

## مطالعه تغییرات سطوح انرژی زنجیره ایزوتوپی $^{180-188}\text{Hg}$ در ناحیه گذار

### فازی کوآنتومی مدل برهم‌کنش بوزونی

هادی صبری\*، امیر جلیلی مجارشین

گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

1398/04/05 1397/11/30 1396/09/13

#### چکیده

در این مطالعه، زنجیره ایزوتوپی  $^{180-188}\text{Hg}$  در ناحیه گذار فازی شکلی هسته‌ای بین شکل‌های دوکی شکل و تخت بررسی شده است. برای مطالعه این ناحیه از هامیلتونین دو پارامتری جبری در مدل برهم‌کنش بوزونی استفاده شده است. با استفاده از نظریه کاتاستروف و فرمالیسم حالت همدوس، سطوح انرژی سیستم‌های هسته‌ای در این ناحیه گذار فازی شکلی حاصل گردید. مقایسه نتایج حاصل از این مطالعه برای طیف انرژی و احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی با نتایج تجربی موجود توانائی مدل برای مطالعه این هسته‌ها را در ناحیه گذار نشان می‌دهد. همچنین نحوه تغییرات سطوح انرژی و مقادیر حاصل برای پارامتر کنترلی هامیلتونین گذار فازی شکلی برای این زنجیره ایزوتوپی، وجود گذار فازی مرتبه اول را نشان داده و هسته  $^{188}\text{Hg}$  را به‌عنوان نمونه مناسبی برای تقارن دینامیکی نقطه بحرانی  $Z(5)$  یا تقارن دینامیکی  $O(6)$  معرفی می‌کند.

**کلیدواژگان:** گذار فازی-شکلی کوآنتومی، مدل برهم‌کنش بوزونی، سطوح انرژی، حالت همدوس، نقطه بحرانی  $Z(5)$

#### مقدمه

بررسی پدیده گذار فازی-شکلی کوآنتومی<sup>1</sup> در هسته‌های مختلف یکی از موارد مورد علاقه در مطالعات سالیان اخیر بوده است. این پدیده با استفاده از مدل‌های مختلف مثل مدل تجمعی بوهر-ماتلسون<sup>2</sup> و مدل برهم‌کنش بوزونی<sup>3</sup> بررسی شده است [1-3]. در این مدل‌ها، هامیلتونین مناسب حاصل از ترکیب تقارن‌های دینامیک مختلف به صورت  $H_{Transition} = \eta H_I + (1 - \eta) H_{II}$  چنان در نظر گرفته می‌شود تا امکان بررسی ساختار هسته‌ها را براساس

\* نویسنده مسئول: h-sabri@tabrizu.ac.ir

<sup>1</sup> Quantum shape phase transition (QPT)

<sup>2</sup> Bohr-Mottelson collective model (BMM)

<sup>3</sup> Interacting Boson Model (IBM)



مکان دقیق نقطه بحرانی<sup>1</sup> هر گذار فازی بین شکل‌های مختلف را مشخص می‌کند. در سالیان اخیر مدل‌های جبری مختلف بر پایه گروه‌های تقارنی متفاوت پیشنهاد شده‌اند. مدل IBM در اولین نسخه پیشنهادی در سال 1974 [2-5]، بر پایه جبر  $U(6)$  و استفاده از تنها دو بوزون  $s$  و  $d$  تعریف شد که ترازهای با اسپین-پارته زوج در هسته‌های نیمه‌سنگین را به‌خوبی توصیف می‌نماید. برای توصیف نواحی گذار فازی هسته‌ای، هامیلتونین در این مدل نیز از ترکیب هامیلتونین دو حد تقارنی حاصل می‌شود. بررسی انطباق ترازهای انرژی و احتمال گذارهای الکترون و مغناطیسی پیش‌بینی شده با مدل برهم‌کنش بوزونی با مقادیر تجربی متناظر، توانائی این مدل را ارزیابی می‌نماید. تغییر پارامتر کنترلی در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی تا رسیدن به کمترین فاصله در مقایسه با مقادیر تجربی، روش تعیین پارامتر کنترلی در این مدل جبری می‌باشد [6-20].

مزیت استفاده از مدل هندسی بوهر-ماتلسون برای توصیف شکل دقیق هسته‌ها از یک طرف و برتری‌های استفاده از مدل برهم‌کنش بوزونی در استفاده ساده‌تر و نتایج دقیق‌تر از طرف دیگر، ترکیب این دو مدل را ضروری می‌سازد. این ارتباط با استفاده از مفاهیم نظریه کاتاستروف<sup>2</sup> و حالت هم‌دوس<sup>3</sup> ممکن می‌شود. اثر هامیلتونین مدل جبری (خواه متناظر با حد دینامیکی و خواه برای توصیف ناحیه گذار) بر روی حالت‌های هم‌دوس، سطوح انرژی را برای سیستم‌های هسته‌ای برحسب پارامترهای  $\beta$  و  $\gamma$  حاصل می‌نماید. وجود

کمینه‌ها در این سطوح انرژی، تعداد کمینه‌ها و ... امکان بررسی مرتبه گذار فازی شکلی را میسر می‌سازد. همچنین می‌توان با کمینه کردن رابطه سطوح انرژی نسبت به پارامتر  $\beta$ ، محل دقیق نقطه بحرانی را برای هر ناحیه گذار فازی شکلی تعیین نمود. این روش مطالعاتی سبب ایجاد تناظر میان شکل‌های کروی، تغییر شکل یافته محوری و تغییر شکل یافته دوکی شکل (یا تخت) پیش‌بینی شده با مدل تجمعی و حدود دینامیکی  $U(5)$ ،  $SO(6)$  و  $SU(3)$  (یا  $\overline{SU}(3)$ ) مدل برهم‌کنش بوزونی می‌شود. همچنین نقاط بحرانی نواحی گذار فازی شکلی بین حدود  $SO(6)-U(5)$  و  $U(5)-SU(3)$  متناظر با نقاط بحرانی  $E(5)$  و  $X(5)$  می‌باشند. از طرفی نقطه بحرانی بین حدود دینامیکی  $SU(3)$  (تغییر شکل یافته دوکی شکل<sup>4</sup>) و  $\overline{SU}(3)$  (تغییر شکل یافته تخت<sup>5</sup>) متناظر با نقطه بحرانی  $Z(5)$  یا همان تقارن دینامیکی  $O(6)$  می‌باشد که این حدود دینامیکی و تناظر بین دو مدل در شکل 1 نمایش داده شده است [4-12].

