بازبهنجارش کوآنتومی سنجهٔ همدوسی در مدل آیزینگ عرضی

لیلا بالازاده ، قادر نجارباشی *

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دریافت: 1396/09/16 ویرایش نهائی: 1397/09/15 پذیرش: 1397/11/24

چکیده

در این مقاله به‌بررسی نظریهٔ گروه بازبهنجارش کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی در زنجیره‌ای یک‌بعدی از ذرات اسپین 1/2 می‌پردازیم. به‌این منظور، روابط بازگشتی را برای بازبهنجارش کوآنتومی سنجهٔ همدوسی در حالت پایه به‌کار می‌گیریم. نمودار سنجهٔ همدوسی برحسب شدت میدان عرضی به‌ازای تعداد مراحل بازبهنجارش بیشتر، آشکارسازی نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی مدل آیزینگ میدان عرضی را نشان می‌دهد که مبین آن است که سنجهٔ همدوسی می‌تواند نشانگر مناسبی برای گذار فاز کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی باشد. همچنین رفتار واگرایی حاکم بر مشتق سنجهٔ همدوسی را در مجاورت نقطهٔ بحرانی، به‌دست می‌آوریم. با وجود آن‌که سنجهٔ همدوسی به‌پایه‌ای که ماتریس چگالی نوشته‌شده است، بستگی دارد، نتایج نشان می‌دهد که نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی آشکارشده توسط سنجهٔ همدوسی مستقل از پایهٔ انتخابی است.

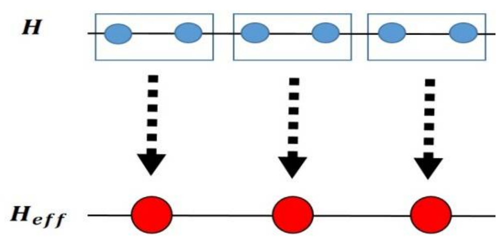
کلیدواژگان: بازبهنجارش کوآنتومی، سنجهٔ همدوسی، گذار فاز کوآنتومی، مدل آیزینگ

مقدمه

در سال‌های اخیر مسئلهٔ آشکارسازی و شناسایی نقاط گذار فاز کوآنتومی [1] با استفاده از توابع همبستگی کوآنتومی مانند درهم‌تنیدگی کوآنتومی مورد توجه ویژه‌ای قرارگرفته است. به‌علاوه نظریهٔ گروه بازبهنجارش کوآنتومی که توسط ویلسون در سال 1975 مطرح شد [2]، نقش مهمی در تعیین رفتار بحرانی سیستم‌های کوآنتومی دارد. ثابت شده است که اعمال روابط بازگشتی نظریهٔ گروه بازبهنجارش بر توابع همبستگی کوآنتومی منجر به آشکارسازی نقاط بحرانی کوآنتومی می‌شود. توابع همبستگی مختلفی از قبیل سنجه درهم‌تنیدگی تلاقی، ناهمخوانی کوآنتومی و فاز هندسی در مدل آیزینگ عرضی با رویکرد بازبهنجارش کوآنتومی بررسی شده و هرکدام قادر به شناسایی نقطهٔ بحرانی این مدل شده‌اند [5-3]. این توابع به‌اضافهٔ توابع دیگری از قبیل سنجه درهم‌تنیدگی منفیت، وفاداری کوآنتومی حالت پایه، ناهمخوانی کوآنتومی هندسی و غیره در انواع مدل‌های اسپینی در این رویکرد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [7و6]. در صورتی‌که بازبهنجارش کوآنتومی یک تابع همبستگی کوآنتومی در حالت پایهٔ سیستم دارای رفتار غیر تحلیلی در مجاورت نقطهٔ بحرانی باشد، می‌توان گفت این تابع همبستگی می‌تواند نشانگر مناسبی برای گذارهای فازی کوآنتومی باشد. بنابراین اهمیت دارد که این توابع را شناخته و با رویکرد نظریهٔ گروه بازبهنجارش کوآنتومی مورد

