

## Effects of Spin-orbit Interactions on the Electronic Structure of Two-dimensional Quantum Rings

Sahar Habibi Nasab, Ghasem Rezaei\*

Department of Physics, Faculty of Sciences, Yasouj University, Yasouj, Iran

Received: 19.11.2016    Final revised: 16.06.2018    Accepted: 06.05.2019

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14903](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14903)

### Abstract

In this paper, the electronic structure of a two-dimensional quantum ring under the influence of external electric and magnetic fields are studied in the presence of Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions. To do this, at first, the effective Hamiltonian of the system is demonstrated in the presence of applied electric and magnetic fields by considering the spin-orbit coupling. Afterwards, the Schrodinger equation is solved using the matrix diagonalization approach. Then, we investigate the effects of external fields and the size of the ring on the eigenvalues of the system. Our results indicate that spin-orbit interactions, external fields and the ring size have a great influence on the electronic structure of the system.

**Keywords:** Quantum rings, Spin-orbit interactions, External fields, Diagonalization method

---

\*Corresponding Author: grezaei@yu.ac.ir



## تأثیر جفت‌شدگی اسپین مدار بر خواص الکترونی حلقه‌های کوآنتومی

### دوبعدی

سحر حبیبی نسب، قاسم رضایی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

دریافت: 1395/11/30 ویرایش نهائی: 1397/03/26 پذیرش: 1398/02/16

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14903](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14903)

#### چکیده

در این مقاله، یک حلقه کوآنتومی را در نظر گرفته و ترازهای انرژی آن تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی خارجی و در حضور برهم‌کنش اسپین مدار راشبا و درسل هاوس مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، ابتدا هامیلتونی سیستم را در حضور جفت‌شدگی اسپین مدار و در حضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی خارجی نوشته و سپس با استفاده از روش قطری‌سازی، ویژه‌مقدارها سیستم را محاسبه کرده و تأثیر میدان‌های خارجی و اندازه را بر ترازهای انرژی سیستم مطالعه می‌کنیم. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که برهم‌کنش اسپین مدار، میدان‌های خارجی و اندازه حلقه تأثیر قابل توجهی بر ترازهای انرژی سیستم دارند.

**کلیدواژگان:** حلقه‌های کوآنتومی، برهم‌کنش اسپین مدار، میدان‌های خارجی، روش قطری‌سازی

#### مقدمه

گرفته است. در حالت کلی دو نوع برهم‌کنش اسپین مدار در نانو ساختارها مورد بررسی قرار می‌گیرد. یکی ناشی از عدم تقارن وارونی ساختار و دیگری ناشی از عدم وارونی کپه‌ای می‌باشد که به ترتیب برهم‌کنش اسپین مدار راشبا [1] و درسل هاوس [2] نامیده می‌شوند. از آنجا که این برهم‌کنش‌ها حرکت فضایی الکترون را به‌چرخش اسپینی انتقال می‌دهند، در مبحث اسپین‌ترونیک و پردازش اطلاعات کوآنتومی مفید می‌باشند [8-3]. بنابراین، تأثیر برهم‌کنش اسپین مدار بر مغناطش، مقاومت اسپینی و جریان بار در حلقه‌های کوآنتومی به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است [15-9].

در بیشتر مطالعات انجام شده تنها برهم‌کنش راشبا در نظر گرفته و از اثر درسل هاوس چشم‌پوشی شده است [16-19]. اما در ساختارهای ترکیبی III-V معمولاً هر دو برهم‌کنش دارای اهمیت می‌باشند. اخیراً، هامیلتونی

