

# Radiative Correction of the Casimir Energy for the Scalar Field with the Mixed Boundary Condition in 3 + 1 Dimensions

Madad Ali Valuyan\*

Department of Physics, Semnan Branch, Islamic Azad University, Semnan, Iran

Received: 05.01.2017    Final revised: 16.02.2018    Accepted: 06.05.2019

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14916](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14916)

## Abstract

In the present study, the zeroth- and first-order radiative correction of the Casimir energy for massive and massless scalar fields, confined with mixed boundary conditions (Dirichlet-Neumann) between two parallel plates in  $\phi^4$  theory, were computed. Two issues in performing calculations in this work are essential: first, to renormalize the bare parameters of the problem, a systematic method was used, which allows all influences from the boundary conditions to be imported in all elements of the renormalization program. This idea yields our counterterms appearing in the renormalization program to be position-dependent. Using the box subtraction scheme as a regularization technique is the other noteworthy point in the calculation. In this scheme, by subtracting the vacuum energies of two similar configurations from each other, regularizing divergent expressions and their removal process were significantly facilitated. All the obtained answers for the Casimir energy with the mixed boundary condition were consistent with well-known physical grounds. We also compared the Casimir energy for the massive scalar field confined with four types of boundary conditions (Dirichlet, Neumann, a mix of them and Periodic) in 3+1 dimensions with each other, and the sign and magnitude of their values were discussed.

**Keywords:** Casimir energy, renormalization, boundary condition, regularization

---

\* Corresponding author: m-valuyan@sbu.ac.ir



## تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی مخلوط در

### 1+3 بعد

مددعلی ولوئیان\*

گروه فیزیک، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

دریافت: 1397/09/27 ویرایش نهائی: 1398/03/18 پذیرش: 1398/04/16

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14916](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14916)

#### چکیده

در این مقاله، مرتبه صفرم و مرتبه اول از تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر (جرم‌دار و بدون جرم) محدود شده با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) بین دو صفحه موازی در  $3+1$  بعد محاسبه شده است. دو نکته در فرآیند انجام این محاسبه قابل توجه است. یکی از این نکات، استفاده از یک برنامه بازهنجارش متفاوت و البته سازگار با شرایط مرزی حاکم بر مسئله است. در این برنامه بازهنجارش جهت دستیابی به پارامترهای فیزیکی موجود در لاگرانژی (به‌عنوان مثال: جرم میدان و ثابت جفت شدگی) از کاترترم‌های سازگار با شرط مرزی و البته وابسته به مکان استفاده می‌شود. نکته دیگر در فرآیند این محاسبه، استفاده از روش منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها است. در روش منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها، مشابه با ساختار اصلی یک ساختار دیگر در نظر گرفته می‌شود و اختلاف انرژی‌های خلأ مربوط به این دو ساختار در حدهای مناسب محاسبه می‌شود. این امر موجب می‌شود واگرایی‌های دخیل در محاسبات به‌نحو شفاف و روشنی یکدیگر را حذف نمایند. پاسخ‌های به‌دست آمده برای هر دو مرتبه انرژی کازیمیر (مرتبه صفر و مرتبه اول از تصحیح تابشی) در نمودارهای مختلف رسم شده و این نمودارها نشان می‌دهند که سازگاری مناسب و فیزیکی در پاسخ‌ها وجود دارد. نکته حائز اهمیت اینکه پاسخ به‌دست آمده در این مقاله در مرتبه اول تصحیح تابشی با پاسخ گزارش شده در این مرتبه متفاوت است اما سازگاری‌های قابل انتظار فیزیکی را برآورده می‌کند.

**کلیدواژگان:** انرژی کازیمیر، بازهنجارش، شرط مرزی، منظم‌سازی

#### مقدمه

هرچند دقت آزمایش صورت گرفته توسط اسپارنای بسیار بالا نبود، اما اندازه‌گیری‌های دیگری پس از او و با برطرف نمودن نقایص آزمایش اسپارنای انجام شد، که بر درستی پیش‌بینی کازیمیر صحنه گذاشتند. همان‌طور که می‌دانیم انرژی کازیمیر از اختلاف بین دو

بیش از 60 سال پیش انرژی کازیمیر به‌عنوان یک اثر ماکروسکوپیکی ناشی از قطبش خلأ<sup>1</sup> توسط کازیمیر<sup>2</sup> مطرح گردید [1]. مقاله کازیمیر برای مدتی ناشناخته باقی ماند، تا اینکه اولین تلاش برای مشاهده این پدیده توسط اسپارنای<sup>3</sup> در سال 1958 انجام گرفت [2].

\* نویسنده مسئول: [m-valuyan@sbu.ac.ir](mailto:m-valuyan@sbu.ac.ir)

<sup>1</sup> Vacuum polarization

<sup>2</sup> H.B.G. Casimir

<sup>3</sup> M.J. Sparnaay



مثال: جرم میدان<sup>12</sup> و یا ثابت جفت شدگی<sup>13</sup>. همان‌طور همان‌طور که می‌دانیم وظیفهٔ بازبهنجارش<sup>14</sup> پارامترهای برهنه موجود در لاگرانژی معمولاً برعهدهٔ کانتترم‌ها<sup>15</sup> نهاده می‌شود و این کانتترم‌ها هستند که در برنامهٔ بازبهنجارش واگرایی‌های ناشی از پارامترهای برهنه را در خود هضم کرده و پارامترهای فیزیکی لاگرانژی را به‌دست می‌دهند. در اجرای برنامهٔ بازبهنجارش در بسیاری از مقالات گذشته از کانتترم‌های فضای آزاد<sup>16</sup> برای بازبهنجارش کمیت‌های برهنه استفاده شده است [7-10]. این امر حتی در مسائلی که میدان کوآنتومی در آنها تحت اثر یک شرط مرزی بوده است، نیز انجام پذیرفته است. عقیدهٔ ما براین است که، اگر در مسئله‌ای میدان‌های کوآنتومی تحت اثر یک شرط مرزی قرار دارند، بنابراین برنامهٔ بازبهنجارش مربوط به این میدان نیز باید به‌گونه‌ای اجرا شود که با شرط مرزی اعمال شده، سازگاری مناسب را داشته باشد. در واقع انتظار می‌رود که، همهٔ اثرات ناشی از شرط مرزی روی تک‌تک‌المان‌های مربوط به برنامهٔ بازبهنجارش تأثیرگذار باشد. در این امر، کانتترم‌ها به‌عنوان یکی از المان‌های برنامهٔ بازبهنجارش نمی‌توانند مستثنا باشند. لذا، استفاده از کانتترم مربوط به فضای آزاد (کانتترم خلاً) در برنامهٔ بازبهنجارش، بدون در نظر گرفتن شرایط جدید حاکم بر میدان کوآنتومی (مثلاً شرط مرزی و یا توپولوژی فضا) نمی‌تواند درست باشد. عدم انتخاب صحیح کانتترم منجر به این خواهد شد که، برنامهٔ بازبهنجارش به‌درستی عمل نکرده و در نهایت برای