مطالعات سالیان اخیر نشانه‌های متعددی از حرکت‌های تجمعی را در هسته‌های واقع در ناحیه جرمی  $82 < Z < 50$  نشان می‌دهد. شواهد تجربی [21-25] موجود در طیف انرژی و مقادیر احتمال گذارهای چهار قطبی الکترونیکی این هسته‌ها در مقایسه با پیش‌بینی مدل‌های مختلف، طبقه‌بندی‌های مشخصی را حاصل می‌نماید. هسته‌های پیرامون لایه بسته  $50 = Z$ ، همچون  $Xe, Te, Cd, Pd, Ru$ ، ایزوتوپی  $Xe, Te, Cd, Pd, Ru$  و ... نشانه‌هایی از تقارن‌های دینامیکی  $E(5)$  را نشان

مکان دقیق نقطه بحرانی<sup>1</sup> هر گذار فازی بین شکل‌های مختلف را مشخص می‌کند. در سالیان اخیر مدل‌های جبری مختلف بر پایه گروه‌های تقارنی متفاوت پیشنهاد شده‌اند. مدل IBM در اولین نسخه پیشنهادی در سال 1974 [2-5]، بر پایه جبر  $U(6)$  و استفاده از تنها دو بوزون  $s$  و  $d$  تعریف شد که ترازهای با اسپین-پارته زوج در هسته‌های نیمه‌سنگین را به‌خوبی توصیف می‌نماید. برای توصیف نواحی گذار فازی هسته‌ای، هامیلتونین در این مدل نیز از ترکیب هامیلتونین دو حد تقارنی حاصل می‌شود. بررسی انطباق ترازهای انرژی و احتمال گذارهای الکترون و مغناطیسی پیش‌بینی شده با مدل برهم‌کنش بوزونی با مقادیر تجربی متناظر، توانائی این مدل را ارزیابی می‌نماید. تغییر پارامتر کنترلی در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی تا رسیدن به کمترین فاصله در مقایسه با مقادیر تجربی، روش تعیین پارامتر کنترلی در این مدل جبری می‌باشد [6-20].

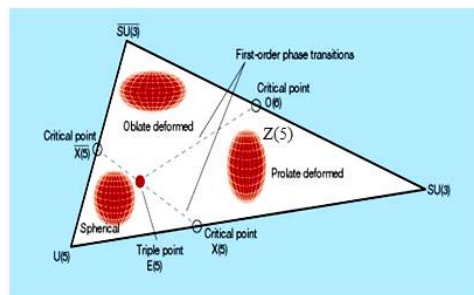
مزیت استفاده از مدل هندسی بوهر-ماتلسون برای توصیف شکل دقیق هسته‌ها از یک طرف و برتری‌های استفاده از مدل برهم‌کنش بوزونی در استفاده ساده‌تر و نتایج دقیق‌تر از طرف دیگر، ترکیب این دو مدل را ضروری می‌سازد. این ارتباط با استفاده از مفاهیم نظریه کاتاستروف<sup>2</sup> و حالت هم‌دوس<sup>3</sup> ممکن می‌شود. اثر هامیلتونین مدل جبری (خواه متناظر با حد دینامیکی و خواه برای توصیف ناحیه گذار) بر روی حالت‌های هم‌دوس، سطوح انرژی را برای سیستم‌های هسته‌ای برحسب پارامترهای  $\beta$  و  $\gamma$  حاصل می‌نماید. وجود

<sup>4</sup> prolate<sup>5</sup> oblate<sup>1</sup> Critical point<sup>2</sup> Catastrophe formalism<sup>3</sup> Coherent state

## هامیلتونین ناحیه گذار فازی-شکلی مدل بوزون برهم‌کنشی

مدل برهم‌کنش بوزونی در سال 1974 توسط یاکللو<sup>1</sup> و آریما<sup>2</sup> برای بررسی هسته‌های زوج-زوج نیمه‌سنگین با فرض جفت نوکلئون‌های بیرون لایه بسته به صورت بوزون‌های دارای اندازه حرکت  $L=0$ ، بوزون  $s$ ، و  $L=2$ ، بوزون  $d$ ، معرفی گردید [15] که تحت عنوان مدل  $sd$ - $IBM1$  شناخته می‌شود. توانائی این مدل در توصیف مناسب طیف انرژی و احتمال گذارهای الکتریکی و مغناطیسی سبب توسعه کاربرد این مدل در دهه‌های اخیر شده است. همچنین تعمیم این مدل برای توصیف تمایز بین بوزون‌های پروتونی و نوترونی، مطالعه هسته‌های فرد، اضافه شدن سهم بوزون‌های دارای اندازه حرکت بزرگتر، به ترتیب سبب معرفی مدل‌های  $sd$ - $IBM2$ ،  $sd$ - $IBFM$  و  $sdg$ - $IBM$  شده است [30]. همان‌طور که در نمودار زیر نمایش داده شده است، مدل  $sd$ - $IBM1$  فضای جبری  $U(6)$  را، که از ترکیب یک حالت بوزون  $s$  و 5 حالت بوزون  $d$  تشکیل می‌شود، برای مطالعه هسته‌ها استفاده می‌کند. این جبر دارای سه زیر جبر  $U(5)$ ،  $SO(6)$  و  $SU(3)$  می‌باشد که اعداد کوآنتومی هر زنجیره متناظر با عملگرهای آن نیز مشخص شده است.

می‌دهند. از طرف دیگر هسته‌های واقع در حوالی لایه بسته  $Z=82$ ، در قالب دو مدل  $O(6)$  و  $Z(5)$  طبقه‌بندی شده و این دو مدل با درجه بسیار مناسبی از تقریب، رفتار هسته‌های واقع در زنجیره‌های ایزوتوپی  $Os$ ،  $W$ ،  $Pt$  و  $Hg$  را توصیف می‌نمایند. همچنین هسته‌های متمرکز در ناحیه بیناین این دو لایه بسته، با استفاده از مدل  $X(5)$  ارزیابی می‌شوند [26-35].



شکل 1. نمایش حدود سه‌گانه هر دو مدل تجمعی بوهر-ماتلسون و برهم‌کنش بوزونی. تناظر با اثر هامیلتونین جبری بر روی حالت همدوس حاصل می‌شود. نقاط بحرانی  $Z(5)$  و  $O(6)$  هم ارز می‌باشند.

در این مطالعه، زنجیره ایزوتوپی  $^{180-188}Hg$  با استفاده از یک هامیلتونین دو پارامتری در قالب مدل بوزون برهم‌کنشی مورد بررسی قرار گرفته است. توانائی مدل در توصیف طیف انرژی و احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی در مقایسه با مقادیر تجربی موجود [21-25] ارزیابی می‌گردد. همچنین با انتخاب حالت همدوس و اثر هامیلتونین ناحیه گذار فازی شکلی بر روی این حالت، سطوح انرژی برای هسته‌های انتخابی حاصل می‌گردد. تغییرات این سطوح وجود گذار فازی شکلی را برای این زنجیره ایزوتوپی نشان می‌دهد.

<sup>2</sup> A. Arima

<sup>1</sup> F. Iachello

مناسب معرفی می‌شود که در ادامه به بررسی هامیلتونین ناحیه گذار بین شکل‌های دوکی و تخت خواهیم پرداخت.

