Thermal Entanglement between Two Coupled Two-Level Atoms on Two-Photon Interaction with Codirectional Kerr Nonlinear Coupler

Bashir Mojaveri[1,*] , Alireza Dehghani[2], Mohammad Ali Fasihi[1],

Touraj Mohammadpour[1]

[1]Department of Physics, Faculty of Science, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

[2]Department of Physics, Faculty of Science, Payame Noor University, Tehran, Iran

Received: 12.01.2018 Final revised: 23.06.2019 Accepted: 22.07.2019
Doi: 10.22055/JRMBS.2019.14917

Abstract

In this paper, a Hamiltonian model, which includes the interaction of two two-level atoms with a codirectional Kerr nonlinear coupler via the Raman non-degenerate two-photon transition, is introduced. The atomic interaction is assumed to be in the dipole-dipole form, and the total system is also in thermal equilibrium with the environment. The total excitation number operator, as the constant of the motion of the system, provides a decomposition of the Hilbert space of system into direct sums of invariant subspaces. As a result, the representation of the Hamiltonian becomes a block-diagonal matrix. By diagonalizing each of the blocks, we obtain eigenvalues and the corresponding eigenstates of the Hamiltonian. Then we obtain the thermal state of the system in the whole Hilbert space and within its excitation subspaces. We quantify the thermal entanglement between the atoms in the Hilbert space of the system and within its excitation subspaces using the measure of the concurrence. Finally, the effect of temperature and system parameters on the degree of thermal entanglement is investigated. The results show that in the subspaces with an odd excitation number, the atomic thermal entanglement is thermally robust and remains constant.

Keywords: codirectional Kerr nonlinear coupler, thermal entanglement, Jaynes-Cummings model, concurrence.

* Correspondin Author: bmojaveri@azaruniv.ac.ir

درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم دو ترازهٔ جفت‌شده در برهم‌کنش دو فوتونی غیرتبهگن با جفت‌گر کر غیرخطی هم‌محور

بشیر مجاوری[1،*]، علیرضا دهقانی[2]، محمد علی فصیحی[1]، تورج محمدپور[1]

[1]گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

[2]گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه پیام نور،تهران،ایران

دریافت: 1397/10/22 ویرایش نهائی: 1398/04/02 پذیرش: 1398/04/31

Doi: 10.22055/JRMBS.2019.14917

چکیده

در این مقاله، هامیلتونی یک مدل، شامل برهم‌کنش دو اتم دو ترازه با یک جفت‌گر کر غیرخطی هم محور از طریق گذار دو فوتونی غیرتبهگن رامان معرفی شده است. فرض می‌شود که برهم‌کنش اتم‌ها به‌صورت دوقطبی-دوقطبی بوده و همچنین کل سامانه با یک منبع گرمایی در تعادل گرمایی می‌باشد. عملگر تعداد برانگیختگی کل به‌عنوان ثابت حرکت سامانه، تجزیهٔ فضای هیلبرت سامانه را به‌جمع مستقیم زیرفضاهای ناوردا فراهم می‌سازد. در نتیجه، هامیلتونی سامانه به‌صورت یک ماتریس بلوک قطری درمی‌آید. با قطری کردن هر کدام از بلوک‌ها ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم. سپس حالت گرمایی سامانه را در فضای هیلبرت کل و هر کدام از زیرفضاهای برانگیخته به‌دست می‌آوریم. با استفاده از سنجهٔ تلاقی، میزان درهم‌تنیدگی گرمایی بین اتم‌ها را در فضای کل و زیرفضاهای آن محاسبه می‌کنیم. نهایتاً تأثیر دما و پارامترهای سامانه را بر میزان درهم‌تنیدگی مطالعه می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که در زیرفضاهای برانگیختهٔ فرد، حالت‌های درهم‌تنیدهٔ اتمی در مقابل افزایش دما مقاوم بوده و ثابت می‌مانند.

کلیدواژگان: جفت‌گر غیرخطی هم محور، درهم‌تنیدگی گرمایی، مدل جینز-کامینگز، سنجه تلاقی

مقدمه

یکی از موضوعات اساسی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی فرایند پردازش داده‌ها و انتقال آنها با سرعت فوق‌العاده زیاد می‌باشد [۱،۲]. در سال‌های اخیر علاقهٔ زیادی به‌این فرایند با استفاده از ابزارهای اپتیکی نشان داده شده است. یکی از ابزارهای مؤثر اپتیکی برای انتقال داده‌ها جفت‌گر غیرخطی هم‌محور می‌باشد که از دو موج‌بر اپتیکی موازی تشکیل شده است. این موج‌برها به‌اندازهٔ کافی به‌هم نزدیک هستند که مجاز به‌تبادل انرژی از طریق امواج میرا می‌باشند. این تبادل می‌تواند به‌وسیلهٔ مهندسی جفت‌گر و همچنین شدت میدان ورودی کنترل شود. این ابزار اپتیکی علاوه بر اینکه می‌تواند میدان‌های الکترومغناطیسی با خصوصیات غیرکلاسیکی را تولید کند، در کلیدزنی‌های اپتیکی نیز کاربرد دارد و به‌همین دلیل در اپتیک کوانتومی نیز مورد توجه قرار گرفته است. هامیلتونی یک جفت‌گر غیرخطی هم‌محور به‌صورت زیر داده می‌شود [۳،٤]

$$H_f = \sum_{i=1}^{2} \hbar(\omega_i a_i^{\dagger} a_i + \chi_i a_i^{\dagger 2} a_i^{2}) + \hbar\bar{\chi} a_1^{\dagger} a_1 a_2^{\dagger} a_2 + \hbar\lambda(a_1^{\dagger} a_2 + a_1 a_2^{\dagger}), \qquad 1$$

به‌طوری‌که ω_1 و ω_2 به‌ترتیب بسامدهای مدهای اول و دوم میدان انتشاری موجبر با عملگرهای فنا(خلق) $\hat{a}_1$ ($\hat{a}_1^{\dagger}$) و $\hat{a}_2$ ($\hat{a}_2^{\dagger}$) می‌باشند. عملگرهای خلق و فنا در

*نویسندهٔ مسئول: bmojaveri@azaruniv.ac.ir

روابط جابه‌جائی $\left[a_i , a_j^{\dagger}\right] = \delta_{i,j}$ صدق می‌کنند. پارامترهای $\bar{\chi}$ و $\chi_i \ (i = 1,2)$ به‌ترتیب پذیرفتاری مرتبهٔ سوم مربوط به‌فرایندهای دگرکنش و خودکنش بوده و λ ثابت جفت‌شدگی موجبرها است.

دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم در مدل جینز-کامینگز تعمیم یافته شامل دو اتم دو ترازهٔ برهم‌کنشی با میدان‌های تک مده و دو مده در دمای صفر مطلق بررسی شده است [6-8]. با این وجود برهم‌کنش با محیط، به‌عنوان یک منبع گرمایی، یکی از ویژگی‌های اجتناب ناپذیر سامانه‌های واقعی می‌باشد. در مدل جینز-کامینگز دو اتمی با میدان دو مده، زمانی که قسمت میدان در تعادل گرمایی با یک منبع گرمایی باشد، تولد و مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها اتفاق می‌افتد. در این سامانه در حالی‌که فقط قسمت فوتونی دارای توزیع گرمایی است، دما حالت کل سامانه شامل میدان و اتم‌ها را متأثر کرده و باعث ایجاد درهم‌تنیدگی و یا برعکس باعث ایجاد واهمدوسی می‌شود [9]. حال وقتی که کل سامانه شامل اتم‌ها و میدان‌ها در تعادل گرمایی با منبع گرمایی هستند، حالت سامانه یک حالت آمیختهٔ گرمایی با توزیع بولتزمن بوده و درهم‌تنیدگی ایجاد شده درهم‌تنیدگی گرمایی نامیده می‌شود. برای اولین بار مفهوم درهم‌تنیدگی گرمایی توسط نیلسون برای یک سامانه دو کیوبیتی در مدل زنجیرهٔ اسپینی هایزنبرگ در تعادل گرمایی با یک حمام گرمایی معرفی شد و تأثیر دما بر درهم‌تنیدگی گرمایی مطالعه گردید [10]. به‌طور کلی حالت گرمایی یک سامانه در دمای صفر مطلق به‌حالت پایهٔ سامانهٔ تقلیل یافته که با افزایش دما و با آمیخته شدن حالت پایه با حالت‌های دیگر، میزان درهم‌تنیدگی تغییر کرده و در نهایت در دماهای بالا به‌دلیل فرایند آمیختگی کامل صفر می‌شود [11]. از این‌رو علاوه بر تولید درهم‌تنیدگی گرمایی، حفظ آن در دماهای بالا از اهمیت خاصی برخوردار است. در سال‌های اخیر در چارچوب الکترودینامیک کوآنتومی، درهم‌تنیدگی گرمایی اتم-اتم و اتم-میدان در برخی از سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان مطالعه و تأثیرات دما و پارامترهای سامانه روی میزان درهم‌تنیدگی بحث شده است [12-15]. همچنین در این سامانه‌ها شرایط حفظ و کنترل درهم‌تنیدگی گرمایی در دماهای بالا به‌وسیلهٔ پارامترهای سامانه مطالعه شده است. به‌عنوان مثال، تأثیر دما و محیط کر بر درهم‌تنیدگی گرمایی بین فوتون‌های یک کاواک دو مده با محیط غیر خطی مطالعه شده است [16]. همچنین نشان داده شده است که محیط کر نقش کنترلی درهم‌تنیدگی در دماهای بالا را دارد. اخیراً تولید درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم دوترازه در برهم‌کنش با یک میدان تک مده در حضور محیط کر بررسی و شرایط حفظ این درهم‌تنیدگی در دماهای بالا علاوه‌بر پارامترهای سامانه از طریق محدود کردن فضای هیلبرت (فیلتر کردن برخی از توزیع‌های گیبس) نیز مطالعه شده است [17]. در این مقاله می‌خواهیم درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم جفت شده را در برهم‌کنش دو فوتونی غیرتبهگن با یک میدان دو مده در حضور محیط کر غیرخطی مطالعه کنیم. برای این منظور هامیلتونی سامانه برهم‌کنشی دو اتم دوترازه با یک جفت کننده کر غیرخطی هم‌محور که در دمای تعادل T با یک منبع گرمایی هستند را معرفی می‌کنیم. در ادامه عملگر تعداد برانگیختگی کل را به‌عنوان ثابت حرکت سامانه (یک عملگر کازیمیر) معرفی می‌کنیم که فضای هیلبرت سامانه را به‌زیر فضاهای برانگیخته تجزیه می‌کند و در نتیجه باعث می‌شود که هامیلتونی سامانه به‌صورت یک ماتریس بلوک قطری نمایش داده شود. دو تا از بلوک‌ها 1×1، دوتای دیگر 3×3 و بلوک‌های باقیمانده 4×4 هستند. با قطری کردن هریک از بلوک‌ها، حالت گرمایی سامانه را به‌دست می‌آوریم. همچنین این تجزیه امکان محاسبهٔ حالت گرمایی سامانه در هریک از زیر فضاهای

برانگیخته را هم فراهم می‌سازد. بنابراین درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم را در فضای هیلبرت کل و هر یک از زیرفضاهای آن را با استفاده از سنجهٔ تلاقی مطالعه می‌کنیم. به‌دلیل اهمیت حفظ درهم‌تنیدگی در مقابل نوفهٔ محیط نشان می‌دهیم که با انتخاب مناسب پارامترهای سامانه، درهم‌تنیدگی گرمایی بین اتم‌ها در حالت گرمایی متناظر با زیر فضاهای برانگیخته اول و $(j=0,1,...)$ 2j+1، نسبت به‌دما مقاوم هستند. این تحقیق علاوه بر بهینه کردن مفروضات قبلی دربارهٔ برهم‌کنش دو فوتونی اتم‌های دو ترازه با میدان الکترومغناطیسی دو مده، یک نمود واقعی از درهم‌تنیدگی در چارچوب الکترودینامیک کوآنتومی را به‌نمایش می‌گذارد.

مدل

حال دو اتم دوترازه با جفت‌شدگی دوقطبی-دوقطبی را وارد یک جفت‌گر کر غیرخطی کرده و مجموعه را در تعادل گرمایی در دمای T قرار می‌دهیم. با انتخاب:

$$J_+ = a_1^{\dagger} a_2,\quad J_- = a_2^{\dagger} a_1,\quad J_z = \frac{a_1^{\dagger} a_1 - a_2^{\dagger} a_2}{2}, \qquad 2$$

و در نظر گرفتن $\chi_1=\chi_2=\chi$، $\bar{\chi}=-2\chi$ و $\omega_2=-\omega_1=\frac{\omega}{2}$، این سامانه توسط هامیلتونی

$$\frac{H}{\hbar} = \omega \widehat{J}_z + \frac{\omega_0}{2}(\sigma_z^{(1)}+\sigma_z^{(2)}) + \chi J_z^{\,2} + \sum_{i=1}^{2} \lambda (J_- \sigma_+^{(i)} + J_+ \sigma_-^{(i)}) + \hbar \wp (\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + \sigma_-^{(1)}\sigma_+^{(2)}) \qquad 3$$

توصیف می‌شود که در آن σ_z و σ_+ و σ_- به‌ترتیب عملگرهای وارون، بالابرنده و پائین آورنده اتمی، $\wp$ ثابت جفت شدگی دوقطبی-دوقطبی اتم‌ها و ω_0 بسامد گذار اتمی می‌باشند. همچنین λ جفت شدگی اتم‌ها با میدان موجبرهای ناشی از فرایند دوفوتونی غیرتبهگن رامان است. عملگرهای $J_\pm$ و J_z جبر لی su(2) را برآورده می‌کنند یعنی:

$$\left[\widehat{J}_z, \widehat{J}_\pm\right] = \pm \widehat{J}_\pm ,\quad \left[\widehat{J}_+, \widehat{J}_-\right] = 2\widehat{J}_z. \qquad 4$$

بنابراین هامیلتونی 3 برهم‌کنش دو اتم با جفت‌گر کر غیرخطی برحسب گروه su(2) نیز نامیده می‌شود. نمایش جبر لی su(2) در فضای هیلبرت

