

Topological Insulator Phases and Zero-line Channels in Graphene

Zeinab Rashidian*, Amin Salehi

Department of Physics, Faculty of Science, Lorestan University, Khorram Abad, Iran

Received: 14.03.2017 Final revised: 13.07.2019 Accepted: 22.07.2019

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14906](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14906)

Abstract

Topological phases can be induced in single and bilayer graphene in the presence of appropriate spin-orbit coupling and external potentials. We survey the characteristics of the different metallic 1D zero-line channels at bulk-vacuum edges and at interfaces between regions with different bulk topological orders in single and bilayer graphene. We use a tight-binding Hamiltonian for ribbon geometries to study the characteristics of the 1D zero-line channels appearing at the interfaces between regions of different topological phases. Depending on the resulting states, the number of 1D metallic channels at interface and edge differ so that these can be thought as a characterization of the states.

Keywords: Graphene, Armchair, Zigzag, Spin orbit coupling, Topological phase

* Corresponding Author: rashidian.z@lu.ac.ir



فازهای عایق توپولوژی و کانال‌های خط صفر در گرافین

زینب رشیدیان*، امین صالحی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران

دریافت: 1396/11/25 ویرایش نهائی: 1398/04/22 پذیرش: 1398/04/31

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14906](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14906)

چکیده

فازهای توپولوژی را می‌توان در گرافین تک لایه و دو لایه با حضور جفت‌شدگی اسپین-مدار و پتانسیل خارجی ایجاد کرد. در این کار ویژگی‌های مختلف کانال‌های خط صفر یک بعدی فلزی را در اتصال‌های گرافینی تک لایه و دو لایه بررسی می‌کنیم. در واقع اتصال‌های گرافینی مورد بحث در این کار، اتصال‌های بین نواحی با نظم توپولوژی مختلف می‌باشد. برای تحقیق چگونگی پیدایش کانال‌های خط صفر یک بعدی، از روش هامیلتونی بستگی قوی استفاده می‌کنیم. با توجه به حالت‌های حاصل شده، تعداد کانال‌های یک بعدی فلزی در اتصال‌های با لبه‌های مختلف، متفاوت است که این نتیجه، به‌عنوان مشخصه‌ای برای تشخیص مواد تک لایه و دو لایه گرافینی از هم و همچنین روشی برای تمیز دادن نوع لبه‌ها (زیگزاگ یا صندلی شکل) از هم پیشنهاد می‌شود.

کلیدواژه‌گان: گرافین، زیگزاگ، صندلی شکل، جفت‌شدگی اسپین‌مدار، فاز توپولوژی

مقدمه

گرافین کپه‌ای می‌شود. در واقع با ترکیب درجه آزادی دره، اثر نابهنجار دره‌ای هال و فازهای اسپینی هال [12]-9 و [2] به وجود می‌آید. حالت‌های لبه در اتصال با خلأ و مناطق با هال دره‌ای مخالف و همچنین توپولوژی هال نابهنجار برای مواد گرافینی بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است و نشان می‌دهند حالت‌های صفر انرژی [15-13 و 4] از معکوس شدن علامت جرم دیراک حاصل می‌شوند. علاوه بر فاز کوانتومی اسپینی هال در عایق توپولوژیکی، فازهای عایق دیگری برای گرافین‌های دو لایه [16] و سه لایه [17] با حضور اختلاف پتانسیل بین دو لایه و جفت‌شدگی اسپین-مدار راشبای قوی پیشنهاد می‌شود.

در این مقاله، ماهیت وجودی کانال‌های فلزی در فصل مشترک بین نواحی با فازهای عایق توپولوژیکی و سایر نظم‌های توپولوژیکی در گرافین، مورد مطالعه قرار گرفته است. این مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم،

کانال‌های یک بعدی فلزی در اتصال بین مناطق با نظم توپولوژی مختلف و در غیاب فرایند پراکندگی طوری که حالت‌های ضد انتشار فلزی را مخلوط می‌کنند، وجود دارند. به‌عنوان مثال از کانال‌های یک بعدی، می‌توان موارد زیر را نام برد: اثر کوانتومی هال [1] که موجب ایجاد وضعیت لبه‌های توپولوژی در امتداد مرزهای نمونه با حضور میدان‌های مغناطیسی به اندازه کافی قوی می‌شود، اثر کوانتومی اسپینی هال [2] در سیستم‌های ناوردای برگشت زمانی با کانال‌های اسپینی ضد انتشار و همچنین کانال‌های خط صفر ZLC که بین مناطق با جرم‌های مخالف [3-7] در هامیلتونی دیراک به وجود می‌آیند نمونه دیگری از کانال‌های یک بعدی به‌شمار می‌آیند. در مورد گرافین چند لایه مخصوصاً سه‌لایه با چیدمان (ABC)، گاف‌های نزدیک نقاط دیراک منجر به فیزیک هال در میدان مغناطیسی در