پیشرفت‌های اخیر در فناوری تولید نانو مواد، طیف وسیعی از مطالعات بر پایه ساختارهای الکترونی و ویژگی‌های نوری حلقه‌های کوآنتومی نیم‌رسانا را در پی داشته است. اثرات پیکر کوآنتومی در این ساختارها، ویژگی‌های نوین و منحصر به فردی را ایجاد کرده که در مواد کپه‌ای دیده نمی‌شوند. به‌علت همین ویژگی‌ها، و همچنین قابلیت کاربرد در قطعات الکترونی و اپتوالکترونی، حلقه‌های کوآنتومی نیم‌رسانا توجه بسیاری را در سال‌های اخیر به‌خود جلب نموده‌اند. علاوه‌براین، اسپین الکترون نقش به‌سزایی در ساختار الکترونی حلقه‌های کوآنتومی داشته و می‌تواند به‌طور چشم‌گیری ویژگی‌های فیزیکی این ساختارها را تحت تأثیر قرار دهد. اخیراً، مطالعه برهم‌کنش اسپین مدار در نانو ساختارهای نیم‌رسانا مورد توجه بسیاری قرار

\* نویسنده مسئول: grezaei@yu.ac.ir



پتانسیل حلقه کوانتومی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(r) = -V_0 \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{r}{R_2} \right)^\gamma \right] - \exp \left[ - \left( \frac{r}{R_1} \right)^\gamma \right] \right\} \quad 3$$

که در آن  $V_0$  عمق پتانسیل،  $R_1$  و  $R_2$  به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی حلقه می‌باشند. برای اینکه پتانسیل شعاعی به پتانسیل مربعی نزدیک شود  $\gamma$  را برابر با 35 قرار می‌دهیم.

با توجه به تعریف  $\vec{A} = \frac{Br}{2} \hat{e}_\phi$ ، هامیلتونی سیستم در مختصات قطبی به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + \frac{e^2 B^2}{8m^*} r^2 + \frac{eB}{2m^*} \hat{L}_z + \frac{1}{2} g B \mu_B \sigma_z + e\vec{F} \cdot \vec{r} + \hat{H}_R + \hat{H}_D \quad 4$$

حال با استفاده از تعریف ماتریس‌های پائولی، هامیلتونی‌های راشبا و درسِل هاوس در مختصات قطبی به صورت زیر نتیجه می‌شوند

$$\hat{H}_R = i\alpha (-\sin \phi \sigma_x + \cos \phi \sigma_y) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i\alpha}{r} \times (\cos \phi \sigma_x + \sin \phi \sigma_y) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{B\pi r^2}{\phi_0} \right) \quad 5$$

و

$$\hat{H}_D = i\beta (-\cos \phi \sigma_x + \sin \phi \sigma_y) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i\beta}{r} \times (\sin \phi \sigma_x + \cos \phi \sigma_y) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{B\pi r^2}{\phi_0} \right) \quad 6$$

با استفاده از تعریف ماتریس‌های پائولی هامیلتونی سیستم را می‌توان به صورت یک ماتریس عملگری  $2 \times 2$  نوشت که درایه‌های آن عبارتند از

مؤثر برهم‌کنش اسپین مدار برای یک حلقه کوانتومی شبه یک بعدی توسط شکوری و همکاران ارایه شده است [20]. تأثیر برهم‌کنش اسپین مدار راشبا و درسِل هاوس بر حالت‌های الکترونی یک حلقه کوانتومی دو بعدی توسط نواک و سافران بررسی شد [21].

در این مقاله، به بررسی تأثیر برهم‌کنش اسپین مدار راشبا و درسِل هاوس و همچنین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی خارجی بر ترازهای انرژی و ویژگی‌های نوری یک حلقه کوانتومی دو بعدی پرداخته می‌شود.

## مدل

در این مقاله، یک حلقه کوانتومی نیم‌رسانا را در نظر می‌گیریم. در تقریب جرم مؤثر، هامیلتونی سیستم تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی خارجی و در حضور برهم‌کنش اسپین مدار راشبا و درسِل هاوس به شکل زیر نوشته می‌شود [21 و 22].

$$\hat{H} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m^*} + V(r) \right) + \frac{1}{2} g B \mu_B \sigma_z + e\vec{F} \cdot \vec{r} + \hat{H}_R + \hat{H}_D \quad 1$$