* نویسنده مسئول: najarbashi@uma.ac.ir

بررسی قرار دهیم. سنجه‌های همدوسی از جمله توابع همبستگی هستند که تاکنون با این رویکرد مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. در این مقاله یکی از تعاریف سنجهٔ همدوسی را به‌عنوان تابع همبستگی کوآنتومی انتخاب کرده، در حالت پایهٔ مدل آیزینگ عرضی در زنجیره‌ای یک‌بعدی از اسپین‌های 1/2 تحت نظریهٔ گروه بازبهنجارش کوآنتومی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.



شکل1. یک مرحله بازبهنجارش کوآنتومی با بلوک‌بندی دوتایی اسپین‌ها.

بازبهنجارش کوآنتومی مدل آیزینگ عرضی

هامیلتونین مدل آیزینگ عرضی در زنجیره‌ای دوره‌ای از N ذره اسپین 1/2 به‌شکل زیر هست:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \lambda\sigma_i^z\right) \qquad 1$$

در اینجا i نشانگر مکان اسپین، $J>0$ ثابت جفت‌شدگی همسایگی نزدیک، λ شدت میدان مغناطیسی عرضی و $\sigma_i^\alpha\ (\alpha=x,y,z)$ ماتریس‌های پاولی متعلق به اسپین i–ام هستند.

با توجه به‌حل دقیق [8,9]، پارامتر نظم این سیستم (مغناطش) در حالت پایه از مقدار غیر صفر به‌ازای $\lambda<1$ (فاز فرومغناطیس) به‌مقدار صفر به‌ازای $\lambda>1$ (فاز پارامغناطیس) تغییر می‌کند. با توجه به اینکه گذارهای فازی حالت پایه سیستم در اثر تغییرات پارامترهای مرتبط سیستم را گذارهای فازی کوآنتومی می‌نامیم، پس می‌توان گفت $\lambda=1$ نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی این مدل هست. به‌منظور اعمال نظریهٔ گروه بازبهنجارش کوآنتومی، زنجیرهٔ N مکانی را به $N/2$ بلوک دو اسپینی تقسیم می‌کنیم (شکل1)، در این صورت هامیلتونین سیستم به‌شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$H = H^{B} + H^{BB} \qquad 2$$

در اینجا جملهٔ اول، هامیلتونین داخل بلوک $H^{B}=\sum_{I=1}^{N/2} h_I^B$ است که مجموع هامیلتونین‌های تک‌تک بلوک‌ها h_I^B هست و داریم:

$$h_I^B = -J\left(\sigma_{1,I}^x\sigma_{2,I}^x + \lambda\sigma_{1,I}^z\right) \qquad 3$$

جملهٔ دوم، هامیلتونین برهم‌کنش بین بلوک‌ها هست که می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$H^{BB} = -J\sum_{I=1}^{N/2}\left(\sigma_{2,I}^x\sigma_{1,I+1}^x + \lambda\sigma_{2,I}^z\right) \qquad 4$$

در اینجا $\sigma_{1,I}^\alpha$ نشانگر مؤلفهٔ α از ماتریس پاؤلی متعلق به‌اولین مکان در بلوک I-ام هست. هامیلتونین داخل یک بلوک به فرم ماتریسی زیر درمی‌آید:

$$h_I^B = \begin{pmatrix} -J\lambda & 0 & 0 & -J \\ 0 & -J\lambda & -J & 0 \\ 0 & -J & J\lambda & 0 \\ -J & 0 & 0 & J\lambda \end{pmatrix}. \qquad 5$$

ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای این ماتریس به‌شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}|e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(q\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right), E_1=-J\sqrt{1+\lambda^2},\\ |e_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(q\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right), E_2=-J\sqrt{1+\lambda^2},\\ |e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(r\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right), E_3=J\sqrt{1+\lambda^2},\\ |e_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(r\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right), E_4=J\sqrt{1+\lambda^2},\end{aligned} \quad 6$$