*نویسنده مسئول: rashidian.z@lu.ac.ir



را نشان می‌دهد. عمگر σ ، τ و S به ترتیب ماتریس‌های پائولی الکترون در فضای دره، زیرشبکه و اسپین واقعی را نشان می‌دهند.

عبارت چهارم، مدل نزدیکترین همسایه برای جفت‌شدگی اسپین مدار راشبا (RSO) با قدرت جفت‌شدگی λ_R است که از یک میدان الکتریکی عمودی یا برهم‌کنش با زیر لایه در حد انرژی‌های کم به وجود می‌آید:

$$\lambda_R (\sigma_x \tau_z S_y - \sigma_y \tau_z S_x) \quad 3$$

هامیلتونی برای گرافین دو لایه با توجه به شکل هامیلتونی برای هر لایه و جمله برهم‌کنشی بین لایه‌ها ساخته شده است.

$$H_{BLG} = H_{SLG}^T + H_{SLG}^B - t_{\perp} \sum_{i \in T, j \in B} c_i^{\dagger} c_j + \sum_{i \in T} U_T c_i^{\dagger} c_i - \sum_{i \in B} U_B c_i^{\dagger} c_i \quad 4$$

همچنین $t_{\perp} = 0.34 eV$ انرژی جهشی بین دو لایه عمودی است. در ضمن می‌توانیم یک پتانسیل را از طریق پتانسیل‌های U_T و U_B در لایه پایین و بالا قرار دهیم که این خود می‌تواند با یک میدان الکتریکی خارجی به‌طور عمودی ایجاد شود.

جهت محاسبه ویژه‌مقادیر انرژی، هامیلتونی بستگی قوی را برای نانونوارهای گرافینی تک لایه تنها با در نظر گرفتن انرژی جهشی بین نزدیکترین همسایه‌ها و در مورد گرافین دو لایه انرژی جهشی بین لایه‌ای را نیز اضافه می‌کنیم. پهنای نانو نوار را 51 تا سلول واحد زیگزاگ یا صندلی شکل در نظر گرفته‌ایم و طول نانو نوار را 220 تا سلول در نظر گرفته‌ایم. در نهایت برای رسیدن به نتایج دقیق از حل عددی این ماتریس را حل کرده ایم و ویژه‌مقادیر انرژی را به دست آورده‌ایم.

معرفی نظری، شکل هامیلتونی و تعریف فازهای توپولوژیکی مختلف را ارائه می‌دهیم. بخش‌های سوم و چهارم نتایج را برای نوارهای یکنواخت و دو لایه نشان می‌دهد، سپس به‌طور خلاصه نتایج در بخش 5 ذکر شده است.

شکل هامیلتونی

ما مدل لایه‌ای گرافین را با یک اوربیتال π در شکل هامیلتونی بستگی قوی با حضور پتانسیل متناوب زیر شبکه‌ها و جفت‌شدگی اسپین مدار راشبا و ذاتی مطابق شکل زیر به کار [2] می‌بریم:

$$H_{SLG} = - \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} c_i^{\dagger} c_j + \lambda_v \sum_i \xi_i c_i^{\dagger} c_i + i \lambda_{SO} \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} v_{ij} c_i^{\dagger} \sigma_z c_j + i \lambda_R \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} c_i^{\dagger} z \cdot (\sigma \times \hat{d}_{ij}) c_j \quad 1$$