$\mathcal{H} = span\left\{\left|j,m\right\rangle\Big|_{m=-j}^{m=j}\right\}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &J_-\left|j,m\right\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\left|j,m-1\right\rangle,\\ &J_+\left|j,m\right\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\left|j,m+1\right\rangle,\\ &J_z\left|j,m\right\rangle = m\left|j,m\right\rangle,\\ &J^2\left|j,m\right\rangle = j(j+1)\left|j,m\right\rangle, \end{aligned} \qquad 5$$

که در آن عدد کوانتومی j صحیح یا نیم‌صحیح می‌باشد. به‌راحتی می‌توان نشان داد که عملگر تعداد برانگیختگی کل $N = J_z + \frac{1}{2}(\sigma_z^{(1)}+\sigma_z^{(2)}) + j + 1$، ثابت حرکت سامانه می‌باشد یعنی: $\left[\widehat{H}, N\right]=0$. در نتیجه، برای یک j داده شده، فضای هیلبرت سامانهٔ اتم-میدان، $\mathcal{H} = span\left\{\left|i,k,j,m\right\rangle\Big|_{m=-j}^{j}\right\}$ $(i,k=e,g)$ به‌جمع مستقیم پنج زیرفضا با بعد معین به‌صورت

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \mathcal{H}^{(3)} \oplus \mathcal{H}^{(4)} \oplus \mathcal{H}^{(5)}$$

تجزیه می‌شود، به‌طوری‌که زیرفضاهای یک بعدی $\mathcal{H}^{(1)}$ و $\mathcal{H}^{(2)}$ به‌ترتیب با پایه‌های $\left|g,g,j,-j\right\rangle$ و $\left|e,e,j,j\right\rangle$ زیرفضاهای برانگیخته خنثی و 2j+2 می‌باشند. همچنین $\mathcal{H}^{(3)}$ زیرفضای برانگیخته اول با پایه‌های

$\left\{\left|g,g,j,-j+1\right\rangle,\left|e,g,j,-j\right\rangle,\left|g,e,j,-j\right\rangle\right\}$، و $\mathcal{H}^{(4)}$ زیرفضای برانگیخته $2j+1$ با پایه‌های $\left\{\left|e,g,j,j\right\rangle,\left|g,e,j,j\right\rangle,\left|e,e,j,j-1\right\rangle\right\}$ ، $(j\neq 0)$ می‌باشند. در حالی‌که $\mathcal{H}^{(5)}$ یک زیرفضای $8j-4$ بعدی با پایه‌های زیر است:

$$\left\{ \left| g,g,j,m+2 \right\rangle, \left| e,g,j,m+1 \right\rangle, \left| g,e,j,m+1 \right\rangle, \left| e,e,j,m \right\rangle \right\} \Big|_{m=-j}^{j-2}, (j \neq 0). \quad (6)$$

بنابراین نمایش هامیلتونی H یک ماتریس بلوک قطری با پنج بلوک به‌صورت زیر است

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5, \quad (7)$$

که در آن H_1 و H_2 بلوک‌های 1×1 به‌صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} H_1 &= \left[\hbar(-\omega j + \chi j^2) - \hbar\omega_0 \right] \left| g,g,j,-j \right\rangle \left\langle g,g,j,-j \right|, \\ H_2 &= \left[\hbar(\omega j + \chi j^2) + \hbar\omega_0 \right] \left| e,e,j,j \right\rangle \left\langle e,e,j,j \right| \cdot \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین عناصر ماتریسی بلوک‌های 3×3، H_3 و H_4 به‌ترتیب به‌صورت

$$\begin{aligned} h_{11} &= \hbar\left[\omega(-j+1) - \omega_0 + \chi(-j+1)^2 \right], \\ h_{12} &= h_{21} = h_{13} = h_{31} = \hbar\lambda\sqrt{2j}, \\ h_{22} &= h_{33} = \hbar(-\omega j + \chi j^2), \\ h_{23} &= h_{32} = \hbar\wp, \end{aligned} \quad (9)$$

و

$$\begin{aligned} h'_{11} &= h'_{22} = \hbar(\omega j + \chi j^2), \\ h'_{32} &= h'_{23} = h'_{13} = h'_{31} = \hbar\lambda\sqrt{2j}, \\ h'_{12} &= h'_{21} = \hbar\wp, \\ h'_{33} &= \hbar\left[\omega(j-1) + \omega_0 + \chi(j-1)^2 \right], \end{aligned} \quad (10)$$

داده می‌شوند. برای یک m داده شده، H_5 یک بلوک 4×4 با عناصر ماتریسی می‌باشد.

$$\begin{aligned} h''_{11} &= \hbar\left[\omega(m+2) - \omega_0 + \chi(m+2)^2 \right], \\ h''_{12} &= h''_{21} = h''_{13} = h''_{31} = \hbar\lambda\sqrt{(j-m-1)(j+m+2)}, \\ h''_{24} &= h''_{42} = h''_{34} = h''_{43} = \hbar\lambda\sqrt{(j-m)(j+m+1)}, \\ h''_{22} &= h''_{33} = \hbar\left[\omega(m+1) + \chi(m+1)^2 \right], \\ h''_{23} &= h''_{32} = \hbar\wp, \\ h''_{44} &= \hbar\left[\omega m + \omega_0 + \chi m^2 \right], \\ h''_{14} &= h''_{41} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

برای مشخص شدن حالت گرمایی سامانهٔ فوق، لازم است که ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های هامیلتونی H را به‌دست آوریم. برای این منظور باید هر کدام از بلوک‌های H_3، H_4 و H_5 را قطری نمائیم. ویژه‌مقادیر هامیلتونی‌های H_3 و H_4 برحسب عناصر ماتریسی آنها به‌ترتیب به‌صورت

$$\begin{aligned} E_1 &= h_{22} - h_{23}, \\ E_{2(3)} &= \frac{1}{2}\left(h_{11} + h_{22} + h_{23} \pm \sqrt{(-h_{11} + h_{22} + h_{23})^2 + 8(h_{12})^2}\right), \\ E'_1 &= h'_{11} - h'_{12}, \\ E'_{2(3)} &= \frac{1}{2}\left(h'_{33} + h'_{11} + h'_{12} \pm \sqrt{(-h'_{33} + h'_{11} + h'_{12})^2 + 8(h'_{13})^2}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

و ویژه‌حالت‌های متناظر آنها به‌ترتیب زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} \left| \psi_i(j) \right\rangle &= \alpha_i(j) \left| g,g,j,-j+1 \right\rangle \\ &+ \beta_i(j) \left| e,g,j,-j \right\rangle + \gamma_i(j) \left| g,e,j,-j \right\rangle, \\ \left| \psi'_i(j) \right\rangle &= \alpha'_i(j) \left| e,g,j,j \right\rangle \\ &+ \beta'_i(j) \left| g,e,j,j \right\rangle + \gamma'_i(j) \left| e,e,j,j-1 \right\rangle, \\ &(\mathrm{i} = 1,2,3) \end{aligned} \quad (13)$$

