s_{1/2}$	-19.66	-0.0753	-0.9958	-0.0303	0.0078	0.0411	0.0086	0.0008
$0d_{3/2}$	-19.11	0.9951	0.0933	0.0128	-0.0278	-0.0097	-0.0050	0.0014
$0f_{7/2}$	-13.89	-0.9963	-0.0752	-0.0105	0.0390	0.0099	0.0058	-0.0038
$1p_{3/2}$	-9.62	-0.0171	-0.9966	0.0005	-0.0497	0.0627	0.0015	0.0095
$1p_{1/2}$	-7.25	-0.0274	0.9933	-0.0061	0.0881	-0.0666	0.0062	-0.0161
$0f_{5/2}$	-6.77	0.9922	0.0936	0.0754	-0.0319	-0.0012	-0.0130	0.0003
$0g_{9/2}$	-3.96	-0.9938	-0.0755	-0.0627	0.0491	0.0027	0.0156	-0.0039
$1d_{5/2}$	-0.86	-0.0354	0.9630	-0.1404	0.1732	-0.1343	0.0481	-0.0361

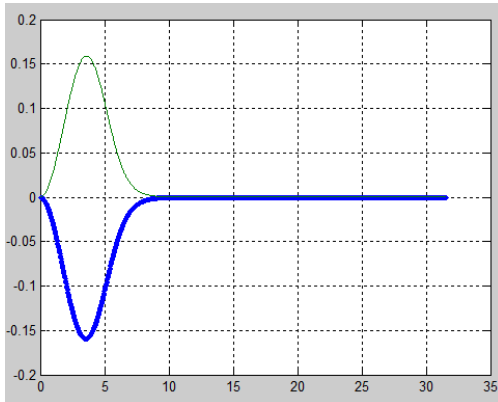
جدول 5. مقادیر ترازهای انرژی حالت‌های  $s$  به‌ازای مقادیر مختلف  $(V_0, r_0, a)$  در  $V_{ws}$ 

	Set1			Set2		
	$1s_{\frac{1}{2}}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$3s_{\frac{1}{2}}$	$1s_{\frac{1}{2}}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$3s_{\frac{1}{2}}$
	$V_0 = 49.6 \left[ 1 - \frac{N-Z}{A} \right] \text{ MeV}$ $a = 0.7 \text{ fm}$ $r_0 = 1.27 \text{ fm}$			$V_0 = 51 - 33 \frac{N-Z}{A} \text{ MeV}$ $a = 0.67 \text{ fm}$ $r_0 = 1.27 \text{ fm}$		
$^{22}\text{Na}$	-32.91	-6.70		-34.43	-6.89	
$^{38}\text{K}$	-37.20	-13.76		-38.75	-15.01	
$^{40}\text{Ca}$	-37.69	-14.60		-39.25	-15.87	
$^{51}\text{Fe}$	-39.87	-17.80		-41.34	-18.88	
$^{66}\text{Ge}$	-39.20	-20.32		-40.75	-21.87	
$^{88}\text{Kr}$	-33.42	-17.75	-1.61	-37.80	-21.02	-2.66
$^{94}\text{Ru}$	-39.37	-23.30	-5.40	-41.83	-25.61	-6.60
$^{109}\text{Sn}$	-38.93	-24.46	-6.15	-42.20	-26.60	-6.52
$^{123}\text{I}$	-36.57	-22.98	-5.77	-40.75	-26.21	-6.27
$^{136}\text{Cs}$	-34.62	-22.11	-6.16	-39.22	-26.38	-9.29
$^{142}\text{Sm}$	-38.01	-25.01	-9.0	-41.40	-28.23	-11.38
$^{160}\text{Er}$	-37.29	-25.43	-11.70	-41.03	-28.91	-12.78
$^{178}\text{Ta}$	-36.25	-25.04	-10.60	-40.45	-28.84	-13.27
$^{182}\text{Os}$	-36.91	-25.50	-10.79	-40.89	-29.70	-14.17
$^{194}\text{Au}$	-36.00	-25.36	-11.21	-40.56	-29.78	-14.70
$^{208}\text{Pb}$	-35.10	-24.55	-11.51	-40.06	-29.72	-15.14
$^{212}\text{Fr}$	-36.54	-26.54	-12.66	-41.03	-30.95	-16.23
$^{228}\text{Th}$	-35.39	-25.98	-12.80	-40.35	-30.24	-16.56
$^{238}\text{U}$	-34.66	-25.45	-11.93	-39.85	-30.50	-17.04
$^{240}\text{Pu}$	-35.12	-25.78	-12.73	-40.16	-30.58	-17.17

است که محور افقی فاصله و محور عمودی تابع موج می‌باشد.