t_{ij} جهش بین نزدیک‌ترین همسایه است که برابر $2.6 eV$ است. $\langle ij \rangle$ جمع روی نزدیکترین همسایه‌ها و $\langle\langle ij \rangle\rangle$ جمع روی دومین همسایه‌ها می‌باشد. $c_j^{\dagger} (c_i)$ عملگرهای خلق (فنا) برای الکترون هستند. برای سادگی، شاخص اسپینی بر روی عملگرهای الکترون را حذف کرده‌ایم. عبارت دوم یک پتانسیل زیرشبکه متناوب است ($\xi_i = \pm 1$) که تفاوت انرژی موضعی بین زیر شبکه‌ها را بیان می‌کند. در اینجا $v_{ij} = \left(\frac{2}{3}\right) (d_1 \times d_2)$ به‌طوری که d_1 و d_2 بردارهای واحد سیستم در امتداد جهش‌های الکترون بین دو پیوند از \mathbf{i} به \mathbf{j} هستند. اثر اصلی عبارت ISO (جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی) متناسب با λ_{SO} معرفی شده است که مقادیر جرم‌های مخالف در دره‌های مخالف و اسپین‌های مخالف

$$\lambda_{SO} \sigma_z \tau_z S_z \quad 2$$

کانال‌های خط صفر در گرافین تک لایه

خطوط جرم صفر در گرافین، در نواحی فصل مشترک با تغییر پتانسیل‌های متناوب به وجود می‌آیند. با گرافین تک‌لایه در حضور پتانسیل متناوب و جفت‌شدگی ISO شروع می‌نماییم. ایده این است که علامت پتانسیل متناوب و جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی ISO را در دو منطقه مختلف نوار به‌طور جداگانه تعویض و تأثیر آن را روی ساختار نواری بررسی کنیم. به‌خاطر وضوح، ما تنها یک گونه اسپینی را در نظر می‌گیریم.

ساختار نواری گرافین تک‌لایه با انتهای زیگزاگ حالت لبه در نوار در شکل 1 نشان داده شده است. ردیف اول حالت‌های گرافین تک لایه با لبه زیگزاگ در حضور پتانسیل‌های متناوب زیر شبکه را نشان می‌دهد. شکست تقارن وارونی فضا ناشی از پتانسیل متناوب منجر به یک اثر هال دره‌ای برای هر گونه اسپینی می‌شود. وگاف جرمی با علامت‌های مخالف برای هر دو دره باز می‌شود. علامت جرم‌ها در نقاط دیراک با نشانه‌های K و K' در شکل نشان داده شده است. در سمت راست این شکل، علامت پتانسیل‌های متناوب در وسط نوار تغییر می‌کنند. حالت‌های پیچ خوردگی یک بعدی را شبیه به حالت‌هایی که در [4] توضیح داده شده است، به دست آوردیم. حالت‌های فلزی در وسط نوار زمانی به وجود می‌آیند که علامت‌های جرم در هر نیمه از نوار متفاوت باشد (یک نیمه از نوار دارای علامت مثبت برای جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی یا پتانسیل متناوب است و نیمه دیگر آن علامت منفی دارد).

سپس در ردیف دوم، حالت‌های زیگزاگ را با حضور جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی رسم می‌کنیم. مدل اسپین مدار برای گرافین تک لایه مشابه آن چیزی است که توسط مدل کین-مله معرفی شده است [2]. در کنار این شکل، حالت‌های پیچ خورده در وسط نوار ظاهر

می‌شوند، و این به علت وارونی علامت جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی در مرکز هر نوار است. جمله جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی به‌تنهایی یک گاف نواری با علامت‌های جرمی مختلف در دره‌های مختلف برای هر گونه اسپینی باز می‌کند که این همان اثر نابهنجار هال دره‌ای است. علامت جرم‌ها در هر دو حالت مثل هال کوانتومی نابهنجار و هال دره‌ای مستقل از اسپین هستند. محل کانال‌های فلزی را می‌توان با توزیع فضایی حالات در نوار مشخص کرد. برای این منظور می‌توان مقدار مطلق مربع تابع موج در هر جایگاه شبکه را رسم کرد. و غیر صفر بودن مربع تابع موج، حضور کانال‌های فلزی را نشان می‌دهد. مشابه با ساختارهای نواری رسم شده برای گرافین تک لایه با لبه زیگزاگ، ساختارهای نواری در شکل 2 برای گرافین با لبه صندلی شکل رسم شده اند.