به‌طوری‌که ضرائب بسط به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_1(j) &= 0, \\ \alpha_{2(3)}(j) &= \left[2 + \left(\frac{h_{11} - E_{2(3)}(j)}{2h_{12}}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{11} - E_{2(3)}(j)}{2h_{12}}\right), \\ \beta_1(j) &= -\gamma_1(j) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \beta_{2(3)}(j) &= \gamma_{2(3)}(j) = \left[2 + \left(\frac{h_{11} - E_{2(3)}(j)}{2h_{12}}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \alpha'_1(j) &= 0, \\ \alpha'_{2(3)}(j) &= \left[2 + \left(\frac{h'_{33} - E'_{2(3)}(j)}{2h'_{13}}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{h'_{33} - E'_{2(3)}(j)}{2h'_{13}}\right), \\ \beta'_1(j) &= -\gamma'_1(j) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \beta'_{2(3)}(j) &= \gamma'_{2(3)}(j) = \left[2 + \left(\frac{h'_{33} - E'_{2(3)}(j)}{2h'_{13}}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

اما به‌ازای یک m داده شده ویژه‌مقادیر بلوک H_5، عبارتند از:

$$\begin{aligned} E''_1(j,m) &= h''_{22} - h''_{23}, \\ E''_i(j,m) &= -\frac{a}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\cos\left[\frac{2}{3}(i-1)\pi + \phi\right] (i = 2,3,4), \end{aligned} \quad (15)$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{3}\cos^{-1}\left[\frac{9ab - 2a^3 - 27c}{2(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} \right], \\ a &= -(h''_{11} + h''_{22} + h''_{44} + h''_{23}), \\ b &= (h''_{23} + h''_{22})(h''_{11} + h''_{44}) + h''_{11}h''_{44} - 2(h''_{12})^2 - 2(h''_{24})^2, \\ c &= 2(h''_{24})^2 h''_{11} + 2(h''_{12})^2 h''_{44} - h''_{11}h''_{44}(h''_{23} + h''_{22}), \end{aligned} \quad (16)$$

و ویژه‌حالت‌های متناظر آنها عبارتند از:

$$\begin{aligned}\left|\psi_i''(j,m)\right\rangle &= \alpha_i''(j,m)\left|g,g,j,m+2\right\rangle \\ &+\beta_i''(j,m)\left|e,g,j,m+1\right\rangle \\ &+\gamma_i''(j,m)\left|g,e,j,m+1\right\rangle+\delta_i''(j,m)\left|e,e,j,m\right\rangle,\end{aligned} \tag{17}$$

به‌طوری‌که ضرائب بسط به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\alpha_1''(j,m)=0, \alpha_i''(j,m)=\left[1+2S_i^2+T_i^2\right]^{-\frac{1}{2}}T_i, \\ &\beta_1''(j,m)=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_i''(j,m)=\left[1+2S_i^2+T_i^2\right]^{-\frac{1}{2}}S_i, \\ &\gamma_1''(j,m)=-\beta_1''(j,m), \gamma_i''(j,m)=\beta_i''(j,m), \\ &\delta_1''(j,m)=0, \delta_i''(j,m)=\left[1+2S_i^2+T_i^2\right]^{-\frac{1}{2}}, (i=2,3,4), \\ &S_i=\frac{E_i''(j,m)-h_{44}''}{2h_{24}''}, \\ &T_i=\frac{E_i''(j,m)^2+(a+h_{11}'')E_i''(j,m)+h_{44}''(h_{22}''+h_{23}'')-2h_{24}''^{\,2}}{2h_{12}''h_{24}''}.\end{aligned} \tag{18}$$

ماتریس چگالی گرمایی:

حالت گرمایی یک سامانه با هامیلتونی $\widehat{H}$ در تعادل گرمایی با یک منبع گرمایی در دمای T به‌وسیلهٔ ماتریس چگالی

$$\rho(T)=\frac{e^{-\frac{H}{K_BT}}}{Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})},$$

داده می‌شود، که K_B ثابت بولتزمن، T دمای تعادل و $Z=Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})$ تابع پارش می‌باشند. بنابراین حالت گرمایی اتم-میدان $\rho_{af}(T)$، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\rho_{af}(T)=\frac{1}{Z}\Bigg[& e^{-\frac{E_0}{K_BT}}\left|g,g,j,-j\right\rangle\left\langle g,g,j,-j\right| \\ &+e^{-\frac{E_0'}{K_BT}}\left|e,e,j,j\right\rangle\left\langle e,e,j,j\right| \\ &+\sum_{i=1}^{3}\left(e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\left|\psi_i(j)\right\rangle\left\langle\psi_i(j)\right|+e^{-\frac{E_i'(j)}{K_BT}}\left|\psi_i'(j)\right\rangle\left\langle\psi_i'(j)\right|\right) \\ &+\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E_i''(j,m)}{K_BT}}\left|\psi_i''(j,m)\right\rangle\left\langle\psi_i''(j,m)\right|\Bigg].\end{aligned} \tag{19}$$

اکنون با جاگذاری ویژه‌حالت‌های مربوط به‌بلوک‌های H_3، H_4 و H_5 در رابطهٔ بالا، ماتریس چگالی گرمایی سامانه را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned}\rho_{af}(T)=&\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})}\times \\ &\Bigg\{e^{-\frac{E_0}{K_BT}}\left|g,g,j,-j\right\rangle\left\langle g,g,j,-j\right|+e^{-\frac{E_0'}{K_BT}}\left|e,e,j,j\right\rangle\left\langle e,e,j,j\right| \\ &+\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\Big[\left|\alpha_i(j)\right|^2\left|g,g,j,-j+1\right\rangle\left\langle g,g,j,-j+1\right| \\ &+\left|\beta_i(j)\right|^2\left|e,g,j,-j\right\rangle\left\langle e,g,j,-j\right|+\left|\gamma_i(j)\right|^2\left|g,e,j,-j\right\rangle\left\langle g,e,j,-j\right| \\ &+\alpha_i(j)\beta_i^*(j)\left|g,g,j,-j+1\right\rangle\left\langle e,g,j,-j\right|+H.C. \\ &+\alpha_i(j)\gamma_i^*(j)\left|g,g,j,-j+1\right\rangle\left\langle g,e,j,-j\right|+H.C. \\ &+\beta_i(j)\gamma_i^*(j)\left|e,g,j,-j\right\rangle\left\langle g,e,j,-j\right|+H.C.\Big] \\ &+e^{-\frac{E_i'(j)}{K_BT}}\Big[\left|\alpha_i'(j)\right|^2\left|e,g,j,j\right\rangle\left\langle e,g,j,j\right| \\ &+\left|\beta_i'(j)\right|^2\left|g,e,j,j\right\rangle\left\langle g,e,j,j\right| \\ &+\left|\gamma_i'(j)\right|^2\left|e,e,j,j-1\right\rangle\left\langle e,e,j,j-1\right| \\ &+\alpha_i'(j)\beta_i'^*(j)\left|e,g,j,j\right\rangle\left\langle g,e,j,j\right|+H.C. \\ &+\alpha_i'(j)\gamma_i'^*(j)\left|e,g,j,j\right\rangle\left\langle e,e,j,j-1\right|+H.C. \\ &+\beta_i'(j)\gamma_i'^*(j)\left|g,e,j,j\right\rangle\left\langle e,e,j,j-1\right|+H.C.\Big] \\ &+\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E_i''(j,m)}{K_BT}}\Big[\left|\alpha_i''(j,m)\right|^2\left|g,g,j,m+2\right\rangle\left\langle g,g,j,m+2\right| \\ &+\left|\beta_i''(j,m)\right|^2\left|e,g,j,m+1\right\rangle\left\langle e,g,j,m+1\right| \\ &+\left|\gamma_i''(j,m)\right|^2\left|g,e,j,m+1\right\rangle\left\langle g,e,j,m+1\right| \\ &+\left|\delta_i''(j,m)\right|^2\left|e,e,j,m\right\rangle\left\langle g,e,j,m\right| \\ &+\alpha_i''(j,m)\beta_i''^*(j,m)\left|g,g,j,m+2\right\rangle\left\langle e,g,j,m+1\right|+H.C. \\ &+\alpha_i''(j,m)\gamma_i''^*(j,m)\left|g,g,j,m+2\right\rangle\left\langle g,e,j,m+1\right|+H.C. \\ &+\alpha_i''(j,m)\delta_i''^*(j,m)\left|g,g,j,m+2\right\rangle\left\langle e,e,j,m\right|+H.C. \\ &+\beta_i''(j,m)\gamma_i''^*(j,m)\left|e,g,j,m+1\right\rangle\left\langle g,e,j,m+1\right|+H.C. \\ &+\beta_i''(j,m)\delta_i''^*(j,m)\left|e,g,j,m+1\right\rangle\left\langle e,e,j,m\right|+H.C. \\ &+\gamma_i''(j,m)\delta_i''^*(j,m)\left|g,e,j,m+1\right\rangle\left\langle e,e,j,m\right|+H.C.\Big]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{20}$$