شکل‌های 2 و 3 نمودار تابع موج با پتانسیل وودز- ساکسون با استفاده از ضرایب به‌دست آمده در پایه‌های نوسانگر هارمونیک برای تراز  $0d_{\frac{3}{2}}$  پروتونی برای  $^{51}\text{Fe}$  و تراز  $1f_{\frac{7}{2}}$  نوترونی برای  $^{123}\text{I}$  رسم شده

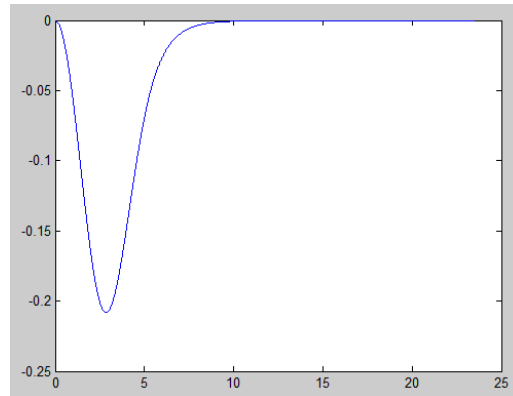
$r_0$  و  $a$  از منبع [13] و  $set(2)$  (سری دوم) از منبع [1] استفاده شده است که در هر دو منبع مقدار  $r_0$  یکسان است. مقادیر انرژی به دست آمده در واحد  $MeV$  می‌باشد.



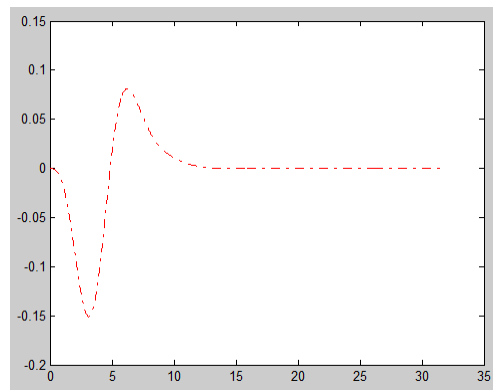
شکل 4. تابع موج بدست آمده با استفاده از حل عددی برای  $^{123}I$ . محور افقی فاصله و محور عمودی تابع موج است.

با استفاده از مقادیر به دست آمده در جدول 5 درصد اختلاف نسبی انرژی بین سری 1 و سری 2 برای حالت‌های  $1s_{1/2}$ ،  $2s_{1/2}$  و  $3s_{1/2}$  محاسبه شده است که در شکل‌های 10 تا 12 مشاهده می‌شود.

درصد تفاوت نسبی برای هسته‌های مختلف برای حالت  $0s_{1/2}$  حدود 2 تا 35 درصد، برای حالت  $1s_{1/2}$  حدود 3 تا 44 درصد و برای حالت  $2s_{1/2}$  حدود 7 تا 66 درصد می‌باشد. هرچه ترازها بالاتر می‌رود درصد اختلاف نسبی نیز افزایش می‌یابد. شکل‌های 10 و 11 روند افزایشی درصد اختلاف نسبی را با افزایش عدد اتمی نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت هسته‌های سنگین در مقایسه با هسته‌های سبک



شکل 2. تابع موج برای تراز  $0d_{3/2}$  پروتونی  $^{51}Fe$ . محور افقی فاصله و محور عمودی تابع موج است.



شکل 3. مشابه شکل 2 برای تراز  $1f_{7/2}$  نوترونی  $^{123}I$ .

نمودار تابع موج به دست آمده برای تک ذره نوترون و پروتون از روش حل عددی در شکل 4 برای هسته  $^{123}I$  رسم شده است که محور افقی فاصله و محور عمودی تابع موج می‌باشد.