### مطالعه گذار فازی شکلی بین هسته‌های

#### تغییر شکل یافته کشیده و تخت

گذار فازی شکلی کوآنتومی در هسته‌های مختلف را در مدل بوزون برهم‌کنشی برحسب حدود دینامیکی  $U(5)$ ،  $SO(6)$  و  $SU(3)$  (یا  $\overline{SU}(3)$ ) توصیف می‌نمایند. همچنین، این پدیده در مدل تجمعی بوهر-ماتلسون براساس تعداد و محل کمینه‌ها در سطوح انرژی مرتبه‌بندی می‌شود. در واقع دو تفاوت کلیدی بین گذار فاز مرتبه اول و دوم وجود دارد. در گذار فاز مرتبه اول پارامتر کنترلی (تغییر شکل چهار قطبی) به‌طور ناپیوسته تغییر می‌کند و یک همزیستی بین فاز کروی و تغییر شکل یافته وجود دارد. در گذار فاز مرتبه دوم متغییر شکل به‌صورت پیوسته رشد می‌کند و فقط یک فاز وجود دارد. همچنین، در گذار فاز مرتبه یک، دو کمینه با هم وجود دارند که ایجاد تبهگنی در نقطه بحرانی می‌کنند. از طرفی، در گذار فاز مرتبه دوم سطح انرژی به‌طور پیوسته از کمینه اول به کمینه دوم تغییر می‌کند. بررسی‌های صورت گرفته حول رفتار هسته‌های واقع در نواحی مختلف نشان می‌دهد که گذار  $SU(3)-U(5)$  و  $\overline{SU}(3)-SU(3)$  گذار فاز مرتبه اول هستند و گذار  $SO(6)-U(5)$ ، یک گذار مرتبه دوم می‌باشد.

برای توصیف گذار فازی شکلی بین حدود  $SU(3)$ - $\overline{SU}(3)$  یک هامیلتونین دو پارامتری، از ترکیب دو حد

$$U(6) \begin{cases} U(5) & SO(5) & SO(3) & SO(2) \\ \downarrow \supset & \downarrow \supset & \downarrow \supset & \downarrow \supset \\ n_d & \tau & n_\Delta L & M \\ SU(3) & SO(3) & SO(2) & \\ \downarrow \supset & \downarrow \supset & \downarrow \supset & \downarrow \supset \\ N & (\lambda, \mu) & K_L L & M \\ SO(6) & SO(5) & SO(3) & SO(2) \\ \downarrow \supset & \downarrow \supset & \downarrow \supset & \downarrow \supset \\ \sigma & \tau & n_\Delta L & M \end{cases} \begin{matrix} \text{کروی} \\ \\ \\ \text{تغییر شکل یافته محوری} \\ \\ \\ \text{نایابدار } \gamma \end{matrix}$$

کاملترین شکل هامیلتونین مدل برهم‌کنش بوزونی

sd-IBM1 به‌فرم زیر می‌باشد [15]

$$H_{\text{IBM-1}} = E_0'' + \epsilon_d n_d + C_1(L.L) + k(Q_\chi \cdot Q_\chi) + 1 \\ k_3(T^{(3)} \cdot T^{(3)}) + k_4(T^{(4)} \cdot T^{(4)})$$

در این رابطه، عملگرهای موجود در رابطه به‌صورت

$$T^{(\lambda)} = [d^+ \times \tilde{d}]^{(\lambda)}, L = \sqrt{10} [d^+ \times \tilde{d}]^{(1)} \quad (1)$$

$$Q_\chi = [d^+ \times \tilde{s} + s^+ \times \tilde{d}]_\mu^{(2)} + \chi [d^+ \times \tilde{d}]_\mu^{(2)}$$

تعریف می‌شوند که به‌ترتیب بردار تکانه زاویه‌ای،

مجموعه تانسورهای کمکی از مرتبه  $\lambda$  و تانسور تغییر

شکل چهار قطبی هستند. مقادیر مختلف ثابت‌های

هامیلتونین، یعنی  $\epsilon_d$ ،  $C_1$ ،  $k$  و  $\chi$  چنان انتخاب می‌شوند

به‌نحوی که رفتار هر یک از حدود دینامیکی مدل IBM

را توصیف نمایند.  $k=0$  معرف حد دینامیکی  $U(5)$

برای توصیف هسته‌های کروی شکل،  $\epsilon_d = 1$  و  $\chi = 0$

برای توصیف حد دینامیکی  $SO(6)$  یا همان هسته‌های

تغییر شکل یافته محوری و  $\epsilon_d = 0$  و  $\chi = \pm \sqrt{7}/2$  برای

مطالعه هسته‌های تغییر شکل یافته دوکی شکل ( یا

تخت) متناظر با حدود دینامیکی  $SU(3)$  (یا  $\overline{SU}(3)$ )

استفاده می‌شود. برای مطالعه نواحی گذار فازی شکلی

بین این حدود دینامیکی، هامیلتونینی متشکل از

مجموعه جملات دو حد مورد نظر و پارامتر کنترلی

پایه‌های نمایش را می‌توان به صورت زیر و بر اساس تانسورهای مرتبه معین

$$B_{[n]\langle\sigma\rangle(\tau)lm}^\dagger, \tilde{B}_{[n^s]\langle\sigma\rangle(\tau)lm} \equiv (-1)^{l-m} (B_{[n]\langle\sigma\rangle(\tau)l,-m}^\dagger)^\dagger \quad 4$$

تعریف نمود که البته تانسورهای دارای مرتبه  $\sigma < n$  به دلیل شرط زیر

$$\tilde{B}_{[n^s]\langle\sigma\rangle(\tau)lm} | [N]\langle N \rangle (\tau) v_\Delta LM \rangle = 0, \quad 5$$

$\sigma < n$

مد نظر می‌باشند. این رابطه به‌ازا جمیع مقادیر  $L$  و  $\tau$  مجاز متناظر با مقدار انتخابی  $\langle N \rangle$  صحیح می‌باشد (ارتباط بین اعداد مختلف کوآنتومی از تابلوهای یانگ<sup>1</sup> حاصل می‌شود که جزئیات در منبع [26] ذکر شده است). حال با استفاده از این ویژه‌حالت نمایش پایه‌ها، مقدار چشم‌داشتی هامیلتونین، ویژه‌مقادیر هر حالت، به صورت زیر حاصل می‌شود،

$$\langle [N]\langle\sigma\rangle(\tau) v_\Delta LM | H | [N]\langle\sigma\rangle(\tau) v_\Delta LM \rangle = E_0 + \eta n_d + \frac{\eta - 1}{N} \varepsilon + CL(L+1) \quad 6$$

$E_0$  پارامتر لازم جهت انطباق اطلاعات تجربی و پیش‌بینی‌های تئوری،  $n_d$  تعداد  $d$  بوزون‌ها،  $L$  اندازه حرکت مداری حالات مختلف و  $\varepsilon$  مقدار چشم‌داشتی متناظر با سهم جمله اندرکنش چهار قطبی می‌باشد که روابط آن برای هر یک از هسته‌های انتخابی در منبع [26] آورده شده است. همچنین ثابت‌های رابطه بالا، یعنی  $E_0$ ،  $\eta$  و  $C$ ، از برازش معادله ویژه‌مقداری به اطلاعات تجربی حاصل می‌شود.