همچنین تجزیهٔ فضای هیلبرت به‌صورت جمع مستقیم زیرفضاها این امکان را فراهم می‌سازد تا برای هریک از زیرفضاها به‌طور مجزا ماتریس چگالی گرمایی محاسبه کنیم. برای زیرفضای بر انگیختهٔ خنثی $\mathcal{H}^{(1)}$ و $\mathcal{H}^{(2)}$ ماتریس‌های چگالی گرمایی به‌ترتیب به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_{af}^{(1)}(T)=\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H_1}{K_BT}})}e^{-\frac{E_0}{K_BT}}\left|g,g,j,-j\right\rangle\left\langle g,g,j,-j\right|, \tag{21}$$

22 $$\rho_{af}^{(2)}(T)=\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H_2}{K_BT}})}e^{-\frac{E_0'}{K_BT}}|e,e,j,j\rangle\langle e,e,j,j|.$$

واضح است که این حالت سامانه جدا پذیر (غیردرهم‌تنیده) می‌باشند. برای زیرفضاهای برانگیخته اول $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ ماتریس‌های چگالی گرمایی نظیر به‌ترتیب به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\rho_{af}^{(3)}(T)=&\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H_3}{K_BT}})}\\ &\times\Big\{\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\Big[|\alpha_i(j)|^2|g,g,j,-j+1\rangle\langle g,g,j,-j+1|\\ &+|\beta_i(j)|^2|e,g,j,-j\rangle\langle e,g,j,-j|+|\gamma_i(j)|^2|g,e,j,-j\rangle\langle g,e,j,-j|\\ &+\alpha_i(j)\beta_i^*(j)|g,g,j,-j+1\rangle\langle e,g,j,-j|+H.C.\\ &+\alpha_i(j)\gamma_i^*(j)|g,g,j,-j+1\rangle\langle g,e,j,-j|+H.C.\\ &+\beta_i(j)\gamma_i^*(j)|e,g,j,-j\rangle\langle g,e,j,-j|+H.C.\Big]\Big\},\end{aligned}$$ 23

$$\begin{aligned}\rho_{af}^{(4)}(T)=&\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H_4}{K_BT}})}\\ &\times\Big\{\sum_{i=1}^{3}(e^{-\frac{E_i'(j)}{K_BT}}\Big[|\alpha_i'(j)|^2|g,g,j,-j+1\rangle\langle g,g,j,-j+1|\\ &+|\beta_i'(j)|^2|g,e,j,j\rangle\langle g,e,j,j|+|\gamma_i'(j)|^2|e,e,j,j-1\rangle\langle e,e,j,j-1|\\ &+\alpha_i'(j)\beta_i'^*(j)|e,g,j,j\rangle\langle g,e,j,j|+H.C.\\ &+\alpha_i'(j)\gamma_i'^*(j)|e,g,j,j\rangle\langle e,e,j,j-1|+H.C.\\ &+\beta_i'(j)\gamma_i'^*(j)|e,g,j,-j\rangle\langle g,e,j,-j|+H.C.\Big]\Big\}.\end{aligned}$$ 24

همچنین ماتریس چگالی گرمایی برای زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌صورت

$$\begin{aligned}\rho_{af}^{(5)}(T)=&\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H_5}{K_BT}})}\\ &\times\Big\{\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E_i''(j,m)}{K_BT}}\Big[|\alpha_i''(j,m)|^2|g,g,j,m+2\rangle\langle g,g,j,m+2|\\ &+|\beta_i''(j,m)|^2|e,g,j,m+1\rangle\langle e,g,j,m+1|\\ &+|\gamma_i''(j,m)|^2|g,e,j,m+1\rangle\langle g,e,j,m+1|\\ &+|\delta_i''(j,m)|^2|e,e,j,m\rangle\langle g,e,j,m|\\ &+\alpha_i''(j,m)\beta_i''^*(j,m)|g,g,j,m+2\rangle\langle e,g,j,m+1|+H.C.\\ &+\alpha_i''(j,m)\gamma_i''^*(j,m)|g,g,j,m+2\rangle\langle g,e,j,m+1|+H.C.\\ &+\alpha_i''(j,m)\delta_i''^*(j,m)|g,g,j,m+2\rangle\langle e,e,j,m|+H.C.\\ &+\beta_i''(j,m)\gamma_i''^*(j,m)|e,g,j,m+1\rangle\langle g,e,j,m+1|+H.C.\\ &+\beta_i''(j,m)\delta_i''^*(j,m)|e,g,j,m+1\rangle\langle e,e,j,m|+H.C.\end{aligned}$$ 25

$$+\gamma_i''(j,m)\delta_i''^*(j,m)|g,e,j,m+1\rangle\langle e,e,j,m|+H.C.\Big]\Big\}.$$

به‌دست می‌آید.