انرژی خلاً<sup>1</sup> در صورت حضور شرط مرزی غیر بدیهی<sup>2</sup> و عدم حضور آن حاصل می‌شود. اثر کازیمیر را می‌توان به‌عنوان یکی از جالب‌ترین تجلیات ویژگی‌های غیر بدیهی حالت خلاً در نظریهٔ کوآنتومی میدان<sup>3</sup> برشمرد که در واقع ناشی از تغییر دو قطبش خلاً توسط شرایط مرزی یا هندسه است. به عبارت دیگر، این اثر نتیجه‌ای از اعوجاج و دگرش در طیف نوسانات خلاً با محدود شدن حجم کوانتش و یا غیر بدیهی شدن توپولوژی<sup>4</sup> فضا است. همان‌طور که می‌دانیم مجموع انرژی ناشی از فرکانس‌های مجاز در خلاً، یک مقدار واگرا<sup>5</sup> و بینهایت است. وقتی در همین خلاً یک شرط مرزی دلخواه را قرار می‌دهیم فرکانس‌های مجاز تغییر خواهند کرد، اما باز هم مجموع انرژی ناشی از کل این فرکانس‌ها واگراست. کازیمیر در سال 1948 نشان داد که اختلاف این دو مقدار واگرا (انرژی خلاً) منجر به یک کمیت مشاهده پذیر<sup>6</sup>، قابل اندازه‌گیری و البته متناهی<sup>7</sup> خواهد شد که بعدها به نام انرژی کازیمیر شهرت یافت [3-5]. تصحیحات تابشی<sup>8</sup> انرژی کازیمیر اولین بار توسط برداگ<sup>9</sup> و همکاران ایشان در سال 1985 مورد بررسی واقع گردید، و در سال‌های بعد نیز توجه ویژه‌ای به این مقوله صورت پذیرفته است [6]، به‌طوری‌که برای میدان‌های کوآنتومی مختلف با شرایط مرزی گوناگون در ساختارهای<sup>10</sup> متعدد این کمیت محاسبه شده است. آن چیزی که در محاسبهٔ تصحیحات تابشی انرژی کازیمیر اهمیت دارد، بازبهنجارش پارامترهای برهنه<sup>11</sup> موجود در لاگرانژی است (به‌عنوان

<sup>10</sup> Configuration

<sup>11</sup> Bare parameters

<sup>12</sup> Mass of the field

<sup>13</sup> Coupling constant

<sup>14</sup> Renormalization

<sup>15</sup> Counterterm

<sup>16</sup> Free space

<sup>1</sup> Vacuum energy

<sup>2</sup> Non-trivial boundary condition

<sup>3</sup> Quantum field theory

<sup>4</sup> Topology

<sup>5</sup> Divergent

<sup>6</sup> Observable quantity

<sup>7</sup> Finite

<sup>8</sup> Radiative correction

<sup>9</sup> Bordag

صفحه مقابل شرط مرزی نیومن را ارضا نماید. شایان ذکر است که پاسخ‌های به‌دست آمده در این مقاله با آنچه در [11] ذکر شده است متفاوت بوده اما با مبانی قابل انتظار فیزیکی کاملاً سازگار است. در مرجع [11] محاسبه تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر محدود شده با شرط مرزی‌های مختلف در ابعاد یک، دو و سه بعد فضایی با استفاده از کانترا ترم آزاد انجام پذیرفته است. نتیجه این محاسبه برای ابعاد یک و سه بعد فضایی همگرا بوده است. اما پاسخ همین مسئله در دو بعد فضایی و اگر به‌دست آمده است. در واقع به نظر می‌رسد کانترا ترم آزاد جهت بازبهنجارش پارامترهای برهنه لاگرانژی در یک سیستم محدود شده با شرط مرزی غیربدهی، قادر به حذف همه واگرایی‌ها نیست و همین امر منجر به بروز واگرایی در بعضی کمیت‌های فیزیکی (به‌مانند انرژی کازیمیر) گردیده است. زیرا وقتی در همان مسائل به‌جای استفاده از کانترا ترم آزاد از کانترا ترم سازگار با شرایط مرزی استفاده می‌کنیم، نه تنها مسئله را به‌صورت خودسازگار<sup>7</sup> حل کرده‌ایم، بلکه پاسخ‌ها در تمامی ابعاد فضایی اعم از بعدها ی زوج و یا غیر آن همگرا و سازگار با مبانی فیزیکی به‌دست آمده است، و این همان چیزی است که در این مقاله نیز برای شرط مرزی مخلوط در  $3+1$  بعد انجام پذیرفته است.

جهت حذف واگرایی‌های موجود در فرایند محاسبات انرژی کازیمیر، استفاده از روش‌های منظم‌سازی<sup>8</sup> اجتناب‌ناپذیر است. روش‌های مختلفی برای منظم سازی در طی شصت سال گذشته تاکنون معرفی شده است، که می‌توان از بعضی از آنها به‌روش تابع زتا<sup>9</sup>

تعدادی از کمیت‌های فیزیکی (به‌عنوان مثال انرژی کازیمیر) مقادیر و اگر به‌دست آید [11]. البته اعمال شرایط مرزی حاکم بر مسئله در برنامه بازبهنجارش منجر به بدست آمدن کانترا ترم‌های وابسته به مکان<sup>1</sup> در آن خواهد شد. در تعدادی از مقالات گذشته این امر مورد توجه قرار گرفته است و برای اولین بار سادات گوشه و همکاران وی به معرفی یک روش بازبهنجارش پرداخته‌اند، که در آن شرط مرزی حاکم بر مسئله در برنامه بازبهنجارش به‌صورت سیستماتیک<sup>2</sup> و سازگار<sup>3</sup> ورود یافته و این ورود منجر به یافتن کانترا ترم‌های وابسته به مکان در برنامه بازبهنجارش شده است [12]. با استفاده از این روش بازبهنجارش، تصحیحات تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر با شرایط مرزی دیریکله<sup>4</sup> در یک، دو و سه بعد فضایی بین دو صفحه موازی به‌دست آمده است و پاسخ‌های به‌دست آمده در کلیه موارد نیز سازگار با مبانی شناخته شده فیزیکی بوده است [13-15]. ارائه یک پاسخ همگرا<sup>5</sup> برای تصحیح تابشی انرژی کازیمیر مربوط به میدان اسکالر در دو بعد فضایی، هم برای یک رویه تخت و هم برای یک رویه خمیده، که معمولاً همراه با پیچیدگی‌های بیشتری است، نیز یکی دیگر از مزیت‌های روش بازبهنجارش مذکور است [16، 17]. در این مقاله، نیز با استفاده از روش بازبهنجارش مذکور، تصحیح تابشی انرژی کازیمیر را برای میدان اسکالر تعریف شده در نظریه<sup>4</sup>  $\phi$  بین دو صفحه موازی با شرط مرزی مخلوط<sup>6</sup> (دیریکله-نیومن) محاسبه خواهیم کرد. منظور از شرط مرزی مخلوط، شرط مرزی است که در آن تابع میدان کوآنتومی باید روی یکی از صفحات شرط مرزی دیریکله را و روی

<sup>7</sup> Self-consistent

<sup>8</sup> Regularization technique

<sup>9</sup> Zeta function

<sup>1</sup> Position-dependent counterterms

<sup>2</sup> Systematic

<sup>3</sup> Compatible

<sup>4</sup> Dirichlet boundary condition

<sup>5</sup> Convergent

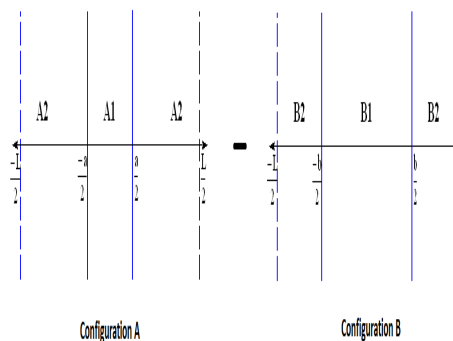
<sup>6</sup> Mixed boundary condition

حال رابطه انرژی کازیمیر برای دو صفحه موازی به فاصله  $a$  به صورت زیر تعریف می شود: [21, 22]

$$E_{\text{Cas.}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} (E_A - E_B) \quad 1$$