تقارنی با استفاده از پارامتر کترلی  $\eta$  به صورت زیر انتخاب می‌شود [17-19]:

$$H(\chi, \eta) = c \left[ (1-\eta)n_d - \frac{\eta}{4N_B} (Q_\chi \cdot Q_\chi) \right] \quad 2$$

مقادیر  $\chi = -\sqrt{7}/2$  و  $\chi = +\sqrt{7}/2$ ، به ترتیب برای مطالعه هسته‌های دوکی شکل، حد  $SU(3)$ ، و تخت، حد  $\overline{SU}(3)$ ، استفاده می‌شوند. نقطه بینابین این ناحیه گذار فازی شکلی، که با  $\chi = 0$  توصیف می‌شود، هسته‌های تغییر شکل یافته محوری را توصیف می‌نماید که به ترتیب متناظر با حدود  $O(6)$  و  $Z(5)$  مدل‌های برهم‌کنش بوزونی و مدل تجمعی بوهر ماتلسون می‌باشند [18-19]. در مدل IBM، می‌توان از پایه‌های جبر  $O(6)$  برای مطالعه و برچسب زنی ویژه‌حالات سیستم و همچنین تعیین ویژه‌مقادیر استفاده نمود. این فرایند به تفضیل در منابع [25-26] برای زنجیره ایزوتوپی انتخابی توصیف شده است. در این مقاله به بررسی اجمالی این فرایند و ذکر نتایج اساسی می‌پردازیم.

اعداد کوآنتومی مناسب برای توصیف سیستم در این زنجیره تقارنی و بر اساس نمادهای متناظر با هر زیر زنجیره به صورت زیر می‌باشد:

$$U(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \quad 3$$

در نتیجه، هر ویژه‌حالت سیستم در این نمایش به صورت  $| [N]\langle\sigma\rangle(\tau) v_\Delta LM \rangle$  قابل بررسی می‌باشد. عملگرهای خلق و فنای بوزونی در این

<sup>1</sup> Young tableau

$$|\beta, \gamma, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!(1+\beta^2)^N}} [s^\dagger + \beta \cos \gamma d_0^\dagger + \quad 8$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger)]^N |0\rangle$$

تعریف می‌شود. اثر هر یک از جملات هامیلتونین روی این حالت، مقدار چشمداشتی هر یک از عملگرهای کازیمیر هامیلتونین، به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\langle \hat{C}_1(U(5)) \rangle = \frac{1}{4} \left( \frac{7N}{1+\beta^2} + 1 \right) + \frac{1}{16} \left( \frac{N\beta^2}{1+\beta^2} + 5 \right) \quad 9a$$

$$\langle \hat{C}_2(U(5)) \rangle = \frac{1}{4} \left( \frac{2N}{1+\beta^2} + 1 \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{5N\beta^2}{1+\beta^2} + 2 \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{3N\beta^2}{1+\beta^2} + 4 \right) \quad 9b$$

$$\langle \hat{C}_2(O(6)) \rangle = \frac{5}{18} \left( \frac{N\beta^2}{1+\beta^2} \right) \cos 3\gamma + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{(1+\beta^2)^2} + 2 \right) \cos 3\gamma + \quad 9c$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{3N\beta^2}{(1+\beta^2)^3} + 4 \right) \cos^2 3\gamma + \frac{1}{4} \left( \frac{N\beta^4}{(1+\beta^2)^3} + 1 \right) \cos^2 3\gamma +$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{N\beta^5}{(1+\beta^2)^3} + 4 \right) \cos 3\gamma + \frac{1}{8} \left( \frac{3N\beta^6}{(1+\beta^2)^3} + 2 \right) \cos^2 3\gamma$$

$$\langle \hat{C}_2(O(5)) \rangle_d = 2 \frac{N\beta^2}{1+\beta^2} \quad 9d$$

$$\langle \hat{C}_2(SU(3)) \rangle = \frac{2}{11} (\sqrt{14}\beta^2 + 6) \cos 3\gamma + \frac{1}{14} \left( \frac{4N}{(1+\beta^2)^2} + 7 \right) \cos 3\gamma +$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{5N\beta^2}{(1+\beta^2)^3} + 2 \right) \cos^2 3\gamma + \frac{1}{12} \left( \frac{2N\beta^4}{(1+\beta^2)^3} + 6 \right) \cos^2 3\gamma + \quad 9e$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{4N\beta^5}{(1+\beta^2)^3} + 3 \right) \cos 3\gamma + \frac{1}{2} \left( \frac{N\beta^6}{(1+\beta^2)^3} + 1 \right) \cos^2 3\gamma$$

$$\langle \hat{C}_2(O(3)) \rangle = \frac{3}{51} \frac{N\beta^2}{1+\beta^2} \quad 9f$$

با قرار دادن تمام این روابط در معادله ویژه مقدری 6، شکل سطوح انرژی برای ناحیه گذار فازی شکلی انتخابی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E(\beta, \gamma, \chi) = -(1-\chi) \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2} \quad 10$$

$$[\beta^2 + 4\sqrt{2}\beta \cos 3\gamma + 8] - \chi \frac{16}{441} \sqrt{7} \frac{\beta^3}{(1+\beta^2)^3}$$

$$[-\frac{7}{8} \sqrt{7} \beta^3 (2 \cos^2 3\gamma - 1) -$$

$$\sqrt{14} (\frac{21}{4} \beta^2 + 14) \cos 3\gamma - 21\sqrt{7}\beta]$$

## سطوح انرژی در ناحیه گذار بین هسته‌های

### تغییر شکل یافته کشیده و تخت

یکی از روش‌های مطالعه پدیده گذار فازی شکلی هسته‌ای، تعیین سطوح انرژی می‌باشد. محاسبه مقدار چشمداشتی هامیلتونین ناحیه گذار بر روی ویژه‌حالات سیستم، انرژی متناظر با حالت پایه را تعیین می‌کند،

$$E = \frac{\langle [N] \langle \sigma \rangle (\tau) v_\Delta LM | H | [N] \langle \sigma \rangle (\tau) v_\Delta LM \rangle}{\langle [N] \langle \sigma \rangle (\tau) v_\Delta LM | [N] \langle \sigma \rangle (\tau) v_\Delta LM \rangle}$$

از طرفی، برای بررسی تغییرات این سطوح، اثر هامیلتونین مدل IBM بر روی حالت همدوس تعریف شده بر اساس متغیرهای مدل BMM، یعنی  $\beta$  و  $\gamma$ ، سطوح انرژی کامل هسته انتخابی را حاصل می‌نماید. محل کمینه‌ها و تعداد آنها، مرتبه گذار فازی شکلی را تعیین می‌کند.