که در اینجا $q=\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$ و $r=\lambda-\sqrt{1+\lambda^2}$ برقرار است. عملگر تصویر با استفاده از دو ویژه‌بردار تبهگن حالت پایه با انرژی $-J\sqrt{1+\lambda^2}$ ساخته می‌شود:

$$P_0^I=\left|e_1\right\rangle_I\left\langle\Uparrow\right|+\left|e_2\right\rangle_I\left\langle\Downarrow\right|. \quad 7$$

این عملگر، فضای حالت دو اسپین داخل بلوک را به یک اسپین دوحالته شامل حالت‌های $\left|\Uparrow\right\rangle$ و $\left|\Downarrow\right\rangle$ تصویر می‌کند. عملگر تصویر کل بلوک‌ها خواهد بود:

$$P_0=\prod_{I=1}^{N/2}P_0^I \quad 8$$

با اعمال عملگر تصویر کلی به‌هامیلتونین اولیه، هامیلتونین مؤثر به‌دست می‌آید:

$$H_{eff}=P_0HP_0 \quad 9$$

روابط تأثیر عملگر تصویر روی ماتریس‌های پاولی مکان‌های اول و دوم هر بلوک خواهد بود:

$$\begin{aligned}P_0\sigma_{1,I}^xP_0 &= 2ab\,\tilde{\sigma}_I^x,\\ P_0\sigma_{2,I}^xP_0 &= (a^2+b^2)\tilde{\sigma}_I^x,\\ P_0\sigma_{1,I}^zP_0 &= (a^2-b^2)I,\\ P_0\sigma_{2,I}^zP_0 &= (a^2-b^2)\tilde{\sigma}_I^z.\end{aligned} \quad 10$$

که در اینجا $a=\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}, b=\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$ و همچنین $\tilde{\sigma}_I^x$، $\tilde{\sigma}_I^z$ و I ماتریس‌های پاؤلی و عملگر واحد متعلق به‌فضای دوحالته بعد از بلوک‌بندی می‌باشند. هر مرحله که این بلوک‌بندی انجام گیرد، یک مرحلهٔ بازبهنجارش کوآنتومی صورت می‌گیرد و مجموعه هامیلتونین‌های زیر را خواهیم داشت که بالانویس n تعداد مراحل بازبهنجارش اعمال‌شده را نشان می‌دهد.

$$\left\{H^{(0)},H^{(1)},H^{(2)},H^{(3)},...,H^{(n)},...\right\}.$$

با استفاده از روابط بالا، هامیلتونین مؤثر بعد از یک مرحله بازبهنجارش به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$H^{(1)}=-J^{(1)}\sum_{i=1}^{N/2}(\tilde{\sigma}_i^x\tilde{\sigma}_{i+1}^x+\lambda^{(1)}\tilde{\sigma}_i^z) \quad 11$$

که در اینجا مشاهده می‌شود هامیلتونین به‌دست آمده به‌فرم هامیلتونین اولیه هست و در نتیجه با مقایسهٔ هامیلتونین‌های قبل از بازبهنجارش و بعد از بازبهنجارش به‌روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$J^{(1)}=\frac{J}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \lambda^{(1)}=\lambda^2 \quad 12$$

نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ ثابت روابط بازگشتی است که با حل $\lambda=\lambda^2$ به‌دست می‌آید که برابر با جواب حل دقیق تحلیلی $\lambda_c=1$ هست. با هر مرحله اعمال

بازبهنجارش کوآنتومی ضرایب جدیدی تولید می‌شوند که توابعی از ضرایب یک مرحله قبل می‌باشند:

$$\lambda^{(n+1)} = (\lambda^{(n)})^2, J^{(n+1)} = \frac{J^{(n)}}{\sqrt{1+(\lambda^{(n)})^2}} \qquad 13$$