درهم تنیدگی گرمایی اتم–اتم:

در این بخش درهم‌تنیدگی گرمایی بین اتم‌ها را برای حالت گرمایی ρ_{af} و هر کدام از حالت‌های گرمایی $\rho_{af}^{(3)}$، $\rho_{af}^{(4)}$ و $\rho_{af}^{(5)}$ مطالعه می‌کنیم. در اینجا از سنجه تلاقی [10] برای اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها استفاده می‌کنیم. این سنجه، برای یک ماتریس چگالی دو کیوبیتی به‌صورت $C(\rho)=\max\{0,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\}$, تعریف می‌شود که در آن $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq\lambda_4$ مجذور ویژه‌مقادیر عملگر

27 $$\rho(\sigma_y^{(1)}\otimes\sigma_y^{(2)})\rho^*(\sigma_y^{(1)}\otimes\sigma_y^{(2)})$$

می‌باشند و $\sigma_y^{(i)}$ $(i=1,2)$ مؤلفهٔ y ماتریس پائولی برای iامین اتم است. مقدار تابع $C(\rho)$ برای حالت جداپذیر صفر و برای حالت بیشینه درهم‌تنیدهٔ یک می‌باشد. برای به‌دست آوردن ماتریس چگالی اتمی بایستی روی حالت میدان لازم است ردگیری انجام دهیم. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با ردگیری روی حالت‌های میدان $|j,m\rangle$، ماتریس چگالی تقلیل یافته اتمی $\rho_a(T)$ برحسب پایه‌های اتمی $\{|g,g\rangle,|e,g\rangle,|g,e\rangle,|e,e\rangle\}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_a(T)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(T)&0&0&0\\0&\rho_{22}(T)&\rho_{23}(T)&0\\0&\rho_{32}(T)&\rho_{33}(T)&0\\0&0&0&\rho_{44}(T)\end{pmatrix},$$ 28

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}\rho_{11}(T)=&\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})}\Big\{e^{-\frac{E_0}{K_BT}}+e^{-\frac{E_0'}{K_BT}}+\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\alpha_i(j)^2\\ &+e^{-\frac{E_i'(j)}{K_BT}}\alpha_i'(j)^2+\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E_i''(j,m)}{K_BT}}\alpha_i''(j,m)^2\Big\},\end{aligned}$$ 29

$$\rho_{22}(T)=\rho_{33}(T)=\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})}\left\{\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\beta_i(j)^2\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{E'_i(j)}{K_BT}}\beta'_i(j)^2+\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\beta''_i(j,m)^2\right\},$$
$$\rho_{23}(T)=\rho^*_{32}(T)=\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})}\left\{\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\beta_i(j)\gamma^*_i(j)\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{E'_i(j)}{K_BT}}\beta'_i(j)\gamma'^*_i(j)+\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\beta''_i(j,m)\gamma''^*_i(j,m)\right\},$$
$$\rho_{44}(T)=\frac{1}{Tr(e^{-\frac{H}{K_BT}})}\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\delta''^2_i(j,m),$$

می‌باشند. در زیرفضاهای برانگیختهٔ $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$، با ردگیری روی حالت‌های میدان، ماتریس چگالی کاهش یافتهٔ اتمی به‌ترتیب به‌صورت

$$\rho_a^{(3)}(T)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(T) & 0 & 0\\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T)\\ 0 & \rho^*_{23}(T) & \rho_{33}(T)\end{pmatrix},$$

30

$$\rho_a^{(4)}(T)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(T) & 0 & 0\\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T)\\ 0 & \rho^*_{23}(T) & \rho_{33}(T)\end{pmatrix},$$

محاسبه می‌شوند به‌طوری‌که عناصر ماتریسی $\rho_a^{(3)}$ به‌صورت

$$\rho_{11}(T)=\frac{1}{Z_3}\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\alpha_i(j)^2,$$
$$\rho_{22}(T)=\rho_{33}(T)=\frac{1}{Z_3}\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\beta_i(j)^2,\qquad 31$$
$$\rho_{23}(T)=\frac{1}{Z_3}\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E_i(j)}{K_BT}}\beta_i(j)\gamma^*_i(j),$$

و عناصر ماتریسی $\rho_a^{(4)}$ به‌صورت زیر می‌باشند

$$\rho_{11}(T)=\frac{1}{Z_4}\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E'_i(j)}{K_BT}}\alpha'_i(j)^2,$$
$$\rho_{22}(T)=\rho_{33}(T)=\frac{1}{Z_4}\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E'_i(j)}{K_BT}}\beta'_i(j)^2,\qquad 32$$
$$\rho_{23}(T)=\frac{1}{Z_4}\sum_{i=1}^{3}e^{-\frac{E'_i(j)}{K_BT}}\beta'_i(j)\gamma'^*_i(j).$$

در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_a^{(5)}(T)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(T) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T) & 0\\ 0 & \rho_{32}(T) & \rho_{33}(T) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(T)\end{pmatrix},\qquad 33$$

و درایه‌های آن عبارتند از:

$$\rho_{11}(T)=\frac{1}{Z_5}\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\alpha''^2_i(j,m),$$
$$\rho_{22}(T)=\rho_{33}(T)=\frac{1}{Z_5}\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\beta''^2_i(j,m),\qquad 34$$
$$\rho_{23}(T)=\rho_{32}^*(T)=\frac{1}{Z_5}\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\beta''_i(j,m)\gamma''^*_i(j,m),$$
$$\rho_{44}(T)=\frac{1}{Z_5}\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=-j}^{j}e^{-\frac{E''_i(j,m)}{K_BT}}\delta''^2_i(j,m)\cdot$$

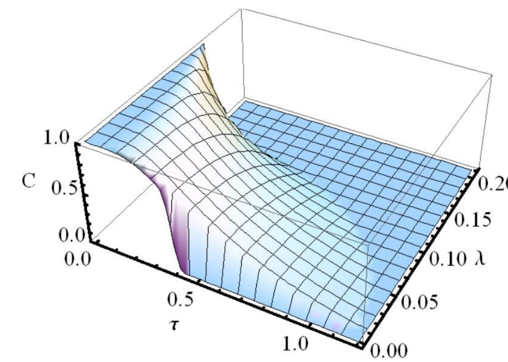
برای هر کدام از ماتریس‌های چگالی اتمی به‌دست آمده در روابط28 تا 34 سنجهٔ تلاقی به‌شکل زیر محاسبه می‌شود [10]:

$$C=2\max\left\{0,\left|\rho_{23}(T)\right|-\sqrt{\rho_{11}(T)\rho_{44}(T)}\right\}\cdot\qquad 35$$

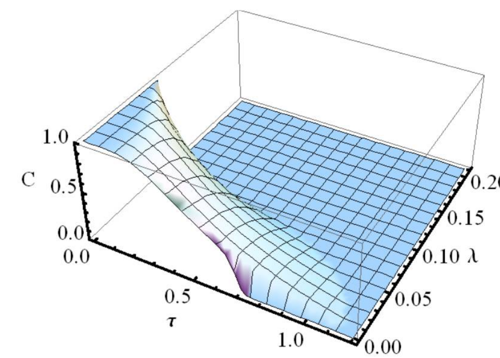
از آنجایی که در دمای صفر حالت گرمایی سامانه به‌حالت پایه آن تقلیل می‌یابد، انتظار داریم که سنجه تلاقی در دمای صفر میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها در حالت پایه را نشان دهد. با افزایش دمای سامانه، حالت‌های دیگر با حالت پایه آمیخته شده و میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها دچار تغییر می‌گردد. نهایتاً در دماهای خیلی بالا (دمای آستانه) چون سامانه به‌آمیختگی کامل می‌رسد، اتم‌ها جداپذیر می‌شوند.