بدین منظور، ابتدا هامیلتونین ناحیه گذار، رابطه 2، بر اساس عملگرهای کازیمیر آن بیان می‌شود. این فرایند بدین دلیل می‌باشد که امکان اثر هامیلتونین و عملگرها بر اساس متغیرهای فضای مدل BMM فراهم گردد

$$\begin{aligned} \hat{H}(\chi, \eta) = & [(1-\eta) - \frac{\eta\chi}{14N} (\chi + \frac{\sqrt{7}}{2})] \hat{C}_1[U(5)] - \\ & \frac{\eta\chi}{14N} (\chi + \frac{\sqrt{7}}{2}) \hat{C}_2[U(5)] + \\ & + \frac{\eta}{4N} (1 + \frac{3}{\sqrt{7}} \chi + \frac{2}{7} \chi^2) \hat{C}_2[O(5)] - \\ & \frac{\eta\chi}{56N} (\chi + 2\sqrt{7}) \hat{C}_2[O(3)] + \\ & + \frac{\eta\chi}{4\sqrt{7}N} \hat{C}_2[SU(3)] - \\ & \frac{\eta}{4N} (1 + \frac{2}{\sqrt{7}} \chi) \hat{C}_2[O(6)] \end{aligned} \quad 7$$

حالت همدوس مناسب برای این ناحیه گذار فازی به صورت [17-19]

$$B(E2; \alpha_i J_i \rightarrow \alpha_f J_f) = \frac{\left| \langle \alpha_f J_f \| T(E2) \| \alpha_i J_i \rangle \right|^2}{2J_i + 1} \quad 12$$

در ادامه، احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی برای آن دسته از گذارهایی که مقادیر تجربی معلوم دارند، ارائه گردیده است.

### نتایج

زنجیره ایزوتوپی هسته  $Hg$  نشان‌هائی از پدیده‌های ناشی از ترکیب تقارن‌های مختلف از جمله گذار فازی-شکلی هسته‌ای و یا پدیده همزیستی شکل‌ها<sup>2</sup> را نشان می‌دهد. این ترکیب تقارن‌ها را می‌توان ناشی از اثر قابل توجه نیروی جفت شدگی پیرامون لایه بسته  $z=82$  و دافعه کولنی حاصل از تعداد قابل توجه پروتون‌ها دانست. مطالعات صورت گرفته، این هسته‌ها را به‌عنوان کاندیداهای مناسب برای قرار گرفتن در نقطه بحرانی (و یا پیرامون این نقطه) گذار فازی شکلی بین هسته‌های تغییر شکل یافته دوکی و تخت معرفی می‌نماید [25-26].

بررسی‌های مشابهی پیرامون یک یا تعدادی از هسته‌های انتخابی این مطالعه با تأکید پیرامون محاسبه طیف انرژی و یا پدیده همزیستی شکلی صورت پذیرفته است [28]. این مطالعات از مدل‌های متفاوت [17] و در برخی موارد از نمایش‌های متفاوت برای ویژه‌حالات استفاده نموده‌اند [29]. مزیت این مطالعه علاوه بر استفاده از نمایش گروه تقارنی  $O(6)$  برای حالات، تعیین طیف انرژی و احتمال‌های گذار در بازه وسیع‌تر می‌باشد. همچنین استفاده از سطوح انرژی برای

تغییرات این سطوح انرژی بر اساس تغییرات پارامتر کنترلی، امکان بررسی رفتار زنجیره ایزوتوپی را در ناحیه گذار ممکن می‌سازد که در ادامه در این خصوص، نتایج ذکر خواهد گردید.

### احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی

اندازه‌گیری بسیار دقیق احتمال گذارهای الکتریکی و مغناطیسی با استفاده از روش‌های تجربی، این کمیت‌ها را به‌عنوان مشاهده‌پذیرهای قابل اطمینان در بررسی پیش‌بینی‌های مدل‌های مختلف معرفی می‌نماید. مقایسه با نتایج تجربی، هم‌میزان کارائی عملگر توصیف کننده پدیده گذار الکترو مغناطیسی را ارزیابی نموده و همچنین، امکان بررسی صحت اعداد کوآنتومی استفاده شده برای توصیف حالات را ممکن می‌سازد. احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی،  $B(E2)$ ، غالب‌ترین نوع گذار در هسته‌های تغییر شکل یافته است. عملگر این گذار باید یک تانسور هرمیتی مرتبه 2 باشد. از طرفی شرط ثابت بودن تعداد بوزون‌های هر هسته، تنها شکل ممکن برای این عملگر را به‌صورت زیر حاصل می‌نماید [26]:

$$T(E2) = q_2 [(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} + q_2' (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}] \quad 11$$

که  $q_2$  معرف مقدار بار مؤثر و کمیت  $q_2'$ ، عدد بدون بعد می‌باشد که هر دو کمیت از برآزش احتمال گذار به‌مقادیر تجربی موجود [26] حاصل می‌شود. احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی بین دو حالت  $|\alpha_f J_f\rangle \rightarrow |\alpha_i J_i\rangle$  عبارت است از،

ایزوتوپی Hg نشان می‌دهد. هسته‌های این زنجیره به دلیل سهم غالب تر نیروی دافعه کولنی ناشی از تعداد قابل توجه پروتون‌ها، مقادیر قابل توجه تغییر شکل‌های مراتب مختلف چهار قطبی  $\beta_2$ ، هشت قطبی  $\beta_3$  و ... را نشان می‌دهند. از طرفی، سهم غالب نیروی جفت‌شدگی در هسته‌های کروی شکل، وجود یک رقابت بین این دو نیرو را در ساختار این زنجیره ایزوتوپی را تأیید می‌نماید. این نتیجه را می‌توان به‌عنوان عامل اساسی برای وجود دو تقارن همزمان، البته با قدرت‌های متفاوت، در ساختار این هسته‌ها معرفی کرد که خود این مسئله از یک سو سبب بروز یک گذار فازی شکلی مرتبه اول در ساختار این هسته‌ها شده و همچنین نشانه‌هایی از پدیده هم‌زیستی شکل‌ها در این هسته‌ها را تأیید می‌نماید. وجود تراز  $0_2^+$  قبل از سایر ترازهای باند پایه (که به‌عنوان تراز مزاحم<sup>3</sup> شناخته می‌شود) و مقادیر قابل توجه احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی  $B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  در این هسته‌ها، همگی نشانه‌های وجود شکل یا تقارن‌های دو گانه در این هسته‌ها را نشان می‌دهند که به‌تفضیل در منابع مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند [28-29].

از طرف دیگر، مقادیر حاصل برای پارامتر کنترلی  $\chi$  در هامیلتونین هر دو پدیده گذار فازی-شکلی هسته‌ای و همچنین هم‌زیستی شکل کروی متناظر با حد دینامیکی  $U(5)$ ، را با شکل‌های دوکی و تخت نشان می‌دهد. انتظار مقادیر  $\chi = \pm\sqrt{7}/2 \approx \pm 1.32$  برای هسته‌های متناظر با حدود دینامیکی  $SU(3)$  و  $\overline{SU}(3)$  و  $SU(3)$  (هسته‌های تغییر شکل یافته کروی و تخت) و مقدار

ایجاد تمایز بین هسته‌های ناحیه گذار در قالب این مطالعه انجام شده است.