که  $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}$  پتانسیل برداری است،  $m^*$  جرم مؤثر الکترون،  $g$  ضریب لانده،  $\mu_B$  مگنتون بوهر و  $\sigma$  ماتریس پائولی است.  $B$  و  $F$  به ترتیب بزرگی میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی می‌باشند.  $\hat{H}_R$  و  $\hat{H}_D$  به ترتیب، جفت شدگی اسپین-مدار راشبا و درسِل هاوس را نمایش داده و عبارتند از

$$\hat{H}_R = \frac{\alpha}{\hbar} (\hat{p}_y \sigma_x - \hat{p}_x \sigma_y) \quad 2$$

$$\hat{H}_D = \frac{\beta}{\hbar} (\hat{p}_x \sigma_x - \hat{p}_y \sigma_y)$$

$\alpha$  و  $\beta$  ثابت‌های جفت شدگی اثر راشبا و درسِل هاوس و  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) مؤلفه‌های ماتریس پائولی می‌باشند.

با توجه به تعریف مؤلفه‌های تابع موج، درایه‌های ماتریسی عملگر هامیلتونی کل را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \langle n'l' | H_{11} | nl \rangle &= E_{nl}^{(0)} \delta_{n',n} \delta_{l',l} \\ &- eF \langle n'l' | r \cos(\phi) | nl \rangle \\ \langle n'l' | H_{22} | nl \rangle &= \langle n'l' | H_{11} | nl \rangle - g \mu_B B \\ \langle n'l' | H_{12} | nl \rangle &= (\alpha \delta_{l',l-1} - i \beta \delta_{l',l+1}) \\ &\times \int_0^\infty R_{n'l'} \frac{d}{dr} R_{nl} r dr + (-i \alpha \delta_{l',l-1} \\ &+ \beta \delta_{l',l+1}) \int_0^\infty R_{n'l'} \left( i l + \frac{i B \pi e}{\hbar} r^2 \right) R_{nl} dr \\ \langle n'l' | H_{21} | nl \rangle &= \langle nl | H_{12} | n'l' \rangle^* \end{aligned} \quad 12$$

حال فرض می‌کنیم که اعداد کوآنتومی اصلی  $n$  و  $n'$  تنها می‌توانند مقادیر صفر و یک را اختیار کنند. از طرفی به ازای  $l = 0, 1$  ماتریس مشخصه هامیلتونی کل سیستم، ماتریسی است که درایه‌های آن خود یک ماتریس  $4 \times 4$  می‌شود. بنابراین، ماتریس مشخصه هامیلتونی کل یک ماتریس  $8 \times 8$  می‌شود. با قطری نمودن ماتریس هامیلتونی کل ویژه‌مقدارهای مربوط به دو عدد کوآنتومی اصلی نتیجه می‌شوند.

### نتایج و بحث

تأثیر هم‌زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی خارجی و برهم‌کنش اسپین مدار بر ترازهای انرژی حلقه کوآنتومی نیم‌رسانا از جنس گالیم آرسناید بررسی شده است. در محاسبات انجام شده جرم مؤثر الکترون  $m^* = 0.067 m_e$  و  $V_0 = 50 meV$  اختیار شد.

در نگاره 1 تأثیر میدان مغناطیسی بر ترازهای انرژی حلقه کوآنتومی از جنس گالیم آرسناید به‌ازای الف)  $g = 0$  و ب)  $g = -2.15$  با در نظر گرفتن برهم‌کنش اسپین مدار بررسی شده است. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که، با افزایش میدان مغناطیسی، جدا شدگی ترازهایی که بدون در نظر گرفتن برهم‌کنش اسپین مدار تبه‌گن بوده‌اند، افزایش یافته و برخی از آنها به هم نزدیک می‌شوند. اگرچه، در غیاب اسپین الکترون،

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right. \\ &\times \left. \left( i \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{B \pi r^2}{\phi_0} \right)^2 \right] + V(r) + \frac{1}{2} g B \mu_B \\ &- e F r \cos(\phi) \end{aligned} \quad 7$$

$$H_{22} = H_{11} - g B \mu_B$$

$$\begin{aligned} H_{12} &= (\alpha e^{-i\phi} - i \beta e^{i\phi}) \frac{\partial}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{r} (\beta e^{i\phi} - i \alpha e^{-i\phi}) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{i B \pi e}{\hbar} r^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{21} &= -(\alpha e^{i\phi} + i \beta e^{-i\phi}) \frac{\partial}{\partial r} \\ &- \frac{1}{r} (\beta e^{-i\phi} + i \alpha e^{i\phi}) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{i B \pi e}{\hbar} r^2 \right) \end{aligned}$$