که در آن  $E_A$  و  $E_B$  به ترتیب کل انرژی خلأ مربوط به ساختارهای  $A$  و  $B$  است. در تعاریف قدیمی تر برای محاسبه انرژی کازیمیر، اختلاف انرژی خلأ بدون حضور شرط مرزی (فضای مینکوفسکی)<sup>6</sup> از انرژی خلأ با حضور شرط مرزی محاسبه می شود. اما در روش کم کردن جعبه ها، فضای مینکوفسکی با ساختاری به مانند ساختار  $B$  جایگزین شده است. به راحتی می توان نشان داد، که در حدهای مناسب ( $L \rightarrow \infty$  و  $b \rightarrow \infty$ ) ساختار  $B$  به مانند فضای مینکوفسکی عمل می کند. مزیت نسبی روش کم کردن جعبه ها در این است که، پارامترهایی که ناشی از ساختار  $B$  بوده و در فرایند محاسبات ورود خواهند یافت به مانند منظم ساز<sup>7</sup> عمل کرده و این منظم سازها به روند حذف واگرایی ها کمک شایانی می نماید. نکته دیگر در استفاده از روش کم کردن جعبه ها، بی نیاز بودن آن در استفاده از تمدید تحلیلی<sup>8</sup> جهت حذف واگرایی ها است. همان طور که می دانیم، تمدید تحلیلی در محاسبات انرژی کازیمیر خود موجب فراهم شدن بستری برای بعضی از ابهامات می گردد، که بی نیاز بودن روش کم کردن جعبه ها در استفاده از تکنیک تمدید تحلیلی به شفافیت آن در فرایند حذف واگرایی ها می افزاید [21]. در حالت کلی در منظم سازی کم کردن جعبه ها

روش تابع گرین<sup>1</sup> و روش بسط پراکندگی<sup>2</sup>، تکنیک منظم سازی تابع قطع<sup>3</sup> و منظم سازی ابعادی<sup>4</sup> و... نام برد [18-20]. هر یک از تکنیک های منظم سازی با توجه به مزیت ها و یا معایب خود در مسائل مختلف به کارگیری می شوند. در این مقاله از روش منظم سازی کم کردن جعبه ها<sup>5</sup> استفاده شده است. برای محاسبه انرژی کازیمیر با استفاده از این روش، معمولاً دو ساختار مشابه در نظر گرفته می شود، و انرژی های خلأ این دو ساختار از هم کم می شوند. به عنوان مثال، برای محاسبه انرژی کازیمیر بین دو صفحه موازی با فاصله صفحات  $a$ ، آن را در بین دو صفحه موازی دیگر با فاصله صفحات  $L > a$  محبوس می کنیم. نام این ساختار را به مانند آنچه در شکل 1 نشان داده شده است، با عنوان ساختار  $A$  در نظر می گیریم. ساختار  $B$  را نیز به مانند ساختار  $A$  معرفی می کنیم. در ساختار  $B$  نیز دو صفحه موازی به فاصله  $b$  بین دو صفحه موازی دیگر به فاصله  $L > b$  محبوس شده اند.



شکل 1. ساختار رسم شده در سمت راست ساختار  $B$  و ساختار رسم شده در سمت چپ ساختار  $A$  را نشان می دهد. در هر دو ساختار دو صفحه موازی در بین دو صفحه موازی دیگر به فاصله  $L$  محبوس شده اند.

<sup>5</sup> Box subtraction scheme

<sup>6</sup> Minkowski space

<sup>7</sup> Regulator

<sup>8</sup> Analytic continuation

<sup>1</sup> Green's function formalism

<sup>2</sup> Multi-scattering expansion

<sup>3</sup> Cut-off regularization technique

<sup>4</sup> Dimensional regularization technique

مرزی مذکور محاسبه می‌شود. در بخش 4 به جمع بندی نتایج حاصله می‌پردازیم.

### مرتبه صفر انرژی کازیمیر

رابطه انرژی نقطه صفر<sup>1</sup> خلأ را برای میدان اسکالر محدود شده با شرط مرزی مخلوط بین دو صفحه موازی به فاصله  $a$  از هم در  $3+1$  بعد می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E^{(0)} = \frac{1}{2} \iint \frac{L^2 d^2 k}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \quad 2$$

که در آن  $\omega_n = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2}$  فرکانس‌های مجاز در انرژی خلأ بوده و  $m$  جرم مربوط به میدان اسکالر می‌باشد. برای محاسبه انرژی کازیمیر، قبل از به‌کارگیری تعریف ارائه شده در رابطه 1 جهت به‌انجام رساندن روش کم‌کردن جعبه‌ها، از رابطه ایبل-پلانا به فرم ذیل برای تبدیل عبارت جمع<sup>2</sup> موجود در معادله 2 به انتگرال استفاده می‌کنیم [23]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \mathcal{F}(x) dx - i \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{F}(it) - \mathcal{F}(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \quad 3$$

اولین جمله در سمت راست تساوی فوق معمولاً دارای مقداری واگراست و جمله انتگرالی<sup>3</sup> نامیده می‌شود و آخرین جمله در سمت راست تساوی فوق جمله برنچکات<sup>4</sup> گفته می‌شود که معمولاً دارای مقداری متناهی است. اکنون با استفاده از روابط 1 و 2 و همچنین با استفاده از رابطه فوق، می‌توان اختلاف انرژی‌های خلأ دو ساختار  $A$  و  $B$  را به صورت زیر نوشت:

انرژی خلأ دو ساختار مشابه در یک شرایط حدی خاص از هم کم می‌شوند. این شرایط حدی در عمل باید به‌گونه‌ای باشد تا، با تعریف انرژی کازیمیر-که در واقع اختلاف انرژی نقطه صفر یک ساختار با شرایط مرزی غیربدیهی از انرژی خلأ مربوط به فضای مینکوفسکی است-منافاتی نداشته باشد. ما اعتقاد داریم که هرگاه بتوان چنین شرایط حدی را در اختلاف دو انرژی خلأ مربوط به دو ساختار مشابه ایجاد کرد، می‌توان انرژی کازیمیر را با استفاده از روش کم کردن جعبه‌ها در آن ساختار پیاده سازی نمود. در مقاله [16,17] این کار برای کره  $S^2$  و  $S^3$  صورت پذیرفته است و تعمیم آن برای دیگر فضاهاى خمیده و یا نا اقلیدسی نیز دور از انتظار نیست و می‌تواند ممکن باشد. لذا در این مقاله نیز، جهت محاسبه مرتبه صفرم و اول از تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) بین دو صفحه موازی در  $3+1$  بعد و برای حذف واگرایی‌ها از روش مذکور بهره جستیم. پاسخ‌های به‌دست آمده در مرتبه صفرم انرژی کازیمیر با جواب‌های موجود در گذشته تطابق کامل داشته و برای مرتبه اول تصحیح تابشی استفاده از روش مذکور موجب دستیابی به پاسخ‌های متفاوت، اما سازگار و فیزیکی گردیده است [11]. در بخش آتی، در ابتدا به محاسبه مرتبه صفرم از انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) پرداخته و در بخش سوم مرتبه اول تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای شرط