در ابتدا با استفاده از جداول موجود در منبع [26]، اعداد کوآنتومی برای آن دسته از ترازهای انرژی که اطلاعات تجربی [21-25] برای آنها موجود می‌باشد را تعیین می‌نمائیم. سپس با استفاده از برازش رابطه<sup>6</sup> جهت محاسبه طیف انرژی، و روابط 11 و 12 برای محاسبه احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی، ثابت‌های رابطه برای هسته‌های انتخابی تعیین می‌گردد که در جدول 1 فهرست شده است.

جدول 1. ثابت‌های رابطه ویژه مقداری<sup>6</sup> و روابط 11 و 12 جهت محاسبه احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی، برای هسته‌های انتخابی.

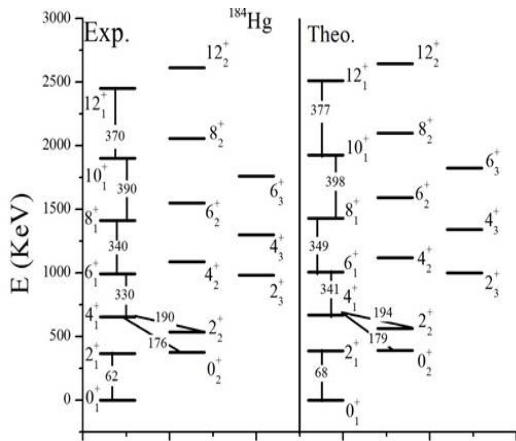
هسته	$E_0(\text{keV})$	$C(\text{keV})$	$\eta$	$\chi$	$q_2$	$q_2'$
$^{180}\text{Hg}$	750	1/88	0/71	0/45	1/85	-0/211
$^{182}\text{Hg}$	920	1/65	0/76	0/50	2/14	-0/186
$^{184}\text{Hg}$	850	1/79	0/81	0/55	2/06	-0/174
$^{186}\text{Hg}$	790	1/83	0/85	1	1/98	-0/208
$^{188}\text{Hg}$	900	1/71	0/62	0	2/11	-0/195

شکل 2، طیف انرژی و مقادیر احتمال گذارهای چهارقطبی الکتریکی را برای هسته‌های انتخابی نمایش می‌دهد. توافق قابل قبولی بین نتایج حاصل از محاسبات و اطلاعات تجربی موجود حاصل می‌گردد. این نتیجه صحت مدل و هامیلتونین گذار فازی شکلی انتخاب شده، برچسب زنی ترازهای انرژی بررسی شده و همچنین دقت قابل توجه فرایند برازش تعیین ثابت‌های روابط را نشان می‌دهد.

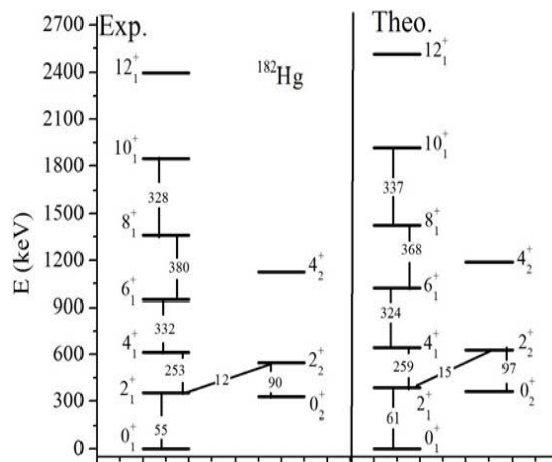
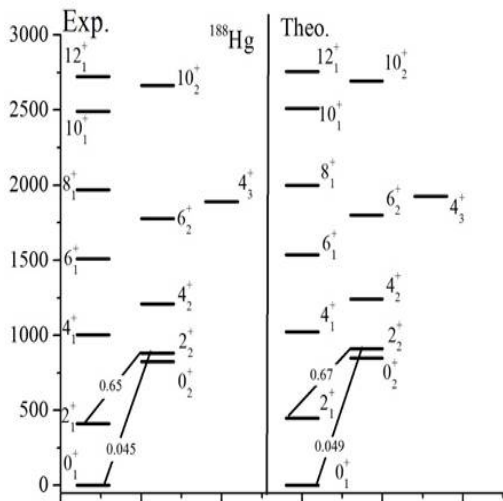
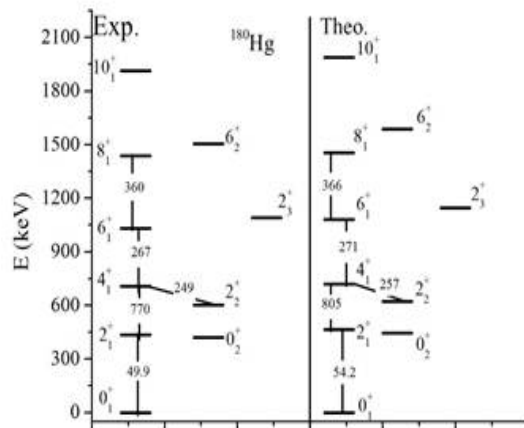
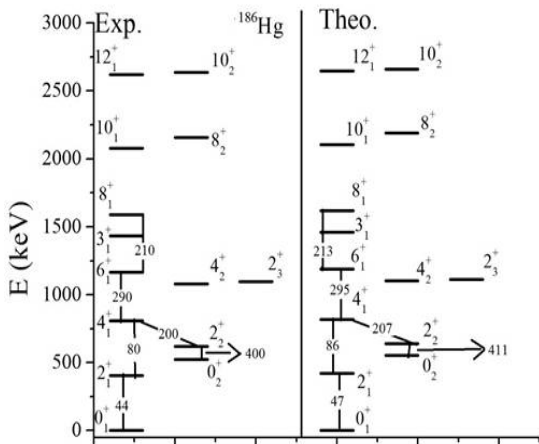
نتایج حاصل از برازش رابطه<sup>6</sup> با اطلاعات تجربی و مقادیر حاصل از آن برای کمیت  $\eta$ ، وجود سهم نیروی جفت‌شدگی بوزون‌های d را در هسته‌های زنجیره