با اعمال اثر راشبا و درسل هاوس تابع موج تغییر خواهد کرد. می‌دانیم که اسپین الکترون در دو حالت بالا و پایین قرار می‌گیرد. ویژه‌تابع  $\hat{H}$  را می‌توان ترکیبی از این دو حالت در نظر گرفت

$$\Psi = \Psi_\uparrow \chi_+ + \Psi_\downarrow \chi_- \quad 8$$

که  $\chi_+$  و  $\chi_-$ ، ویژه‌توابع  $\sigma_z$  هستند. همچنین قسمت فضایی تابع موج را می‌توان به صورت زیر نوشت

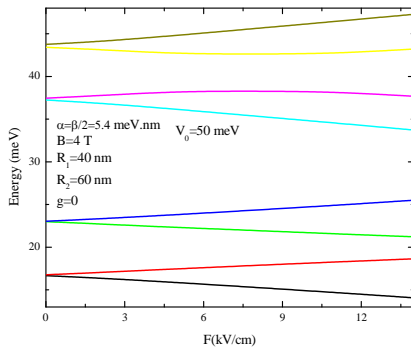
$$\Psi_\uparrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,l} a_{n,l,\uparrow} e^{i l \phi} R_{n,l}(r) \quad 9$$

$$\Psi_\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,l} a_{n,l,\downarrow} e^{i l \phi} R_{n,l}(r) \quad 10$$

معادله‌های 9 و 10 توابع موج فضایی قطبیده با اسپین بالا و اسپین پایین،  $R_{n,l}(r)$  تابع موج شعاعی و  $l$  عدد کوآنتومی مغناطیسی است. با توجه به معادله ویژه مقداری برای هامیلتونی کل داریم

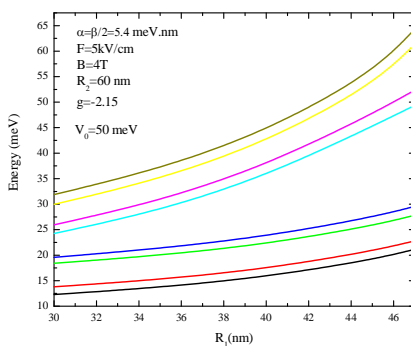
$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \end{pmatrix} \quad 11$$

در نتیجه باعث افزایش اثر اسپین-مدار راشبا می‌شود. در نتیجه جداسازی شاخه‌های مختلف افزایش می‌یابد.



شکل 2. تغییرات ترازهای انرژی بر حسب میدان الکتریکی.

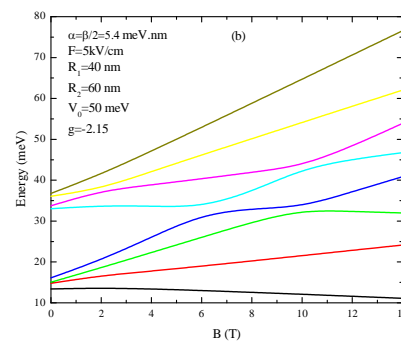
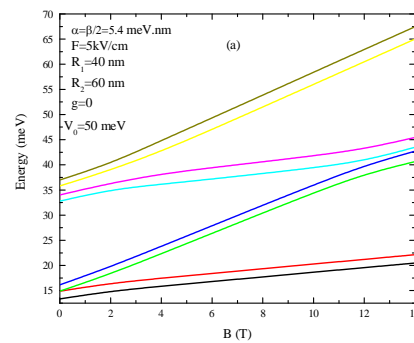
نگاره 3 تغییرات ترازهای انرژی بر حسب شعاع  $R_1$  را نشان می‌دهد.



شکل 3. تأثیر شعاع داخلی بر ترازهای انرژی.