آنها نیز مجموعه‌ای از ساختارهای نواری مشابه با زیگزاگ متناوب با کمی تفاوت هستند. نکته اول این است که همان‌طور که از سطر اول در شکل 2 دیده می‌شود نوارهای انرژی بدون پاشندگی وجود ندارند. یکی دیگر از نکات قابل توجه این است که حالت‌های چپ و راست موسوم به RL دیده می‌شوند. این حالت‌ها به‌طور همزمان در نوار وجود دارند و مشخصه گرافین با لبه صندلی شکل می‌باشند و در زیگزاگ وجود ندارند. موارد بحث شده در این کار زمانی اتفاق می‌افتد که شکست تقارن وارونی زمان و تقارن وارونی فضا را به‌طور جداگانه با در نظر گرفتن تنها یک گونه اسپینی بررسی کنیم. شکست تقارن پتانسیل‌های ذکر شده فوق به ترتیب باعث دو حالت کوانتومی نابهنجار هال و اثر هال دره‌ای می‌شود. اگر چه اثبات شده که اثر هال دره‌ای تنها به‌خاطر شکست تقارن وارونی فضا ایجاد می‌شود [5,6] و ما در این کار همین دیدگاه را دنبال کرده‌ایم. همچنین ثابت شده است که این حالت حتی

راست نمودار، پتانسیل متناوب در دو نیمه ثابت ولی با علامت‌های مخالف می‌باشد. موقعیت فضایی حالت‌های یک بعدی فلزی و جهت انتشارشان همراه با نظم توپولوژیکی نشان داده شده است. در شکل پایین‌تر، یک حالت نابهنجار هال را مشخص کرده‌ایم که توسط عدد چرن $c=1$ به دست آمده است.

عدد چرن از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$C = \frac{1}{2\pi} \sum_{K,K'} \sum_{n=1,2}^{\infty} \int dk_x dk_y \Omega_n(k_x, k_y) \quad 5$$

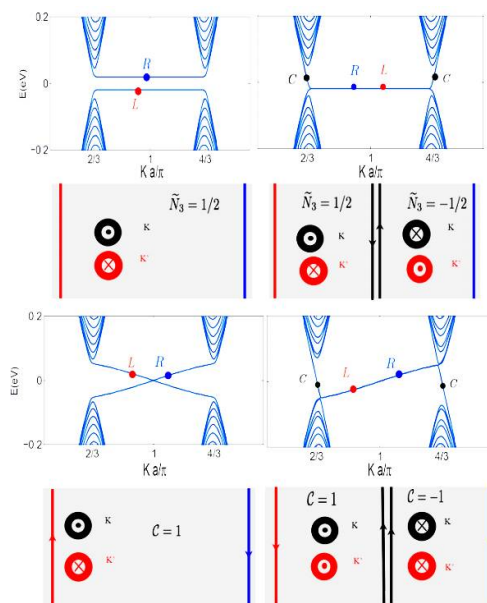
جمع روی دره‌های K و K' می‌باشد و n نوارهای ظرفیت پر شده و Ω_n فاز بری فضای تکانه نوار n می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Omega_n(K) = - \sum_{m \neq n} \frac{2\text{Im} \langle \psi_{nK} | v_x | \psi_{mK} \rangle \langle \psi_{mK} | v_y | \psi_{nK} \rangle}{(\omega_n - \omega_m)^2} \quad 6$$

$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$ و $v_{x(y)}$ عملگر سرعت فرمی است.

همچنین ψ_{nK} تابع موج نوار n دره K است. از معکوس کردن علامت‌های نسبی جرم‌ها در هامیلتونی دیراک در هر دره با استفاده از مدل موثر که توسط هالدین [9] معرفی شد هم‌ارز با مدل کین-مله برای هر گونه اسپینی است. در شکل‌های پایین و در سمت راست شکل ساختار نواری با دو منطقه با اعداد چرن مختلف $c=1$ و $c=-1$ نشان می‌دهیم. دو حالت پیچ‌خوردگی که در جهت یکسان انتشار پیدا می‌کنند، در فصل مشترک بین این دو منطقه ظاهر می‌شوند. جهت k' و k در شکل‌ها نشان‌دهنده علامت جرمی است که شکاف را باز می‌کند.