بازبهنجارش کوآنتومی سنجه همدوسی

در این بخش به‌بررسی سنجهٔ همدوسی در حالت پایهٔ مدل آیزینگ عرضی می‌پردازیم. تعریف‌های مختلفی برای سنجهٔ همدوسی وجود دارد که در اینجا ما از تعریف زیر استفاده می‌کنیم [10]:

$$C(\rho) = \sum_{i \neq j} \left|\rho_{ij}\right| \qquad 14$$

کلی‌ترین شکل پایه‌های کیوبیت در کرهٔ بلوخ برحسب پایه‌های استاندارد به‌شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} \left|n\right\rangle &= \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\uparrow\right\rangle + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\downarrow\right\rangle, \\ \left|n_{\perp}\right\rangle &= -e^{-i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\uparrow\right\rangle + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left|\downarrow\right\rangle. \end{aligned} \qquad 15$$

حالت پایهٔ مدل را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \left|e_1\right\rangle &= a\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + b\left|\downarrow\downarrow\right\rangle \\ &= A\left|nn\right\rangle + B\left|nn_{\perp}\right\rangle + C\left|n_{\perp}n\right\rangle + D\left|n_{\perp}n_{\perp}\right\rangle. \end{aligned}$$

با محاسبهٔ سنجهٔ همدوسی برای رابطهٔ بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C &= F(\mathrm{QR}) + F(\bar{\mathrm{Q}}\bar{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{4i\alpha}) + F(\mathrm{QW}) + \\ & F(\bar{\mathrm{Q}}\bar{\mathrm{W}}\mathrm{e}^{4i\alpha}) + F(\mathrm{R}\bar{\mathrm{W}}\mathrm{e}^{2i\alpha}) + F(\bar{\mathrm{R}}\mathrm{W}\mathrm{e}^{2i\alpha}) + \\ & 2F(\mathrm{W}\bar{\mathrm{W}}\mathrm{e}^{2i\alpha}), \end{aligned} \qquad 16$$

که در اینجا $F\left(x\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{x}{q\sqrt{1+\lambda^2}}\right|$ همچنین روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} &= \mathrm{q}\mathrm{e}^{2i\alpha}\cos^2(\frac{\beta}{2}) + \sin^2(\frac{\beta}{2}), \\ R &= \mathrm{e}^{2i\alpha}\cos^2(\frac{\beta}{2}) + q\sin^2(\frac{\beta}{2}), \\ \mathrm{W} &= \left(q - \mathrm{e}^{2i\alpha}\right)\sin(\beta). \end{aligned} \qquad 17$$

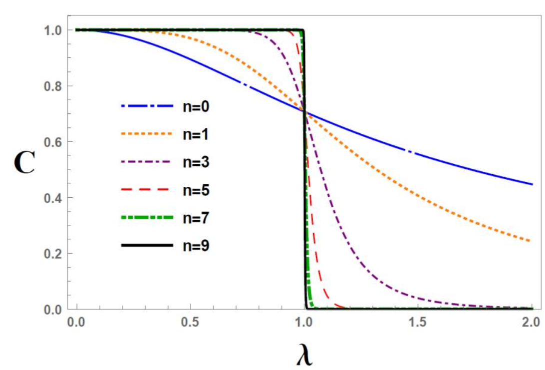
مشاهده می‌شود که سنجهٔ همدوسی به‌شدت میدان عرضی λ و پارامترهای پایهٔ انتخابی $\{\alpha,\beta\}$ بستگی دارد. با توجه به‌اینکه شدت میدان عرضی در هر مرحله از بازبهنجارش کوآنتومی تغییر می‌کند، پس سنجهٔ همدوسی تابعی از تعداد مراحل بازبهنجارش کوآنتومی هست.