<sup>3</sup> Integral term

<sup>4</sup> Branch-cut term

<sup>1</sup> Zero point energy

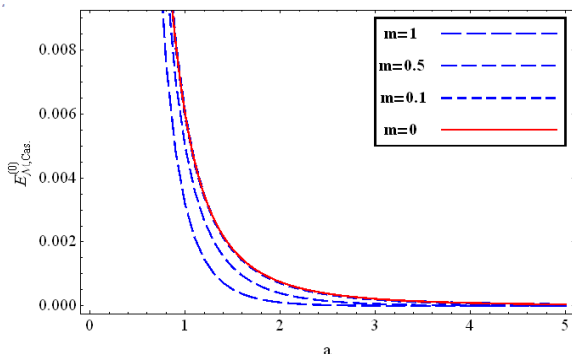
<sup>2</sup> Summation term

صفحه موازی با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) به صورت زیر به دست می آید:

$$E_{Cas.}^{(0)} = \frac{L^2 m^2}{8\pi^2 a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} K_2(2maj)}{j^2} \quad 7$$

که در آن  $K_2(\alpha)$  تابع بسل اصلاح<sup>1</sup> شده است. معمولاً در مباحث مربوط به انرژی کازیمیر، بررسی حد بدون جرم<sup>2</sup> میدان و حد میدان با جرم های سنگین<sup>3</sup> از مقوله های مورد توجه است. معادله<sup>7</sup> برای میدان های بدون جرم ( $m \rightarrow 0$ ) و میدانی با جرم های بسیار بزرگ ( $m \gg 1$ ) به عبارات زیر منتهی خواهد شد: [14-17]

$$E_{Cas.}^{(0)} \rightarrow \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{L^2 \pi^2}{1440 a^3} & \text{as } m \rightarrow 0; \\ \frac{1}{16} \frac{m}{\pi a} \sqrt{\frac{m}{\pi a}} e^{-2ma} & \text{as } ma \gg 1. \end{cases} \quad 8$$



**شکل 2.** در این نمودار میزان انرژی کازیمیر به ازای جرم های  $m = \{1; 0.5; 0.1; 0\}$  برحسب فاصله دو صفحه ( $a$ ) رسم شده است. نزدیک شدن نمودار انرژی مربوط به میدان جرم دار به نمودار انرژی کازیمیر مربوط به میدان بدون جرم در روند کاهش جرم مشهود است.

توضیح اینکه مقادیر به دست آمده برای این مرتبه از انرژی کازیمیر با آنچه در مقالات گذشته در این خصوص گزارش شده است، تطابق کامل دارد [11]. در شکل 2 مقادیر مربوط به انرژی کازیمیر را برای

$$E_A^{(0)} - E_B^{(0)} = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left[ \frac{a}{\pi} \int_0^\infty (k^2 + \xi^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} d\xi + \frac{2a}{\pi} \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^\infty \frac{(\eta^2 - k^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{2a\eta+1}} d\eta \right] + \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty k dk \left[ \frac{L-a}{2\pi} \int_0^\infty (k^2 + \xi^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} d\xi + \frac{L-a}{\pi} \int_{\sqrt{k^2+m^2}}^\infty \frac{(\eta^2 - k^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{(L-a)\eta+1}} d\eta \right] - \{a \rightarrow b\} \quad 4$$

جملات اول هر گروه در عبارت فوق، که همان جمله انتگرالی رابطه ایبل-پلانا هستند، واگرا بوده و می توان نشان داد که این واگرایی به ازای کلیه مقادیر متناهی از  $a, L, m$  به صورت زیر حذف خواهند شد:

$$\frac{L^2}{4\pi^2} \left[ a + 2 \frac{L-a}{2} - b + 2 \frac{L-b}{2} \right] \int_0^\infty k dk \int_0^\infty (k^2 + \xi^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} d\xi = 0 \quad 5$$

تنها جملات باقیمانده از رابطه 4 همان جملات برنچکات ایبل-پلانا است و داریم: [14]

$$E_A^{(0)} - E_B^{(0)} = \frac{L^2 a}{2\pi^2} \int_m^\infty d\eta \int_0^{\sqrt{\eta^2 - m^2}} k dk \frac{\sqrt{\eta^2 - k^2 - m^2}}{e^{2a\eta+1}} + \frac{L^2(L-a)}{2\pi^2} \int_m^\infty d\eta \int_0^{\sqrt{\eta^2 - m^2}} k dk \frac{\sqrt{\eta^2 - k^2 - m^2}}{e^{(L-a)\eta+1}} - \{a \rightarrow b\} \quad 6$$

در گام آخر از محاسبه انرژی کازیمیر، طبق تعریف ارائه شده در رابطه 1، به محاسبه حد  $L \rightarrow \infty$  و  $b \rightarrow \infty$  می پردازیم. می توان نشان داد که کلیه جملاتی که در رابطه 6 نوشته شده و مربوط به ناحیه های  $A2, B1$  و  $B2$  هستند، در این حد صفر خواهند شد و مرتبه صفرم از انرژی کازیمیر مربوط به میدان اسکالر جرم دار بین دو

<sup>3</sup> Large mass limit

<sup>1</sup> Modified Bessel function

<sup>2</sup> Massless limit

تلقی گردد. با توجه به اینکه کانترترم‌ها مسئول حذف واگرایی‌های ناشی از پارامترهای برهنه در لاگرانژی هستند، عدم انتخاب صحیح آنها ممکن است به‌واگرا شدن کمیت‌های فیزیکی مرتبط با لاگرانژی در مسائل منجر گردد [11]. در این مقاله، با در نظر گرفتن این ایده، از یک روش سیستماتیک و البته آسان برای بازبنجارش پارامترهای برهنه استفاده شده است. این روش بازبنجارش اجازه می‌دهد تا تأثیرات مرتبط با شرط مرزی در کانترترم انتخابی ورود یابد و البته این امر منجر به دستیابی ما به کانترترم وابسته به مکان نیز شده است. با استفاده از لاگرانژی نوشته شده در معادله 9 و بسط اختلالی می‌توان تابع انتشار را با استفاده از الگوهای فاینمن<sup>1</sup> به صورت زیر نوشت:

که در آن  $x_1$  نشان‌دهنده نمادین<sup>2</sup> از کانترترم جرم میدان است. با استفاده شرط بازبنجارش و اعمال آن تا مرتبه اول از  $\lambda$  می‌توان مقادیر زیر را برای کانترترم‌ها نوشت. لذا داریم:

$$\delta_Z = 0, \quad \delta_\lambda = 0$$

$$\delta_m(x) = \frac{-i}{2} \text{loop} = \frac{-\lambda}{2} G(x, x),$$

11

که در آن  $G(x, x')$  تابع گرین (انتشار<sup>3</sup>) می‌باشد. حال با عنایت به تعریف رابطه انرژی خلاً تا مرتبه اول ثابت جفت‌شدگی  $\lambda$  به صورت زیر، و استفاده از مقدار

$$\left( \frac{1}{8} \text{loop} + \frac{1}{2} \text{cross} \right)$$

<sup>3</sup> The propagator

میدان اسکالر جرم‌دار با شرط مرزی مخلوط (دیریکله - نیومن) برای یک دسته نزولی از جرم‌های مختلف رسم کرده‌ایم. روند نمودارهای رسم شده نشان می‌دهد که هر چه اندازه جرم کوچکتر می‌شود، نمودار مربوط به رابطه انرژی کازیمیر میدان جرم‌دار، به نمودار انرژی مربوط به میدان بدون جرم نزدیک‌تر می‌شود. در واقع این امر، سازگاری مناسب پاسخ‌های به دست آمده را با مبانی قابل انتظار فیزیکی تأیید می‌نماید.