<sup>3</sup> Intruder state





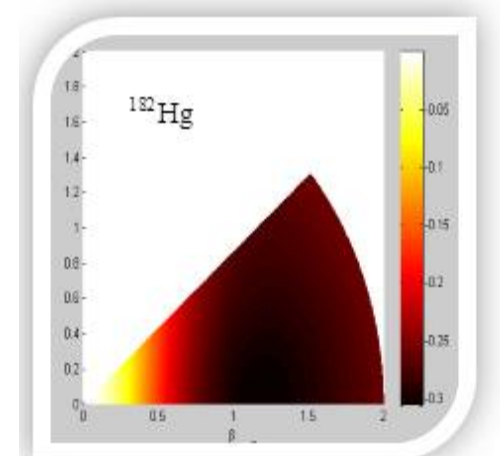
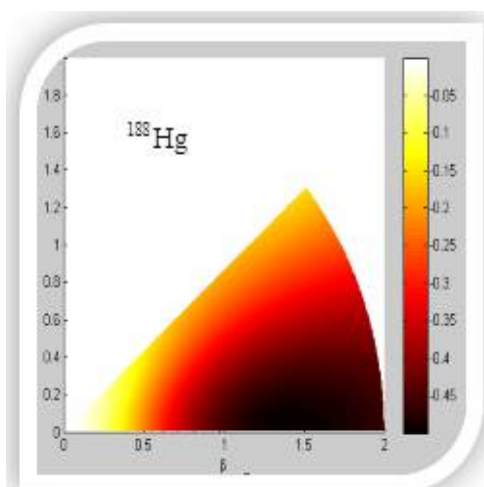
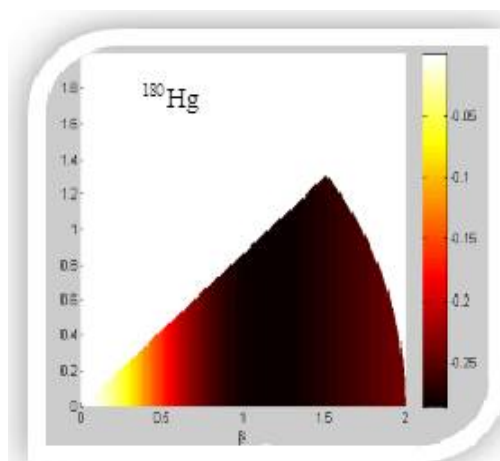
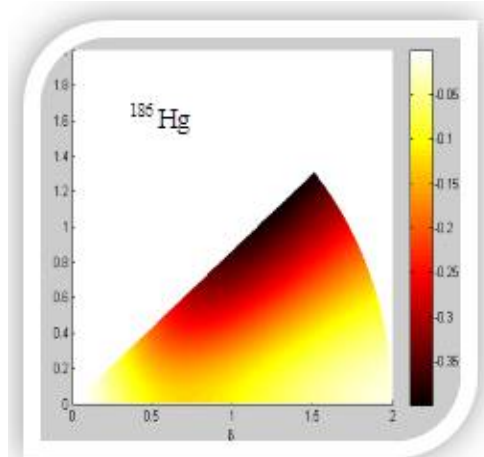
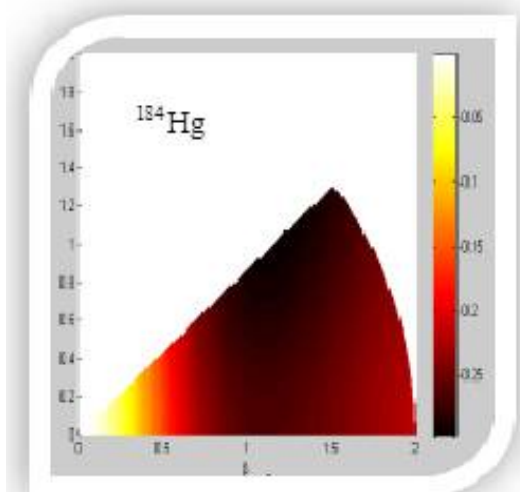
$\chi = 0$  برای هسته‌های متناظر با نقطه بحرانی این ناحیه، یعنی حد دینامیکی  $O(6)$ ، توسط نتایج حاصل از برازش رابطه 6 به مقادیر تجربی تأیید می‌شود. همچنین مقدار عددی  $\chi = 0$  برای هسته  $^{188}\text{Hg}$  کاملاً در انطباق با پیش‌بینی‌های موجود برای رابطه نسبت ترازهای انرژی هسته‌ها،  $R_{4/2} = E(4_1^+) / E(2_1^+)$ ، می‌باشد که برای هسته‌های متناظر با حد دینامیکی  $O(6)$ ،  $R_{4/2} = 2/50$  پیش‌بینی می‌شود که نزدیک‌ترین هسته به این شرط، هسته  $^{188}\text{Hg}$  با مقدار  $R_{4/2} = 2/48$  است.



شکل 2. طیف انرژی و احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی برای

زنجیره ایزوتوپی  $^{188-180}\text{Hg}$ .

روش دیگر برای بررسی پدیده گذار فازی شکلی هسته‌ای، مطالعه تغییرات سطوح انرژی حاصل از اثر هامیلتونین جبری مدل بوزون برهم‌کنشی بر روی حالت هم‌دوس می‌باشد. با استفاده از رابطه 10 و جاگذاری مقادیر ثابت‌های هامیلتونین برای معرفی شده در جدول 1، شکل سطوح انرژی برای هسته‌های انتخابی حاصل می‌شود که در شکل 3 نمایش داده شده است.



شکل 3. سطوح انرژی برای زنجیره ایزوتوپی هسته Hg. شکل‌ها از جاگذاری ثابت‌های هر هسته، معرفی شده در جدول 1، در رابطه 10 و بررسی تغییرات پارامتر شعاعی  $\beta$  حاصل گشته است.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، طیف انرژی، احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی و سطوح انرژی هسته‌های زنجیره ایزوتوپی  $^{180-188}\text{Hg}$  در ناحیه گذار فازی شکلی هسته‌ای بین سیستم‌های تغییر شکل یافته دوکی و تحت بررسی گردیده است. بدین منظور یک هامیلتونین دو پارامتری در مدل بوزون برهم‌کنشی انتخاب و با استفاده از نمایش گروه تقارنی  $O(6)$ ، ویژه‌حالات و ویژه‌مقادیر سیستم در این پایه‌ها تعیین شد. همچنین با اثر هامیلتونین بر روی حالت هم‌دوس مناسب این ناحیه گذار فازی شکلی، سطوح انرژی هسته‌های انتخابی حاصل گردید. ثابت‌های هامیلتونین و همچنین عملگر گذار چهار قطبی الکتریکی، از مقایسه روابط با اطلاعات تجربی برآش گردید. نتایج حاصل انطباق قابل قبولی را بین پیش‌بینی‌های مدل و مقادیر تجربی متناظر نشان می‌دهد. همچنین مقادیر به‌دست آمده از مطالعه برای پارامترهای کنترل‌کننده هامیلتونین گذار فازی شکلی، وجود گذار فاز مرتبه اول در این هسته‌ها را تأیید نموده و همچنین هسته  $^{188}\text{Hg}$  را به‌عنوان بهترین نمونه برای تقارن دینامیکی  $O(6)$  معرفی می‌کند. مطالعات مشابهی را می‌توان برای بررسی ساختار هسته‌های خانواده خاک‌های نادر و همچنین هسته‌های پیرامون لایه بسته  $z = 82$  انجام داد.