ابتدا به‌بررسی سنجهٔ همدوسی محاسبه‌شده در پایهٔ استاندارد می‌پردازیم که با جای‌گذاری $\left(\alpha = 0, \beta = 0\right)$ در رابطهٔ16 به‌نتیجه زیر می‌رسیم:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \qquad 18$$

در شکل2، سنجهٔ همدوسی محاسبه‌شده در پایهٔ استاندارد (رابطهٔ18) برحسب شدت میدان عرضی و به‌ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی n رسم شده است. با توجه به‌شکل2 مشاهده می‌شود که نقطهٔ $\lambda = 1$، نقطهٔ ثابت نمودارها در تمام مراحل بازبهنجارش است. همچنین به‌ازای $n = 9$ در نقطهٔ $\lambda = 1$ سنجهٔ همدوسی به‌طور ناگهانی از مقدار یک به‌مقدار صفر تغییر می‌کند. این نتیجه در تطابق با فاز فرومغناطیس (همدوس) در ناحیهٔ $\lambda < 1$ و فاز

پارامغناطیس (غیرهمدوس) در ناحیهٔ $\lambda > 1$ هست. این مطلب نشان می‌دهد که $\lambda = 1$ نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی این مدل هست.



شکل2. سنجهٔ همدوسی (محاسبه‌شده در پایهٔ استاندارد) برای حالت پایه مدل آیزینگ عرضی برحسب λ شدت میدان عرضی و به‌ازای تعداد مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی n.

همچنین در شکل3 مشتق اول سنجهٔ همدوسی محاسبه‌شده در پایهٔ استاندارد برحسب شدت میدان عرضی به‌ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی رسم شده است که مشاهده می‌شود به‌ازای مراحل بهنجارش بیشتر، رفتار تیزتری در مجاورت نقطهٔ بحرانی ظاهر می‌شود. به‌این‌ترتیب مثال تأییدگری پیدا شد که با رویکرد بازبهنجارش کوآنتومی سنجهٔ همدوسی قادر به شناسایی نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی هستیم. همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، سایر توابع همبستگی کوآنتومی مانند سنجهٔ تلاقی درهم‌تنیدگی، ناهمخوانی کوآنتومی و فاز هندسی نیز قادر به‌شناسایی نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی می‌باشند [3-5].

اگر سنجهٔ همدوسی را در هر پایهٔ دیگری حساب کنیم، مشاهده می‌شود که نقطهٔ $\lambda = 1$ نقطهٔ ثابت نمودارهای سنجهٔ همدوسی در مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی هست و در مراحل به‌اندازهٔ کافی بزرگ بازبهنجارش کوآنتومی، نمودار سنجهٔ همدوسی برحسب شدت میدان عرضی رفتار پله مانند پیدا می‌کند. در شکل4، سنجهٔ همدوسی بهنجار شده در زنجیره‌ای به‌طول $N = 1024$ ($n = 9$) به‌ازای پایه‌های مختلف رسم شده است. شکل4 نشان می‌دهد با وجود آن‌که سنجهٔ همدوسی به‌پایه‌ای که ماتریس چگالی نوشته‌شده است، بستگی دارد اما نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی آشکارشده توسط سنجهٔ همدوسی، مستقل از پایهٔ انتخابی است.

در شکل5 نحوهٔ رفتار مختصهٔ کمینهٔ مشتق سنجهٔ همدوسی، $\lambda_{\min}$ را حول نقطهٔ بحرانی λ_c برحسب طول زنجیرهٔ مدل آیزینگ عرضی N، بررسی می‌کنیم. یافته‌های عددی از بررسی شکل5 نشانگر رفتار مقیاسی زیر هست

$$\lambda_{\min} = \lambda_c + N^{-0.97} \qquad 19$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که در حد ترمودینامیکی، $N \to \infty$، $\lambda_{\min}$ به λ_c میل می‌کند.