در شکل‌های 1تا 4 تأثیرات دما، جفت شدگی اتم–میدان و اتم-اتم را بر میزان درهم‌تنیدگی گرمایی در فضای هیلبرت$\mathcal{H}$ و هر یک از زیرفضاهای آن بررسی کرده‌ایم. در شکل1 تغییرات تابع $C(\rho)$ برحسب دمای بدون بعد $\tau=\frac{K_BT}{\hbar\omega}$ و جفت شدگی اتم-میدان λ به‌ازای مقادیر مختلف j نشان داده شده است. این شکل نشان

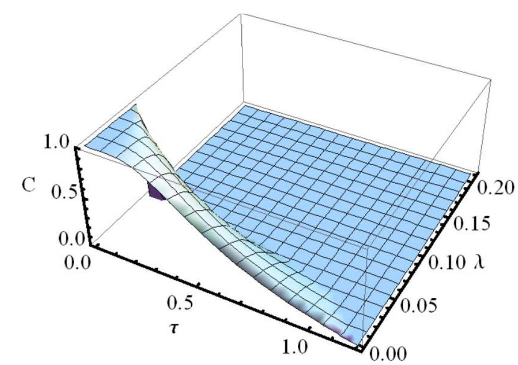
می‌دهد که به‌ازای λ های کوچک، سنجۀ تلاقی در دمای صفر (سنجه تلاقی برای حالت پایه) بیشینه مقدار خود را دارد که با افزایش دما و آمیخته شدن حالت‌های اتمی دیگر مقدار آن به‌طور مجانبی کاهش می‌یابد. نهایتاً در یک دمای آستانه به‌دلیل فرایند آمیختگی کامل، اتم‌ها جداپذیر می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌ازای λ های کوچک دمای آستانه با افزایش j افزایش می‌یابد. همچنین این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش λ میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها کاهش می‌یابد. شیب این کاهش با افزایش j بیشتر شده به‌طوری‌که به‌ازای j های بزرگ مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی حالت پایه مشاهده می‌شود. در شکل2، رفتار $C(\rho)$ را در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$،$\mathcal{H}^{(4)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای یک j داده شده بررسی کرده‌ایم. محاسبات عددی نشان می‌دهند که رفتار $C(\rho)$ برحسب j در تمامی زیرفضاها مشابه رفتار آن برحسب j در فضای کل $\mathcal{H}$ است به‌همین دلیل در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$،$\mathcal{H}^{(4)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ رفتار $C(\rho)$ را فقط برای یک j داده شده بررسی کرده‌ایم. شکل2 نشان می‌دهد که در زیر فضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای λ های کوچک، حالت پایه در بیشینۀ مقدار خود قرار دارد. دلیل فیزیکی این نتیجه این است که به‌ازای λ های کوچک حالت گرمایی سامانه در زیر فضاهای مذکور به‌ترتیب به‌ویژه حالت‌های $|\psi_1(j)\rangle$ و $|\psi_1''(j,m)\rangle$ تقلیل می‌یابد. در این حالت با ردگیری جزئی نسبت به‌پایه‌های میدان می‌توان نشان داد که حالت گرمایی تقلیل یافته اتمی، همان حالت‌های بل هستند. همان‌طور که شکل2 نشان می‌دهد با افزایش دما به‌دلیل آمیخته شدن این حالت‌های بل اتمی با دیگر حالت‌های اتمی میزان درهم‌تنیدگی گرمایی کاهش می‌یابد و نهایتاً در دمای آستانه، درهم‌تنیدگی از بین می‌رود. همچنین مشاهده می‌شود که در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ دمای آستانه با λ کاهش می‌یابد در حالی‌که در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ دمای آستانه با λ افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر، در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای مقادیر کوچک λ درهم‌تنیدگی گرمایی اتم‌ها نسبت به‌افزایش دما پایدار است در حالی‌که مشاهدۀ این ویژگی در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ فقط به‌ازای λ های بزرگ مقدور می‌باشد. در شکل3 تغییرات $C(\rho)$ را برحسب دمای بدون بعد τ و جفت‌شدگی اتم-اتم $\wp$، در فضای کل $\mathcal{H}$ و زیرفضاهای آن نشان داده‌ایم. این شکل نشان می‌دهد که در فضای کل $\mathcal{H}$ و در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای $\wp=0$ سنجۀ تلاقی $C(\rho)$ صفر بوده، به‌طوری‌که با افزایش $\wp$، مقدار آن به‌طور ناگهانی به‌بیشینه مقدار خود می‌رسد. در حالی‌که در زیر فضای $\mathcal{H}^{(4)}$ تابع تلاقی حالت پایه به‌ازای $\wp=0$ غیر صفر بوده که با افزایش $\wp$ مقدار آن به‌صفر می‌رسد. همچنین مشاهده می‌شود که در فضای کل $\mathcal{H}$ و زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ با افزایش دما میزان درهم‌تنیدگی گرمایی کاهش می‌یابد اما در زیرفضای $\mathcal{H}^{(4)}$ میزان درهم‌تنیدگی با دما افزایش پیدا می‌کند. علاوه‌براین ملاحظه می‌کنیم که در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای $\wp$های بزرگ پایداری درهم‌تنیدگی اتم‌ها نسبت به‌افزایش دما بیشتر است در حالی‌که در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ این پایداری به‌ازای $\wp$های کوچک مشاهده می‌شود.



1(a)

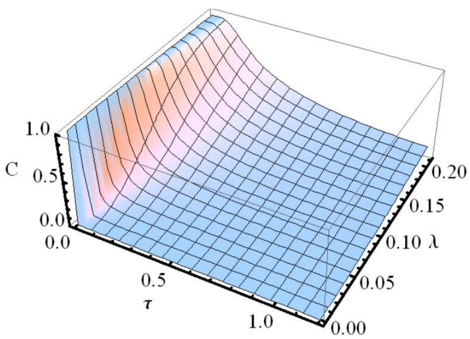


1(b)

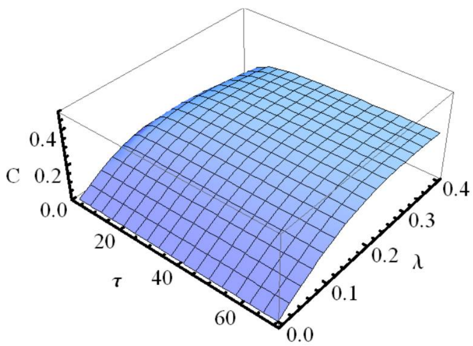


1(c)

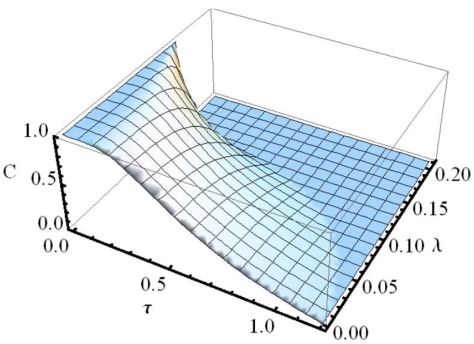
شکل1. تغییرات $C(\rho)$ برحسب $\tau=\frac{K_BT}{\hbar\omega}$ و λ در فضای کل $\mathcal{H}$ به‌ازای (a) $j=5$، (b) $j=8$ و (c) $j=12$ برای مقادیر داده شده $\omega_0=0.2\omega$، $\wp=\omega$ و $\chi=0.2\omega$.