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که افزایش شعاع داخلی ( $R_1$ ) باعث افزایش انرژی حامل‌ها می‌شود. دلیل آن این است که افزایش  $R_1$  باعث کاهش شعاع حلقه شده و محدودیت وارد بر حامل‌ها را افزایش می‌دهد. بنابراین، ترازهای انرژی با افزایش  $R_1$  افزایش می‌یابند.

افزایش میدان سبب برخورد برخی از ترازهای انرژی در برخی از نقاط می‌شود (تبهگنی تصادفی)، برهم‌کنش اسپین مدار و اثر زیمان مربوط به اسپین الکترون این تبهگنی‌های تصادفی را از بین برده و در محل این تبهگنی‌ها یک جداسازی به وجود می‌آورد که به آن پاد تقاطع می‌گویند. با مقایسه شکل‌های الف و ب می‌بینیم که به ازای  $g = -2.15$ ، به دلیل وجود اثر زیمان مربوط به اسپین، شکافتگی ترازها با افزایش میدان مغناطیسی بیشتر است.

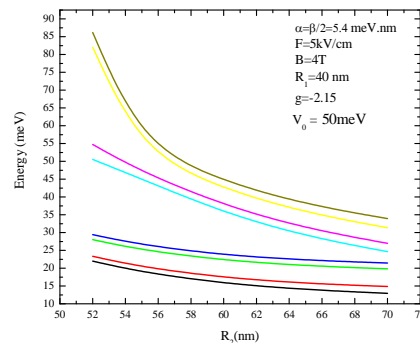


شکل 1. تغییرات ترازهای انرژی بر حسب میدان مغناطیسی، (الف) به ازای  $g = 0$  و (ب) به ازای  $g = -2.15$ .

در نگاره 2 تأثیر میدان الکتریکی خارجی بر ترازهای انرژی حلقه کوآنتومی ترسیم شده است. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که افزایش میدان الکتریکی سبب شکافتگی بیشتر ترازهای انرژی می‌شود. این افزایش شکافتگی به این علت است که میدان الکتریکی خارجی عدم تقارن بیشتر را بر سیستم اعمال نموده و

## مرجع‌ها

- [1] Y.A. Bychkov, E.I. Rashba, Oscillatory effects and the magnetic susceptibility of carriers in inversion layers, *Journal of Physics C* **17** (1984) 6039.
- [2] G. Dresselhaus, Spin-Orbit Coupling Effects in Zinc Blende Structures, *Physical Review* **100** (1955) 580.
- [3] S. Datta, B. Das, Electronic analog of the electro-optic modulator, *Applied Physics Letters* **56** (1990) 665.
- [4] J. Schliemann, J.C. Egues, D. Loss, Nonballistic Spin-Field-Effect Transistor, *Physical Review Letters* **90** (2003) 146801.
- [5] K.C. Nowack, F.H.L. Koppens, Yu. V. Nazarov, L.M.K. Vandersypen, Coherent Control of a Single Electron Spin with Electric Fields, *Science* **318** (2007) 1430.
- [6] S. Bednarek, B. Szafran, Spin Rotations Induced by an Electron Running in Closed Trajectories in Gated Semiconductor Nanodevices, *Physical Review Letters* **101** (2008) 216805.
- [7] P. Földi, B. Molnar, M.G. Benedict, F.M. Peeters, Spintronic single-qubit gate based on a quantum ring with spin-orbit interaction, *Physical Review B* **71** (2005) 033309.
- [8] S. Bellucci, P. Onorato, Ballistic spin rotator based on a  $\Pi$  nanojunction with spin-orbit interaction, *Physical Review B* **77** (2008) 165305.
- [9] J. Splettstoesser, M. Governale, U. Zülicke, Persistent current in ballistic mesoscopic rings with Rashba spin-orbit coupling, *Physical Review B* **68** (2003) 165341.
- [10] J.S. Sheng, K. Chang, Spin states and persistent currents in mesoscopic rings: Spin-orbit interactions, *Physical Review B* **74** (2006) 235315.
- [11] G.H. Ding, B. Dong, Spin-orbit coupling effect on persistent currents in a one-dimensional quantum ring with an Anderson impurity, *Physical Review B* **76** (2007) 125301.
- [12] Q.F. Sun, X.C. Xie, J. Wang, Persistent Spin Current in a Mesoscopic Hybrid Ring with Spin-Orbit Coupling, *Physical Review Letters* **98** (2007) 196801.