در شکل6 نمودار لگاریتمی $\left|\frac{dC}{d\lambda}\right|_{\min}$ برحسب طول زنجیرهٔ مدل آیزینگ عرضی N، رسم شده است که نموداری خطی است و رفتار مقیاسی زیر را نشان می‌دهد:

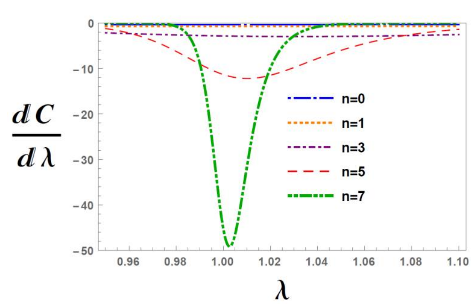
$$\left|\frac{dC}{d\lambda}\right|_{\min} \sim N^{1.003} \qquad 20$$

طبق رابطهٔ20، $\left|\frac{dC}{d\lambda}\right|_{\min}$ در حد ترمودینامیکی واگرا می‌شود و توان N، رفتار واگرایی آن را در مجاورت نقطهٔ بحرانی نشان می‌دهد.

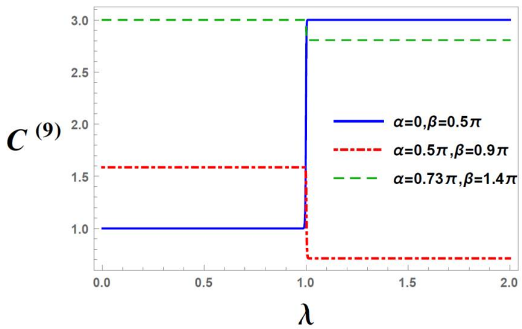
در آخر لازم به‌ذکر است که سنجه‌های همدوسی دیگری نیز معرفی شده است. به‌عنوان نمونه سنجهٔ همدوسی مبتنی بر آنتروپی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C}(\rho) = S\left(\rho_{diag}\right) - S\left(\rho\right) \qquad 21$$

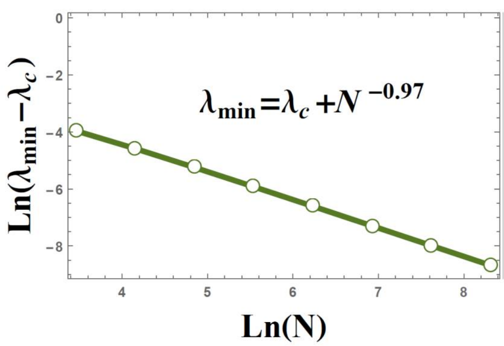
که در اینجا $S\left(\rho\right)$ آنتروپی فون نویمن می‌باشد و ρ_{diag} ماتریسی است که با حذف عناصر غیرقطری ماتریس چگالی ρ به‌دست می‌آید. نویسندگان این مقاله، این سنجه را نیز برای مدل آیزینگ عرضی بررسی کرده‌اند، از آنجایی که نتایج به‌دست آمده توسط سنجهٔ21 مانند نقطه و نمای بحرانی، مشابه می‌باشد، از ذکر آن در این مقاله خودداری شده است.



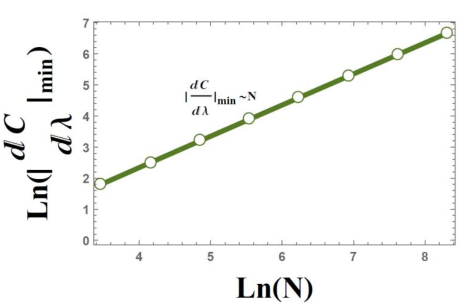
شکل3. مشتق اول سنجه همدوسی (پایه استاندارد) برای حالت پایه مدل آیزینگ عرضی برحسب λ شدت میدان عرضی و به‌ازای تعداد مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی n.