### تصحیح تابشی انرژی کازیمیر

لاگرانژی کلاین-گوردون برای میدان اسکالر جرم‌دار با جمله تراکنشی  $\lambda\phi^4$  پس از اجرای برنامه بازبنجارش به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \delta_Z (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi^4 \quad 9$$

که در آن  $m$  و  $\lambda$  پارامترهای فیزیکی جرم و ثابت جفت‌شدگی هستند و  $\delta_Z$ ،  $\delta_m$ ،  $\delta_\lambda$  به ترتیب کانترترم‌های میدان، جرم و ثابت جفت‌شدگی می‌باشند. همان‌طور که می‌دانیم کانترترم‌ها موظف به همضم و واگرایی‌های ناشی از پارامترهای برهنه در لاگرانژی و ارائه مقدار صحیح و فیزیکی این پارامترها هستند. اما نحوه انتخاب این کانترترم‌ها در محاسبات بازبنجارش همیشه منشأ بسیاری از چالش‌ها قرار گرفته است. در مسائلی که میدان کوآنتومی با یک شرط مرزی محدود می‌شود، این انتظار وجود دارد که کانترترم‌ها نیز با این شرط مرزی هماهنگ گردند. بنابراین استفاده از کانترترم مربوط به فضای آزاد در همه مسائل، بدون توجه به شرایط مرزی حاکم بر میدان، نمی‌تواند درست

<sup>1</sup> Feynman diagram

<sup>2</sup> Symbolically



$$E_{A1}^{(1)} = \frac{-\lambda L^2}{4a} \sum_{n,n'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \omega_{n,A1}^2} \times$$

$$\left( \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \omega_{n',A1}^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \delta_{nn'} \right) =$$

$$\frac{-\lambda L^2}{4a} \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \omega_{n,A1}^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \omega_{n,A1}^2} \right)^2 \right] \quad 14$$

که در آن  $\omega_{n,A1} = \sqrt{k_n^2 + m^2}$  می‌باشد. هر دو انتگرال موجود در کروهه در معادله فوق واگرا هستند. پس، برای منظم‌سازی و حذف چنین واگرایی‌هایی نیاز به استفاده از یک روش منظم‌سازی است. بدین منظور از منظم‌سازی کم‌کردن جعبه‌ها و منظم‌سازی تابع قطع<sup>2</sup> به صورت هم‌زمان بهره می‌جوئیم. لذا حد بالای انتگرال‌ها را در معادله فوق با یک مقدار قطع به‌مانند  $\Lambda$  عوض می‌کنیم و سپس انتگرال‌ها را محاسبه کرده و پاسخ انتگرال‌ها را که تابعی از مقدار قطع  $\Lambda$  است در حد  $\Lambda \rightarrow \infty$  بسط می‌دهیم. این امر باعث می‌شود تا بتوان تکه‌های واگراکننده هر انتگرال را به وضوح تشخیص داد. با تکرار کل این روند برای همه جملات مشابه موجود در انرژی خلأ مربوط به همه نواحی تعریف شده در شکل 1، می‌توان رابطه اختلاف دو انرژی خلأ را به صورت زیر نوشت:

$$E_A^{(1)} - E_B^{(1)} = \frac{-\lambda L^2}{16\pi^4 a} \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Lambda - \frac{\pi}{2} \omega_{n,A1} + \frac{\omega_{n,A1}^2}{\Lambda} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Lambda - \frac{\pi}{2} \omega_{n,A1} + \frac{\omega_{n,A1}^2}{\Lambda} \right)^2 \right] +$$

$$\frac{-\lambda L^2}{4\pi^4 (L-a)} \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Lambda' - \frac{\pi}{2} \omega_{n,A2} + \frac{\omega_{n,A2}^2}{\Lambda'} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \Lambda' - \frac{\pi}{2} \omega_{n,A2} + \frac{\omega_{n,A2}^2}{\Lambda'} \right)^2 \right] - \{a \rightarrow b\} \quad 15$$

با انتخاب مقادیر مناسب از مقدارهای قطع می‌توان نشان داد که سهم کلیه جملات واگرای ناشی از انتگرال در عبارات فوق یکدیگر را حذف کرده و جملات باقیمانده به صورت زیر می‌باشد:

به دست آمده برای کانترترم جرم از رابطه 11، داریم:

$$E^{(1)} = i \int_V \left( \frac{1}{8} \text{figure} + \frac{1}{2} \text{figure} + \dots \right) d^3x$$

$$= i \int \left[ \frac{-i\lambda}{8} G^2(x,x) - \frac{-i}{2} \delta_m(x) G(x,x) \right] d^3x$$

$$= \frac{-\lambda}{8} \int G^2(x,x) d^3x \quad 12$$

مقدار تابع گرین را می‌توان برای میدان اسکالر تعریف شده در لاگرانژی رابطه 9 بین دو صفحه موازی که محدود کننده میدان با شرط مرزی مخلوط (دیریکله - نیومن) است پس از انجام چرخش و یک<sup>1</sup> به صورت زیر نوشت:

$$G_{A1}(x,x')$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\omega(t-t')} e^{-ik_x(x-x')} e^{-ik_y(y-y')} \times$$

$$\frac{[\sin k_n z + (-1)^n \cos k_n z][\sin k_n z' + (-1)^n \cos k_n z']}{k^2 + k_n^2 + m^2} \quad 13$$

که در آن  $k^2 = \omega^2 + k_x^2 + k_y^2$  و  $k_n = \frac{\pi}{a} \left( n + \frac{1}{2} \right)$  جرم میدان اسکالر می‌باشد. پارامتر  $a$  نیز فاصله بین دو صفحه موازی در ناحیه A1 شکل 1 می‌باشد. منظور از  $d^3\mathbf{k}$  نیز عبارت  $d^3\mathbf{k} = d\omega dk_x dk_y$  است. با جای‌گذاری تابع گرین در رابطه 12، می‌توان فرم انرژی خلأ را تا مرتبه اول  $\lambda$  به صورت زیر نوشت:

<sup>2</sup> Cutoff regularization technique

<sup>1</sup> Wick's rotation

جمله  $J_1(x)$  و  $J_2(x)$  در رابطه 17 هر دو جمله انتگرالی رابطه ایبل-پلانا بوده و اگر هستند، و حذف و اگرایی آنها با استفاده از طرح کم کردن جعبه‌ها به راحتی امکان پذیر است. برای جمله  $J_2(x)$  داریم:

$$\frac{-\lambda L^2 m^4}{128\pi^2} \left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right) \left[ \frac{1}{a} J_2(a) + \frac{4}{L-a} J_2\left(\frac{L-a}{2}\right) - \{a \rightarrow b\} \right] = \frac{-\lambda L^2 m^3}{128\pi^3} \left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right) \left[ a + 2\frac{L-a}{2} - b - 2\frac{L-b}{2} \right] \int_0^\infty (\xi^2 + 1) d\xi = 0 \quad 19$$