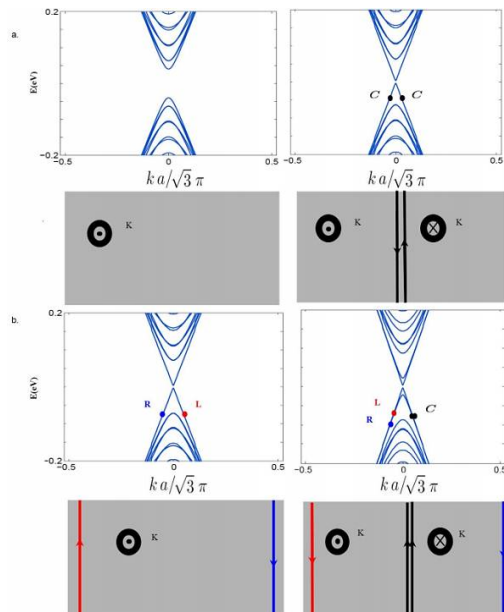
در حضور شکست تقارن وارونی زمان نیز وجود دارد به شرطی که قدرت پتانسیل وارونی فضا بر پتانسیل وارونی زمان غلبه کند [5]. تحلیل‌های مشابهی را برای حوزه‌های دو لایه، با اختلاف پتانسیل بین لایه را همراه با جفت شدگی RSO برای هر دو گونه اسپینی در بخش بعدی انجام می‌دهیم.



شکل 1. حالت‌های لایه‌ای و میانی در یک هندسه زیگزاگ نوار در سیستم با مقادیر جفت‌شدگی اسپین مدار ذاتی و راشبا $\frac{\lambda_{SO}}{t} = 0.01, \frac{\lambda_V}{t} = 0.01$ برای سیستم بدون اسپین. شکل بالایی در سمت چپ شکل، پتانسیل متناوب زیر شبکه در دو نیمه نوار ثابت می‌باشد ولی شکل بالایی در سمت راست نمودار، پتانسیل متناوب در دو نیمه ثابت ولی با علامت‌های مخالف می‌باشد. موقعیت فضایی حالت‌های یک بعدی فلزی و جهت انتشارشان همراه با نظم توپولوژیکی نشان داده شده است. در شکل پایین‌تر، یک حالت نابهنجار هال را مشخص کرده‌ایم که توسط عدد چرن $c=1$ به دست آمده است. در شکل‌های پایین و در سمت راست شکل ساختار نواری با دو منطقه با اعداد چرن مختلف $c=1$ و $c=-1$ نشان می‌دهیم. دو حالت پیچ‌خوردگی که در جهت یکسان انتشار پیدا می‌کنند، در فصل مشترک بین این دو منطقه ظاهر می‌شوند. جهت k و k' در شکل‌ها نشان‌دهنده علامت جرمی است که شکاف را باز می‌کند.

در شکل 1 ساختار نواری را نشان می‌دهیم. شکل بالایی در سمت چپ شکل، پتانسیل متناوب زیر شبکه در دو نیمه نوار ثابت می‌باشد ولی شکل بالایی در سمت

در این حالت نیز مشابه گرافین تک‌لایه، طول ورقه به دو نیمه این بار با جفت شدگی‌های اسپین مدار با علامت مخالف تقسیم شده است. ابتدا با ثابت گرفتن جفت‌شدگی اسپین مدار در دو نیمه، نتایج مشابه گرافین تک‌لایه به دست آمده است. موقعیت مکانی یک بعدی حالت‌های فلزی و جهت‌های منتشر شده از عایق توپولوژیکی برای هر دو لبه‌های زیگزاگ و صندلی شکل دو لایه با علامت ثابت و معکوس ضریب جفت‌شدگی و اختلاف پتانسیل بین لایه‌ها در شکل 3 نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل 3a (سمت چپ نمودار) برآمده، دو حالت لبه‌ای چپ و راست برای ثابت جفت‌شدگی راشبا و اختلاف پتانسیل به وجود می‌آید. همان‌طور که در شکل 3a (سمت راست نمودار) نشان داده شده است یک نوار تبه‌گن وجود دارد که دارای حالت RL برای اختلاف پتانسیل و جفت‌شدگی راشبا در گرافین با لبه‌های صندلی شکل است. در شکل 3b برای تعویض علامت جفت‌شدگی راشبا در دو قسمت نوار علاوه بر حالت‌های پیچ خورده که به دلیل علامت جفت‌شدگی راشبا ظاهر می‌شود، حالت راست و چپ به وجود می‌آیند. با توجه به رفتارهای شکل 3c دیده می‌شود که تعداد حالت‌های پیچ خورده دو برابر می‌شود هنگامی که اختلاف پتانسیل بین دو لایه را در دو نیمه نوار یکسان ولی ضریب جفت‌شدگی اسپین مدار را از یک نیمه به نیمه دیگر در امتداد طول نوار تغییر علامت دادیم.