شکل4. سنجهٔ همدوسی بهنجار شده در زنجیره‌ای به‌طول $N=1024$ محاسبه‌شده در پایه‌های مختلف برای حالت پایه مدل آیزینگ عرضی برحسب λ شدت میدان عرضی.



شکل5. رفتار مقیاسی $|\lambda_{\min}-\lambda_c|$ برحسب طول زنجیرهٔ مدل آیزینگ عرضی N، که در اینجا $\lambda_{\min}$ نقطهٔ اکسترمم نمودار شکل3 هست.



شکل6. نمودار لگاریتمی $\left|\frac{dC}{d\lambda}\right|_{\min}$ برحسب طول زنجیرهٔ مدل آیزینگ عرضی N. نمودار خطی است و رفتار مقیاسی $\left|\frac{dC}{d\lambda}\right|_{\min} \sim N^{1.003}$ را نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، زنجیره‌ای یک‌بعدی از اسپین‌های 1/2 با مدل آیزینگ عرضی را با رویکرد بلوک‌بندی دوتایی نظریهٔ گروه بازبهنجارش مورد بررسی قرار دادیم. یکی از تعاریف سنجهٔ همدوسی را در حالت پایهٔ سیستم مطالعه کرده، روابط بازگشتی نظریهٔ گروه بازبهنجارش کوآنتومی را به‌آن اعمال کردیم. با توجه به نمودار سنجهٔ همدوسی محاسبه‌شده در پایهٔ استاندارد و مشتق اول آن برحسب شدت میدان عرضی مشاهده می‌شود که به‌ازای تعداد مراحل بازبهنجارش بیشتر، رفتار غیر تحلیلی در مجاورت نقطهٔ بحرانی کوآنتومی ظاهر می‌شود. این رفتار تأیید می‌کند که سنجهٔ همدوسی می‌تواند نشانگر مناسبی برای آشکارسازی گذار فازی کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی باشد. همچنین نمودار سنجهٔ همدوسی محاسبه‌شده در پایه‌های مختلف نشان می‌دهد که با وجود آنکه سنجهٔ همدوسی به‌پایه‌ای که ماتریس چگالی نوشته‌شده است، بستگی دارد، اما نقطهٔ گذار فاز کوآنتومی آشکارشده توسط سنجهٔ همدوسی مستقل از پایهٔ انتخابی است.

مرجع‌ها

[1] S. Sachdev, Quantum Phase Transitions, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).

[2] K.G. Wilson, The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem, *Reviews of Modern Physics* **47** (1975) 773.

[3] M. Kargarian, R. Jafari, A. Langari, Renormalization of concurrence: The application of the quantum renormalization group to quantum-information systems, Description *Physical Review A* **76** (2007) 060304.

[4] Xiu-Xing. Zhang, Hong-Rong. Li, The renormalization of geometric quantum discord in the transverse Ising model, *Modern Physics Letters B* **29** 3 (2015) 1550002.

[5] R. Jafari, Quantum renormalization group approach to geometric phases in spin chains, *Physics Letters A* **377** (2013) 3279-3282.

[6] A. Langari, F. Pollmann, M. Siahatgar, Ground-state fidelity of the spin-1 Heisenberg chain with single ion anisotropy: quantum renormalization group and exact diagonalization approaches, *Journal of Physics: Condens. Matter* **25** (2013) 406002.

[7] J. Maziero *et al.*, Quantum and classical thermal correlations in the XY spin-12 chain, *Physical Review A* **82** (2010) 012106.

[8] M.A. Martin-Delgado, G. Sierra, Real Space Renormalization Group Methods and Quantum Groups, *Physical Review Letters* **76** (1996) 1146-1149.

[9] P. Pfeuty, The one-dimensional Ising model with a transverse field, *Annals of Physics* **57** (1970) 79-90.

[10] T. Baumgratz, M. Cramer, M.B. Plenio, Quantifying Coherence, *Physical Review Letters* **113** (2014) 140401.