با توجه به رابطه 19 و پس از بسط جمله مربع در رابطه 17 و با در نظر گرفتن اینکه اندازه  $\mathcal{B}_2(a)$  برابر صفر است، عبارت 17 به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$E_A^{(1)} - E_B^{(1)} = \frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^2 a} [J_1(a)^2 + 2J_1(a)\mathcal{B}_1(a) + \mathcal{B}_1(a)^2] + \frac{-\lambda L^2 m^2}{16\pi^2(L-a)} \left[ J_1\left(\frac{L-a}{2}\right)^2 + 2J_1\left(\frac{L-a}{2}\right)\mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right) + \mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right)^2 \right] - \{a \rightarrow b\} \quad 20$$

روشن است که جمله اول گروه‌ها در رابطه فوق نیز واگراست. اما می‌توان با توجه به فرایند تعریف شده در روش کم کردن جعبه‌ها این جملات و اگر را به صورت کامل حذف نمود. لذا، برای جمله اول گروه‌ها در معادله 20 داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^2} \left[ \frac{1}{a} J_1(a)^2 + \frac{4}{L-a} J_1\left(\frac{L-a}{2}\right)^2 - \{a \rightarrow b\} \right] \\ & = \frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^4} \left[ a + 2\frac{L-a}{2} - b - 2\frac{L-b}{2} \right] \left( \int_0^\infty \sqrt{\xi^2 + 1} d\xi \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad 21$$

جمله دوم در گروه‌های معادله 20 نیز به دلیل حضور جمله  $J_1(x)$  واگراست. برای حذف این واگرایی علاوه بر روش کم کردن جعبه‌ها، از منظم‌سازی تابع قطع

$$E_A^{(1)} - E_B^{(1)} = \frac{-\lambda L^2}{64\pi^2 a} \left[ \left( \sum_{n=0}^\infty \omega_{n,A1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \right) \sum_{n=0}^\infty \omega_{n,A1}^2 \right] + \frac{-\lambda L^2}{16\pi^2(L-a)} \left[ \left( \sum_{n=0}^\infty \omega_{n,A2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \right) \sum_{n=0}^\infty \omega_{n,A2}^2 \right] - \{a \rightarrow b\} \quad 16$$

عبارات جمع موجود در رابطه 16 همچنان واگرا هستند و برای اینکه بتوان آنها را منظم نمود، معمولاً بهترین روش تبدیل آنان به انتگرال است. لذا با استفاده از رابطه ایبل-پلانا که در معادله 3 معرفی شده است، داریم:

$$\begin{aligned} E_A^{(1)} - E_B^{(1)} &= \frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^2 a} \left[ \left( \frac{a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} d\xi}{J_1(a)} + \mathcal{B}_1(a) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \right) \left( \frac{a}{m\pi} \int_0^\infty (\xi^2 + 1) d\xi + \mathcal{B}_2(a) \right) \right] + \\ & \frac{-\lambda L^2 m^4}{16\pi^2(L-a)} \left[ \left( \frac{L-a}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} d\xi + \mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right)}{J_1\left(\frac{L-a}{2}\right)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \right) \left( \frac{(L-a)}{2m\pi} \int_0^\infty (\xi^2 + 1) d\xi + \mathcal{B}_2\left(\frac{L-a}{2}\right) \right) \right] - \\ & \{a \rightarrow b\} \quad 17 \end{aligned}$$

که در آن  $\mathcal{B}_2(a)$  و  $\mathcal{B}_1(a)$  مقادیر برنچکات رابطه ایبل-پلانا بوده و مقادیر آنان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(a) &= \frac{2a}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{e^{2man} + 1} d\eta \\ &= \frac{2a}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \int_1^\infty (-1)^{j+1} e^{-2manj} \sqrt{\eta^2 - 1} d\eta \\ &= \frac{1}{m\pi} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1} K_1(2maj)}{j}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_2(a) = 0 \quad 18$$

$$E_A^{(1)} - E_B^{(1)} = \frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^2 a} \left[ \frac{a(1+2\ln 2)}{2\pi} \mathcal{B}_1(a) + \mathcal{B}_1(a)^2 \right] + \frac{-\lambda L^2 m^4}{16\pi^2(L-a)} \left[ \frac{(L-a)(1+2\ln 2)}{4\pi} \mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right) + \mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right)^2 \right] - \{a \rightarrow b\}$$

23

برای به دست آوردن انرژی کازیمیر لازم است، آخرین گام از تعریف ارائه شده در معادله 1 اجرا شود. بدین منظور به محاسبه حدهای  $b \rightarrow \infty$  و  $L \rightarrow \infty$  می پردازیم. رابطه تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر جرم دار محدود شده بین دو صفحه موازی با فاصله  $a$  از یکدیگر با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$E_{\text{Cas.}}^{(1)} = \frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^3} \left[ \frac{(1+2\ln 2)}{2} \mathcal{B}_1(a) + \frac{\pi}{a} \mathcal{B}_1(a)^2 \right].$$

24

برای میدان بدون جرم و میدان با جرم سنگین رابطه انرژی کازیمیر به دست آمده در رابطه فوق به فرم زیر تبدیل می شود:

$$E_{\text{Cas.}}^{(1)} \rightarrow \begin{cases} \frac{-\lambda L^2}{36864a^3}, & m = 0; \\ \frac{-\lambda L^2}{256\pi a^3} (1+2\ln 2) \left(\frac{ma}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}} e^{-2ma}, & m \gg 1. \end{cases} \quad 25$$

کافی برای انتخاب مناسب مقادیر قطع  $\Lambda_{A1}$ ،  $\Lambda_{A2}$ ،  $\Lambda_{B1}$  و  $\Lambda_{B2}$  وجود دارد و می توان گفت عملاً این درجات آزادی، از نوع تکنیک به کار گرفته شده و ساختارهای انتخاب شده در روش کم کردن جعبه ها حاصل شده است.

نیز استفاده می کنیم. بدین منظور حد بالای انتگرال  $\mathcal{J}_1(a)$  را با یک مقدار قطع  $\Lambda$  عوض می کنیم. پس از محاسبه انتگرال، پاسخ را در حد  $\Lambda \rightarrow \infty$  بسط خواهیم داد. اکنون می توان با تکرار این امر برای کلیه جملات مشابه دیگر در گروه های معادله 20، بخش و اگر اکندنده را به صورت شفاف پیدا کرد. انتخاب مناسب از مقادیر قطع کمک می کند تا سهم واگرا را از جملات بسط حذف کرده و آنچه از جمله دوم گروه های معادله 20 باقی می ماند به فرم زیر می باشد<sup>1</sup>:

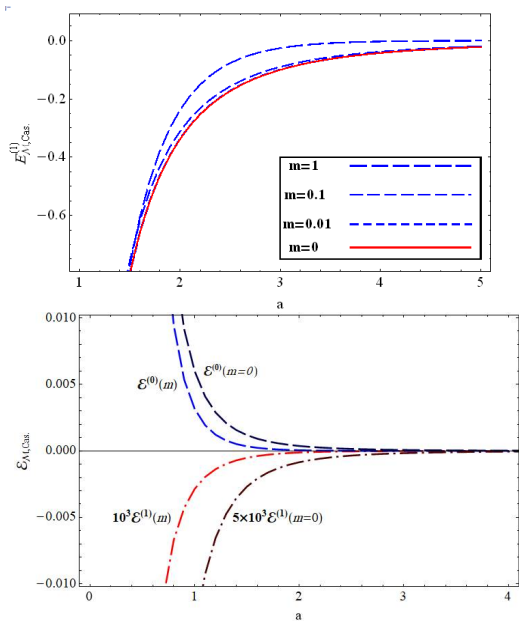
$$\frac{-\lambda L^2 m^4}{64\pi^3} \left[ \left( \Lambda^2 + \frac{1+2\ln 2}{2} + \ln \Lambda \right) \mathcal{B}_1(a) + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}) \right] + 2 \left( \Lambda'^2 + \frac{1+2\ln 2}{2} + \ln \Lambda' \right) \mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right) + \mathcal{O}(\Lambda'^{-2}) - \{a \rightarrow b\} = \frac{-\lambda L^2 m^4}{128\pi^3} (1 + 2\ln 2) [\mathcal{B}_1(a) + 2\mathcal{B}_1\left(\frac{L-a}{2}\right) - \{a \rightarrow b\}].$$

22

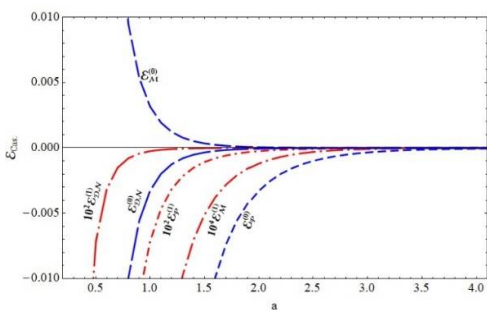
لذا آنچه از اختلاف انرژی های خلأ در معادله 20 باقی

می ماند به صورت زیر است:

1 منظور از این انتخاب مناسب، در نظر گرفتن رابطه های مانند  $\frac{\Lambda_{A2}^2 + \ln \Lambda_{A2}}{\Lambda_{B2}^2 + \ln \Lambda_{B2}} = \frac{B_1\left(\frac{L-b}{2}\right)}{B_1\left(\frac{L-a}{2}\right)}$  و  $\frac{\Lambda_{A1}^2 + \ln \Lambda_{A1}}{\Lambda_{B1}^2 + \ln \Lambda_{B1}} = \frac{B_1(b)}{B_1(a)}$  برای مقادیر قطع است. این مقادیر قطع تضمین می کنند که قطعاً هیچ جمله واگرایی در رابطه 22 باقی نماند. توضیح اینکه درجه آزادی



**شکل 4.** در این نمودار میزان چگالی انرژی کازیمیر در مرتبه صفرم و اول تصحیح تابشی به‌ازاء جرم  $m = \{1; 0\}$  برحسب فاصله صفحات ( $a$ ) رسم شده است. این نمودار به‌راحتی نشان می‌دهد که مرتبه اول تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر محدود شده با شرط مرزی مخلوط دارای مقدار منفی بوده و اندازه آن حدوداً هزار برابر کوچکتر از مرتبه صفرم است. مقدار ثابت جفت شدگی در نمودارها برابر  $\lambda = 0.1$  در نظر گرفته شده است.



**شکل 5.** در این نمودار مرتبه‌های صفرم و اول چگالی انرژی کازیمیر مربوط به میدان اسکالر محدود شده بین دو صفحه موازی با فاصله صفحات  $a$  با شرط مرزی دیریکله، نیومن، مخلوط (دیریکله-نیومن) و نوسانی برحسب فاصله صفحات ( $a$ ) رسم شده است. با توجه به این نمودار می‌توان علامت انرژی و اندازه‌های آن را برای شروط مرزی مختلف در کنار هم مقایسه نمود. در کلیه این نمودارها، اندازه ثابت جفت شدگی و جرم میدان به‌ترتیب  $\lambda = 0.1$  و  $m = 1$  در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که می‌دانیم، بین روابط انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر بین دو صفحه موازی در  $3+1$  بعد با

**شکل 3.** در این نمودار، میزان انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر بین دو صفحه موازی با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) برحسب فاصله صفحات ( $a$ ) رسم شده است. این نمودار نشان می‌دهد که با کاهش اندازه جرم، نمودار انرژی برای میدان اسکالر جرم‌دار به‌سرعت به نمودار انرژی برای میدان بدون جرم نزدیک می‌شود و تفاوت قابل ملاحظه‌ای در جرم‌های کمتر از 0.01 مشاهده نمی‌شود.

توضیح اینکه اینک پاسخ‌های به‌دست آمده با آنچه در [11] گزارش شده متفاوت بوده و ریشه این تفاوت را می‌توان در انتخاب نوع بازبهنجارش جستجو نمود. البته پاسخ به‌دست آمده با مبانی فیزیکی سازگار است و همان‌طور که از روند محاسبات برمی‌آید، انجام فرایند محاسبه بدون هیچگونه ابهام و یا پیچیدگی خاصی صورت پذیرفته است. در نمودار شکل 3، تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برحسب تابعی از فاصله صفحات  $a$  به‌ازای چند جرم مختلف میدان رسم شده است. روند نمودارهای رسم شده نشان می‌دهد که با کاهش میزان جرم، نمودار انرژی مربوط به میدان جرم‌دار به نمودار انرژی مربوط به میدان بدون جرم نزدیک می‌شود، که این امر با انتظارات فیزیکی سازگار است. در نمودار شکل 4، مرتبه صفرم و اول تصحیح تابشی انرژی کازیمیر را برای میدان بدون جرم و جرم‌دار در کنار هم رسم نموده‌ایم. این نمودار نشان می‌دهد به‌ازای مقدار ثابت جفت شدگی  $\lambda = 0.1$  میزان انرژی کازیمیر در مرتبه اول تصحیح تابشی تقریباً هزار برابر کوچکتر از این انرژی در مرتبه صفرم است.

می‌باشد. مزیت و برتری این روش منظم‌سازی، در عدم استفاده از تمدید تحلیلی و سادگی حذف واگرایی‌ها در پروسه انجام آن است. پاسخ‌های به‌دست آمده با آنچه در گذشته در خصوص این مسئله در مرتبه اول تصحیح تابشی انرژی کازیمیر گزارش شده، متفاوت است. این تفاوت را می‌توان در انتخاب برنامه بازبهنجارش جستجو کرد. در این مقاله همچنین، مقادیر انرژی کازیمیر مربوط به شرایط مرزی دیریکله، نیومن، مخلوط (دیریکله-نیومن) و نوسانی در کنار هم مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد که، مقادیر مربوط به این انرژی‌ها در مرتبه اول تصحیح تابشی برای کلیه شرایط مرزی، منفی است و اندازه آنها نیز از اندازه مرتبه صفرم مربوطه کوچکتر است. البته کلیه مقادیر به‌دست آمده در مرتبه اول تصحیح تابشی با آنچه در گذشته در این خصوص گزارش شده است، تفاوت دارد، که علت اصلی این تفاوت را باید برنامه بازبهنجارش استفاده شده دانست.