سطوح انرژی حاصل، نتایج بررسی شده برای پدیده گذار فازی شکلی را تأیید می‌نماید. رنگ‌های مختلف معرف سهم تقارن‌های متفاوت در ساختار هسته‌ها می‌باشد. وجود طیفی از رنگ‌ها، وجود هم‌زمان دو تقارن دینامیکی که مشخصه گذارهای فازی شکلی مرتبه اول می‌باشد را تأیید می‌نماید. همچنین وجود رنگ غالبتر در هسته  $^{186}\text{Hg}$ ، میل این هسته به‌حد دینامیکی خاصی را نشان می‌دهد که مقدار  $\chi = 1$ ، در انطباق با این شکل و واقع شدن این هسته پیرامون حد دینامیکی  $SU(3)$  است. همچنین شکل حاصل برای هسته  $^{188}\text{Hg}$  و مرزهای کاملاً معین رنگ‌های موجود در مقایسه با هسته‌های دیگر، پیشنهاد این هسته به‌عنوان کاندیدای مناسب برای تقارن دینامیکی  $O(6)$  را تأیید می‌نماید. این نتیجه مشابه با پیش‌بینی‌های صورت گرفته در مراجع [17 و 31] می‌باشد که این ناحیه گذار فازی را با استفاده از روش‌های مبتنی بر نظریه میدان بررسی نموده‌اند. کاهش میزان تغییر شکل و افزایش سهم شکل کروی برای هسته‌های  $^{182-186}\text{Hg}$  که در نتایج این مطالعه نیز مشاهده می‌شود، ناشی از افزایش تعداد نوترون‌ها و لذا سهم جفت‌شدگی فرض می‌گردد که مطابق با نتایج منابع ذکر شده است. همچنین نتیجه حاصل برای هسته  $^{188}\text{Hg}$  را می‌توان مشابه با رویکرد انجام شده در منبع [31] به‌صورت پدیده همزیستی شکل‌های کروی و تغییر شکل یافته نیز بررسی نمود که ما در مطالعات آینده به آن خواهیم پرداخت.

### مرجع‌ها

[2] J.M. Eisenberg, W. Greiner, *Nuclear theory*, John Wiley, New York (1987).

[1] F. Iachello, Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition, *Physical Review Letter*. **87** (2001) 052502-052506.

- atomic nuclei, *Review of Modern Physics* **82** (2010) 2155-2189.
- [13] P. Cejnar, J. Jolie, Quantum phase transitions in the interacting boson model, *Progeress of Particle Physics* **62** (2009) 21-256.
- [14] R. Casten, Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei, *Nature Physics* **2** (2006) 811-820.
- [15] D. Zhang, B. Ding, Description of the properties of the low-lying energy states in 100Mo with IBM2, *Science China Phys, Mechanics and Astronomy* **57** (2014) 447-452.
- [16] Y. Zhang, J. Xu, S. Li, Y. An, The prolate-oblate shape phase transition in the interacting boson model, in: *Euoropean Physical Journal, Web of Conferences* **82** (2013) 01014- 01025.
- [17] Y. Zhang, F. Pan, Y.-X. Liu, Y.-A .Luo, J. Draayer, Analytically solvable prolate-oblate shape phase transitional description within the SU (3) limit of the interacting boson model, *Physical Review C* **85** (2012) 064312-064322.
- [18] I. Inci, Test of the coherent state approach in the axially deformed region, *Nuclear Physics A* **924** (2014) 74-82.
- [19] Y. Zhang, Z. Zhang, The robust O (6) dynamics in the prolate-oblate shape phase transition, *Journal of Physics G* **40** (2013) 105107-105118.
- [20] K. Nomura, D. Vretenar, T. Nikšić, B.-N. Lu, Microscopic description of octupole shape-phase transitions in light actinide and rare-earth nuclei, *Physical Review C* **89** (2014) 024312.
- [3] A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear structure*, vol. II, in, Benjamin, New York (1975).
- [4] D. Bonatsos, N. Minkov, D. Petrellis, Bohr Hamiltonian with a deformation-dependent mass term: physical meaning of the free parameter, *Journal of Physics G* **42** (2015) 095104-095115.
- [5] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. Terziev, Z (5): critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition, *Physics Letter B* **588** (2004) 172-179.
- [6] R. Fossion, D. Bonatsos, G. Lalazissis, E (5), X (5), and prolate to oblate shape phase transitions in relativistic Hartree-Bogoliubov theory, *Physical Review C* **73** (2006) 044310-044315.
- [7] F. Iachello, Dynamic symmetries at the critical point, *Physical Review Letter* **85** (2000) 3580-3584.
- [8] P. Cejnar, J. Jolie, Quantum phase transitions studied within the interacting boson model, *Physical Review E* **61** (2000) 6237-6241.
- [9] R. Casten, D. Kusnezov, N. Zamfir, Phase transitions in finite nuclei and the integer nucleon number problem, *Physical Review Letter.* **82** (1999) 5000-5003.
- [10] F. Iachello, Lie Groups, in: *Lie Algebras and Applications*, Springer (2015).
- [11] Y. Zhang, F. Pan, L.-R. Dai, J. Draayer, Triaxial rotor in the SU (3) limit of the interacting boson model, *Physical Review C* **90** (2014) 044310-044320.
- [12] P. Cejnar, J. Jolie, R.F. Casten, Quantum phase transitions in the shapes of

- interacting boson model based on dual algebraic structures for the four-level pairing model, *Journal of Physics G* **43** (2016) 095108-095118.
- [31] A. Leviatan, D. Shapira, Algebraic benchmark for prolate-oblate coexistence in nuclei, *Physical Review C* **93** (2016) 051302-051304 (R).
- [21] E.A. Mccutchan, Nuclear Data Sheets for  $A = 180$ , *Nuclear Data Sheets* **126** (2015) 151-266.
- [22] B. Singh, Nuclear Data Sheets for  $A = 182$ , *Nuclear Data Sheets* **130** (2015) 21-85.
- [23] C.M. Baglin, Nuclear Data Sheets for  $A = 184$ , *Nuclear Data Sheets* **99** (2003) 1.
- [24] C.M. Baglin, Nuclear Data Sheets for  $A = 186$ , *Nuclear Data Sheets* **111** (2010) 275-322.
- [25] B. Singh, Nuclear Data Sheets for  $A = 188$ , *Nuclear Data Sheets* **95** (2002) 387-394.
- [26] H. Sabri, A theoretical study of energy spectra and transition probabilities of  $^{200-204}\text{Hg}$  isotopes in transitional region of IBM, *International Journal of Modern Physics E* **23** (2014) 1450056-1450068.
- [27] H. Sabri, O. Jabbarzade, A. Ghale Asadi, S. K. Mousavi Mobarake, Study of shape coexistence in the  $^{180-190}\text{Hg}$  isotopes by  $\text{SO}(6)$  representation of eigenstates, *International Journal of Modern Physics E* **26** (2017) 1750056-1750064.
- [28] N. Bree *et al.* Shape Coexistence in the Neutron-Deficient Even-Even  $^{182-188}\text{Hg}$  Isotopes Studied via Coulomb Excitation, *Physical Review Letter* **112** (2014) 162701-162714.
- [29] J.E. Garcia-Ramos, K. Heyde, Nuclear shape coexistence: A study of the even-even Hg isotopes using the interacting boson model with configuration mixing, *Physical Review C* **89** (2014) 014306-014322.
- [30] M.A. Jafarizadeh, A.J. Majarshin, N. Fouladi, M. Ghapanvari, Investigation of quantum phase transitions in the spdf