در جدول 5 نتایج به دست آمده برای ترازهای انرژی حالت‌های  $s$  از روش حل تحلیلی برای مقادیر مختلف پارامترهای آزاد پتانسیل وودز-ساکسون برای تعدادی از هسته‌های سبک، نیمه‌سنگین و سنگین ارائه شده است. در این جدول  $set(1)$  (سری اول) مقادیر  $V_0$

حساسیت بیشتری به پارامترهای استفاده شده در تعیین ترازهای انرژی دارند.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، با استفاده از روش حل تقریبی معادله شرودینگر در پایه‌های نوسانگر هماهنگ با استفاده از پتانسیل  $WS$  ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به ترازهای انرژی مقید نوترونی و پروتونی برای تعدادی از هسته‌های سبک و سنگین محاسبه و تعیین شده است و این نتایج به دست آمده را با نتایج به دست آمده از حل عددی و حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر برای پتانسیل میدان میانگین  $WS$  مقایسه شد. نتایج به دست آمده نشان داد:

• با حل تحلیلی و دقیق معادله شرودینگر برای پتانسیل وودز-ساکسون با استفاده از روش  $NU$  ویژه توابع و ویژه مقادیر ترازهای انرژی مقید نوترون با اعمال شرایط مرزی و با استفاده از روش نموداری به دست آمد. نتایج به دست آمده برای ترازهای انرژی تک ذره‌ای نوترونی با روش عددی حل مستقیم معادله شرودینگر و روش تقریبی مقایسه شد. نتایج به دست آمده هم‌خوانی خوب بین ترازهای انرژی به دست آمده از هر سه روش را نشان می‌دهد.

• همانطور که در جداول 3 تا 4 بررسی شد در روش حل تقریبی جمله اصلی مربوط به حالتی است که  $v = n$  می‌باشد، یعنی این جمله وزن اصلی را دارد و مقدار آن در مقایسه با بقیه جملات ( $v \neq n$ ) بزرگتر است.

• در حالتی که از دو سری مختلف از داده‌ها برای پارامترهای تطبیق پذیر پتانسیل  $WS$  استفاده شود اختلاف قابل توجه بین ترازهای انرژی به دست می‌آید.

• با استفاده از روش حل عددی ویژه مقادیر و ویژه توابع به صورت عددی، در روش حل تقریبی ویژه مقادیر به صورت عددی ولی ویژه توابع به صورت تحلیلی تقریبی (رابطه 3) و در روش حل تحلیلی دقیق برای نوترون در حالت  $s$ ، ویژه مقادیر و ویژه توابع به صورت تحلیلی دقیق به دست می‌آید.

### مرجع‌ها

- [1] J. Suhonen, From Nucleons to Nucleus, Springer-Verlag, (2007).
- [2] M.R. Pahlavani, S.A. Alavi, Approximate analytical solutions of Woods-Saxon potential including spin-orbit and centrifugal terms, *Modern Physics Letters A* 27 (2012) 1250167-1250180.
- [3] N. Zettili, *Quantum Mechanics Concepts and Applications*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, (2009).
- [4] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer, New York, (1980).
- [5] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. flannery, *Numerical Recipes the Art of Scientific Computing*, 3<sup>rd</sup> ed., Cambridge University Press, (2007).
- [6] Sameer M. Ikhdair, Ramazan Sever, Polynomial Solution of Non-Central

Potentials, *International Journal of Theoretical Physics* 46 (2007) 2384-2395.

[7] M. Hamzavi, S.M. Ikhdaïr, Any J-State Solution of the Duffin–Kemmer–Petiau Equation for a Vector Deformed Woods–Saxon Potential, *Few-Body Systems* 53 (2012) 461-471.

[8] A.N. Ikot, H. Hassanabadi, T.M. Abbey, Spin and Pseudospin Symmetries of Hellmann Potential with Three Tensor Interactions Using Nikiforov–Uvarov Method, *Communications in Theoretical Physics* 64 (2015) 637-643.

[9] M. Hamzavi, A.A. Rajabi, F. Koochakpoor, Approximate bound Dirac states for pseudoscalar Hulthen potential, *International Journal of Modern Physics E* 22 (2013) 1350035-1350047.

[10] N. Hatami, M.R. Setare, Analytical solutions of the Klein–Gordon equation for Manning–Rosen potential with centrifugal term through Nikiforov–Uvarov method, *International Journal of Modern Physics E* 91 (2017) 1229-1232.

[11] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser, (1988).

[12] S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, (1994).

[13] V.I. Zagrebaev et al., NRV: Low Energy Nuclear Knowledge Base, <http://nrv.jinr.ru/nrv>.