شکل 2. (رنگی آنلاین) حالت میانی و لبه در یک نوار صندلی شکل برای یک سیستم بدون اسپین است. اساساً حالت صندلی مشابه حالت زیگزاگی است. شکل بالایی در سمت چپ شکل، پتانسیل متناوب زیر شبکه در دو نیمه نوار ثابت می‌باشد ولی شکل بالایی در سمت راست نمودار، پتانسیل متناوب در دو نیمه ثابت ولی با علامت‌های مخالف می‌باشد. در دو شکل پایین تر نیز از چپ به راست جفت‌شدگی اسپین مدار را ثابت و متغیر (منظور ثابت از لحاظ مقدار ولی با علامت‌های مخالف) در نظر گرفته‌ایم.

حالت لبه در گرافین دو لایه

ما بحث خود را به گرافین دو لایه با حضور اختلاف پتانسیل بین لایه‌ها و جفت‌شدگی اسپین مدار راشبا گسترش می‌دهیم. در واقع جفت‌شدگی اسپین مدار راشبا تنها در صورتی ظاهر می‌شود که تقارن وارونی فضا شکسته شود. مشخص شده است که گرافین دو لایه دارای یک فاز عایق قوی توپولوژیکی در حضور جفت‌شدگی است به شرطی که $\lambda_R > \sqrt{U^2 + t_\perp^2}$ باشد. حالت عایق توپولوژیکی نیاز به یک جفت‌شدگی اسپین مدار قوی دارد که از طریق آلابیدن با اتم‌های اضافی به وجود می‌آید.

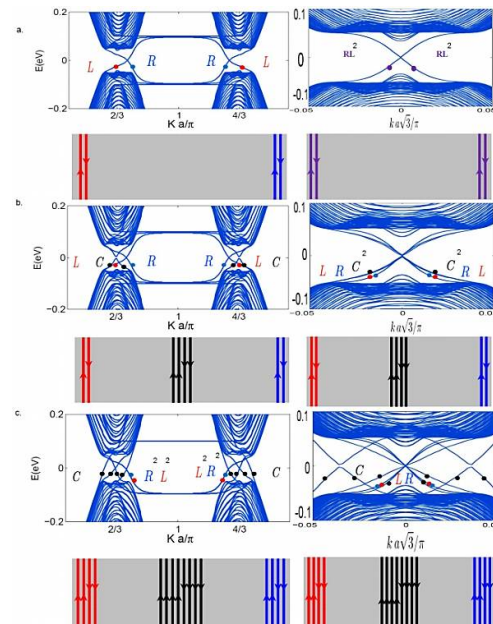
ساختار نواری عایق توپولوژیکی در یک نوار دو لایه در شکل 3 با اختلاف پتانسیل بین لایه‌ای رسم شده است و

که توسط سمنو [5] در چشم انداز گرافین پیشنهاد شده است.

نکته قابل توجه دیگر به حالت‌های پیچ خورده و حالات لبه‌ای در سیستم‌های توپولوژیکی عایق بر می‌گردد. همان‌طور که از وضعیت لبه‌ها و پیچ خوردگی‌ها مشخص می‌شود، بسته به حضور جفت‌شدگی اسپین مدار یا پتانسیل متناوب با تغییر علامت، ما حالت‌های مختلف داریم و این ویژگی می‌تواند به عنوان مشخصه‌ای برای تشخیص مواد تک‌لایه و دو لایه از هم و همچنین روشی برای تمیز دادن نوع لبه‌ها (زیگزاگ یا صندلی شکل) از هم باشد.

مرجع‌ها

- [1] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M. den Nijs, Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential, *Physical Review letters* **49** (1982) 405; Q. Niu, D.J. Thouless, Y.-S. Wu, Quantized hall conductance as a topological invariant, *Physical Review B* **31** (1985) 3372.
- [2] C.L. Kane, E.J. Mele, Quantum spin hall effect in graphene, *Physical Review letters* **95** (2005) 226801.
- [3] I. Martin, Y.M. Blanter, A.F. Morpurgo, Giant intrinsic carrier mobilities in graphene and its bilayer, *Physical Review letters* **100** (2008) 36804.
- [4] J. Jung, F. Zhang, Z. Qiao, A.H. Macdonald, Valley hall kink and edge states in multilayer graphene, *Physical Review B* **84** (2011) 075418
- [5] G.W. Semenoff, V. Semenoff, F. Zhou, Domain walls in gapped graphene, *Physical Review letters* **101** (2008) 087204.
- [6] W. Yao, S.A. Yang, Q. Niu, Edge states in graphene: From gapped flat band to gapless chiral modes, *Physical Review letters* **102** (2009) 096801.
- [7] Z. Qiao, J. Jung, Q. Niu, A.H. MacDonald, Electronic Highways in Bilayer Graphene, *Nano letters* **11** (2011) 3453-3459.