## مرجع‌ها

- [1] H.B.G. Casimir, On the attraction between two perfectly conducting plates, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* **51** (1948) 793-795.
- [2] M.J. Sparnaay, Measurements of attractive forces between flat plates, *Physica* **24** (1958) 751-764.  
Doi: 10.1016/S0031-8914(58)80090-7
- [3] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, *Advances in the Casimir effect*, 1st Ed. ed., New York: Oxford Univ. Press Inc., (2009).
- [4] K.A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2001).

شرایط مرزی دیریکله، نیومن و نوسانی روابطی به‌شکل زیر برقرار است:

$$E_{\mathcal{P}}(a) = 2E_{\mathcal{D}}\left(\frac{a}{2}\right), \quad E_{\mathcal{N}}(a) = E_{\mathcal{D}}(a) \quad 26$$

توضیح اینکه انرژی کازیمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی دیریکله در گذشته محاسبه شده است [11] و این روابط کمک می‌کند تا بتوان انرژی کازیمیر را برای شرط مرزی نیومن و نوسانی از روی روابط انرژی مربوط به شرط مرزی دیریکله بازنویسی نماییم. در نمودار شکل 5، چگالی انرژی کازیمیر را برای چهار شرط مرزی دیریکله، نیومن، مخلوط آنان (دیریکله-نیومن) و نوسانی در کنار هم رسم کرده‌ایم. این نمودارها کمک می‌کنند تا علامت انرژی‌ها و همچنین مرتبه بزرگی آنها در کنار هم دیده شوند. همان‌طور که مشخص است علامت این انرژی برای شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) در مرتبه صفرم مثبت و برای دیگر شرایط مرزی منفی می‌باشد.

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به‌محاسبه مرتبه صفرم و اول تصحیح تابشی انرژی کازیمیر برای نظریه  $\phi^4$  بین دو صفحه موازی در 1+3 بعد با شرط مرزی مخلوط (دیریکله-نیومن) پرداخته شده است. دو نکته در انجام این محاسبات بسیار حائز اهمیت است. یکی اینکه، برای بازبهنجارش پارامترهای برهنه در این محاسبات از یک روش سیستماتیک بهره جسته‌ایم که در آن تمامی المان‌های موجود در پروسه بازبهنجارش سازگار با شرط مرزی حاکم بر مسئله هستند. این امر موجب ظهور کانتربرم‌های وابسته به‌مکان شده است. استفاده از روش منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها، از دیگر نکات حائز اهمیت در محاسبات صورت گرفته در این مقاله

- [12] R. Moazzemi, A. Mohammadi, S.S. Gousheh, A renormalized perturbation theory for problems with non-trivial boundary conditions or backgrounds in two space-time dimensions, *European Physical Journal C* **56** (2008) 585-590.  
Doi: 10.1140/epjc/s10052-008-0680-9
- [13] R. Moazzemi, M. Namdar, S.S. Gousheh, The Dirichlet Casimir effect for  $\phi^4$  theory in (3 + 1) dimensions: a new renormalization approach, *JHEP* **09** (2007) 029.  
Doi: 10.1088/1126-6708/2007/09/029
- [14] R. Moazzemi, S.S. Gousheh, A new renormalization approach to the Dirichlet Casimir effect for  $\phi^4$  theory in 1+1 dimensions, *Physics Letters B* **658** (2008) 255-265.  
Doi: 10.1016/j.physletb.2007.08.098
- [15] S.S. Gousheh, R. Moazzemi, M.A. Valuyan, Radiative correction to the Dirichlet Casimir energy for  $\lambda\phi^4$  theory in two spatial dimensions, *Physics Letters B* **681** (2009) 477-483.  
Doi: 10.1016/j.physletb.2009.10.058
- [16] M.A. Valuyan, Casimir Energy Calculation for Massive Scalar Field on Spherical Surface: An Alternative Approach, *Canadian Journal of Physics* **96** (2018) 1004-1009. Doi: 10.1139/cjp-2017-0722
- [17] M.A. Valuyan, Radiative correction to the Casimir energy for massive scalar field on a spherical surface, *Modern Physics Letters A* **32** (2017) 1750128.  
Doi: 10.1142/S0217732317501280
- [18] V.V. Nesterenko I.G. Pirozhenko, Spectral Zeta Functions for a Cylinder and a Circle, *Journal of Mathematical Physics* **41** (2000) 4521-4531.  
Doi: 10.1063/1.533358
- M.A. Valuyan, The Casimir energy for scalar field with mixed boundary condition, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **15** (2018) 1850172.
- [5] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, New Developments in the Casimir Effect, *Physics Reports* **353** (2001) 1-2.  
Doi:10.1016/S0370-1573(01)00015-1
- [6] M. Bordag, J. Lindig, Radiative correction to the Casimir force on a sphere *Physical Review D* **58** (1998) 045003.  
Doi:10.1103/PhysRevD.58.045003
- [7] N. Graham, R. Jaffe, H. Weigel, Casimir effects in renormalizable quantum field theories, *International Journal of Modern Physics A* **17** (2002) 846-869.  
Doi: 10.1142/S0217751X02010224
- [8] N. Graham, R.L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra, H. Weigel, Calculating vacuum energies in renormalizable quantum field theories: A new approach to the Casimir problem, *Nuclear Physics B* **645** (2002) 49-84.  
Doi: 10.1016/S0550-3213(02)00823-4
- [9] X. Kong, F. Ravndal, Radiative corrections to the Casimir energy, *Physical Review Letters* **79** (1997) 545-548.  
Doi: 10.1103/PhysRevLett.79.545
- [10] K. Melnikov, Radiative corrections to the Casimir force and effective field theories, *Physical Review. D* **64** (2001) 045002.  
Doi: 10.1103/PhysRevD.64.045002.
- [11] F.A. Barone, R.M. Cavalcanti, C. Farina, Radiative corrections to the Casimir effect for the massive scalar field, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **127** (2004) 118-122; Doi: 10.1016/S0920-5632(03)02411-3
- R.M. Cavalcanti, C. Farina, F.A. Barone, Radiative corrections to Casimir effect in the  $\phi^4$  model, *arXiv:hep-th/0604200* (2006);  
F.A. Barone, R.M. Cavalcanti, C. Farina, Radiative corrections to the Casimir effect for the massive scalar field, *arXiv:hep-th/0301238v1* (2003).

Doi: 10.1142/S0219887818501724

[19] R. Balian, B. Duplantier, Electromagnetic waves near perfect conductors, *Annals of Physics (N.Y.)* **112** (1978) 165-208.

Doi: 10.1016/0003-4916(77)90334-7

[20] K.A. Milton, L.L. Deraad, J. Schwinger, Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell, *Annals of Physics (N.Y.)* **115** (1978) 388.

Doi: 10.1016/0003-4916(78)90161-6

[21] M.A. Valuyan, The Dirichlet Casimir energy for  $\phi^4$  theory in a rectangular waveguide, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **45** (2018) 095006.

Doi: 10.1088/1361-6471/aad625

M.A. Valuyan, The Dirichlet Casimir energy for the  $\phi^4$  theory in a rectangle, *Eur. Phys. J Plus.* **133** (2018) 401. Doi: 10.1140/epjp/i2018-12206-8

[22] T.H. Boyer, Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell and the Casimir Model for a Charged Particle, *Physical Review* **174** (1968) 1764.

Doi: 10.1103/PhysRev.174.1764

[23] A.A. Saharian, The Generalized Abel-Plana Formula: Applications To Bessel Functions And Casimir Effect, *IC/2007/082* (2000) [hep-th/0002239 v1].