شکل 4. تاثیر شعاع خارجی حلقه بر ترازهای انرژی.

چگونگی تغییرات ترازهای انرژی برحسب شعاع خارجی ( $R_2$ ) در نگاره 4 نمایش داده شده است. با توجه به شکل دیده می‌شود که افزایش  $R_2$  سبب کاهش ترازهای انرژی می‌شود. با افزایش  $R_2$  پهنای حلقه افزایش یافته و در نتیجه محدودیت وارد بر حامل‌های بار کاهش می‌یابد. بنابراین، ویژه‌مقدارهای انرژی کاهش می‌یابند.

## نتیجه‌گیری

الکترون محبوس در یک حلقه کوآنتومی دو بعدی با ارتفاع پتانسیل محدود را در نظر گرفتیم. سپس با استفاده از روش قطری سازی ماتریس هامیلتونی کل، تاثیر میدان‌های خارجی و برهم‌کنش اسپین مدار راشبا و درسل هاوز را بر ترازهای انرژی آن بررسی نمودیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که ساختار الکترونی سیستم در حضور برهم‌کنش اسپین مدار به‌طور قابل ملاحظه‌ای با حالت بدون اسپین تفاوت دارد. همچنین، نشان دادیم که ساختار الکترونی سیستم را می‌توان با استفاده از میدان‌های خارجی و اندازه حلقه، دست‌کاری و کنترل نمود. علاوه بر این، نتایج حاصله نشان می‌دهند که برهم‌کنش اسپین مدار و اثر زیمان تبهگنی‌ها را به‌طور کامل از بین برده و پدیده پاد تقاطع را در طیف انرژی به وجود می‌آورند. همچنین، ملاحظه نمودیم که میدان‌های خارجی تأثیر برهم‌کنش اسپین مدار را افزایش می‌دهند.

- [18] G. Cohen, O. Hod, and Eran Rabani, Constructing spin interference devices from nanometric rings, *Physical Review B* **76** (2007) 235120.
- [19] B.H. Wu, J.C. Cao, Magnetotransport through a ring conductor with Rashba spin-orbit interaction, *Physical Review B* **74** (2006) 115313.
- [20] Kh. Shakouri, B. Szafran, M. Esmailzadeh, F.M. Peeters, Effective spin-orbit interaction Hamiltonian for quasi-one-dimensional quantum rings, *Physical Review B* **85** (2012) 165314.
- [21] M.P. Nowak, B. Szafran, Spin-orbit coupling effects in two-dimensional circular quantum rings: Elliptical deformation of confined electron density, *Physical Review B* **80** (2009) 195319.
- [22] M. Akbari, G. Rezaei, R. Khordad, The Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions in a two-dimensional quantum pseudo-dot system, *Superlattices and Microstructures* **101** (2017) 429.
- [13] G.Y. Huang, S.D. Liang, Orbital magnetic phase and pure persistent spin current in spin-orbit coupling mesoscopic rings, *Europhysics Letters* **86** (2009) 67009.
- [14] A.G. Aronov, Y.B. Lyanda-Geller, Spin-orbit Berry phase in conducting rings, *Physical Review Letters* **70** (1993) 343.
- [15] F.E. Meijer, A.F. Morpurgo, T.M. Klapwijk, One-dimensional ring in the presence of Rashba spin-orbit interaction: Derivation of the correct Hamiltonian, *Physical Review B* **66** (2002) 033107.
- [16] D. Frustaglia, M. Hentschel, K. Richter, Quantum Transport in Nonuniform Magnetic Fields: Aharonov-Bohm Ring as a Spin Switch, *Physical Review Letters* **87** (2001) 256602.
- [17] X.F. Wang, P. Vasilopoulos, Spin-dependent magnetotransport through a mesoscopic ring in the presence of spin-orbit interaction, *Physical Review B* **72** (2005) 165336.