شکل 3. ساختار نواری برای گرافین دو لایه با انتهاهای زیگزاگ و صندلی شکل. شکل‌های سمت راست در ستون اول مربوط به نوار گرافینی با لبه‌ای صندلی شکل و شکل‌های سمت چپ در ستون دوم مربوط به لبه‌های زیگزاگ می‌باشد. نتایج برای حالت زیگزاگ و صندلی شکل یکسان می‌باشد. اما شکل سطر اول 3a، حالات لبه‌ای چپ و راست را برای زیگزاگ و صندلی شکل با در نظر گرفتن ثابت جفت‌شدگی راشبا و اختلاف پتانسیل ثابت در دو نیمه نشان می‌دهد. در شکل 3b برای تعویض علامت جفت‌شدگی راشبا در دو قسمت نوار علاوه بر حالت‌های پیچ خورده که به دلیل علامت جفت‌شدگی راشبا ظاهر می‌شود، حالت راست و چپ به وجود می‌آیند. با توجه به رفتارهای شکل 3c دیده می‌شود که تعداد حالت‌های پیچ خورده دو برابر می‌شود هنگامی که اختلاف پتانسیل بین دو لایه را در دو نیمه نوار یکسان ولی ضریب جفت‌شدگی اسپین مدار را از یک نیمه به نیمه دیگر در امتداد طول نوار تغییر علامت دادیم.

بحث و نتیجه‌گیری

همان‌طور که حضور دیوارهای حوزه (منظور نواریایی که به دو ناحیه در امتداد عرض تقسیم می‌شدند دو ناحیه با پتانسیل متناوب یا جفت‌شدگی اسپین مدار با علامت مخالف) در نواریا اجتناب ناپذیر است، ضرایب متغیر جفت‌شدگی اسپین مدار و پتانسیل وارونی فضا دارای علامت یکسان در طول نوار نیستند، پس ما باید انتظار داشته باشیم که جریان مداری در امتداد ورق‌های گرافینی داریم. این همان نتیجه‌ای است

- [14] F. Zhang, J. Jung, A.H. MacDonald, Spontaneous Chiral Symmetry Breaking in Bilayer Graphene, *Journal of Physics: Conference Series* **334** (2012) 012002.
- [15] M. Killi, S. Wu, A. Paramekanti, Band structures of bilayer graphene superlattices, *Physical Review letters* **107** (2011) 086801.
- [16] Z.H. Qiao, W.-K. Tse, H. Jiang, Y. Yao, Q. Niu, Two-dimensional topological insulator state and topological phase transition, *Physical Review letters* **107** (2011) 256801.
- [17] X. Li, Z. Qiao, J. Jung, Q. Niu, Majorana fermions in superconducting nanowires without spin-orbit coupling, *Physical Review B* **85** (2012) 201404 (R).
- [8] R. Jackiw, Zero modes of the vortex-fermion system, *Nuclear Physics B* **180** (1981) 681-691.
- [9] F.D.M. Haldane, Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels, *Physical Review Letters* **61** 2015 (1988).
- [10] D. Xiao, W. Yao, Q. Niu, Valley-Contrasting Physics in Graphene, *Physical Review letters* **99** 236809 (2007).
- [11] F. Zhang, J. Jung, G.A. Fiete, Q. Niu, A.H. MacDonald, Spontaneous Quantum Hall States in Chirally Stacked Few-Layer, *Physical Review letters* **106** 156801 (2011).
- [12] J. Jung, F. Zhang, A.H. MacDonald, Lattice theory of pseudospin ferromagnetism in bilayer graphene, *Physical Review B* **83** 115408 (2011).
- [13] J. Li, I. Martin, M. Büttiker, A.F. Morpurgo, Topological origin of subgap conductance in insulating bilayer graphene, *Nature Physics* **7** (2011) 38.