2(a)



2(b)



2(c)

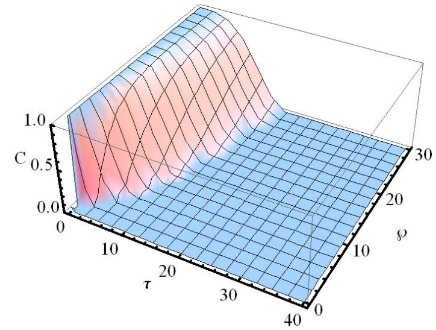
شکل2. تغییرات $C(\rho)$ برحسب $\tau=\frac{K_BT}{\hbar\omega}$ و λ در زیرفضاهایی (a) $\mathcal{H}^{(3)}$، (b) $\mathcal{H}^{(4)}$ و (c) $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای $j=5$ برای مقادیر داده شده در شکل1.

بحث و نتیجه‌گیری

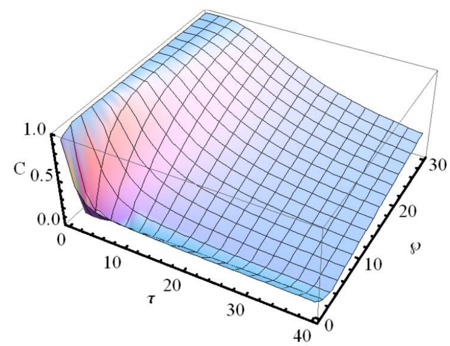
یک مدل کوانتومی که در آن دو اتم دوترازه با جفت شدگی دوقطبی-دوقطبی و یک جفت‌گر کر غیرخطی هم‌محور که در آن برهم‌کنش اتم و میدان از طریق گذار دو-فوتونی غیرهمگن انجام می‌گیرد مورد مطالعه قرار گرفت. با استفاده از ثابت حرکت سامانه، فضای هیلبرت متناظر را به‌پنج زیرفضا به‌صورت

$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \mathcal{H}^{(3)} \oplus \mathcal{H}^{(4)} \oplus \mathcal{H}^{(5)}$,

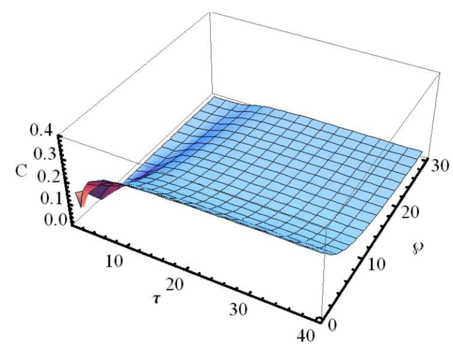
تجزیه کردیم. ویژه‌حالت‌های هامیلتونی سامانه را به‌دست آورده و سپس حالت گرمایی سامانه را در فضای هیلبرت کل و هریک از زیرفضاهای آن به‌دست آوردیم. با استفاده از سنجۀ تلاقی میزان درهم‌تنیدگی گرمایی اتم‌ها را در فضای هیلبرت کل و همچنین در هر یک از زیرفضاهای آن مطالعه کردیم. محاسبات عددی نشان داد که سنجه تلاقی به‌صورت تابعی از دما در فضای کل و هر یک از زیرفضاهای آن، رفتار متفاوتی را نشان می‌دهد. مشاهده شد که در زیرفضاهای برانگیخته خشی $\mathcal{H}^{(1)}$و $\mathcal{H}^{(2)}$ در هر دمایی اتم‌ها جداپذیرند. درحالی‌که در فضای‌کلی و زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ $\mathcal{H}^{(4)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ درهم‌تنیدگی اتم-اتم وجود دارد و جفت‌شدگی اتم-اتم و اتم-میدان، میزان درهم‌تنیدگی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. همچنین نشان داده شد که در زیرفضاهای برانگیختۀ فرد $\mathcal{H}^{(3)}$و $\mathcal{H}^{(4)}$ می‌توان درهم‌تنیدگی گرمایی در دماهای بالا را حفظ نمود. در زیر فضای $\mathcal{H}^{(3)}$ حفظ درهم‌تندگی به‌ازای مقادیر بزرگ ثابت‌های جفت‌شدگی اتم–اتم یا اتم–میدان و در زیرفضای $\mathcal{H}^{(4)}$ به‌ازای مقادیر کوچک این ثابت‌ها امکان پذیر است. بنابراین برخلاف مطالعات قبلی [12-14] و [16] که در آنها کنترل درهم‌تنیدگی در دماهای بالا از طریق انتخاب مناسب پارامترهای سامانه‌های اپتیکی محقق می‌شد، نشان دادیم که محدود کردن مطالعه درهم‌تنیدگی گرمایی به‌برخی از زیرفضاهای سامانه، نیز منجر به‌حفظ درهم‌تنیدگی در دماهای بالا می‌شود.



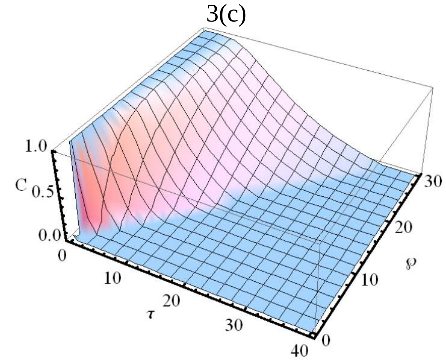
3(a)



3(b)



3(c)



3(d)

شکل3. تغییرات $C(\rho)$ برحسب $\tau = \frac{K_B T}{\hbar\omega}$ و ℘ (a) در فضای کلی $\mathcal{H}$ و زیر فضاهای(b) $\mathcal{H}^{(3)}$، (c) $\mathcal{H}^{(4)}$ و (d) $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای $j = 5$، $\omega_0 = 0.2\omega$، $\lambda = 0.2\omega$ و $\chi = 0.2\omega$.

مرجع‌ها

[1] A. Ekert and R. Jozsa, Quantum computation and Shor's factoring algorithm, *Reviews of Modern Physics* **68** (1996) 733-753. DOI:https://doi.org/10.1103/RevModPhys.68.733

[2] H.K. Lo, S. Popescu, T. Spiller, Introduction to Quantum Computation and Information, *World Scientific*, Singapore, (1998).

[3] S.M. Jensen, The nonlinear coherent coupler, *IEE J. Quantum Electron* **18** (1982) 1580-1583. DOI: 10.1109/JQE.1982.1071438

[4] A. Chefles, S.M. Barnett, Quantum theory of two-mode nonlinear directional couplers, *Journal of Modern Optics* **43** (1996) 709-727. DOI:10.1080/09500349608232778

[5] R. Horák, M. Bertolotti, C. Sibilia, J. Peřina, Quantum effects in a nonlinear coherent coupler, *Journal of the Optical Society of America B* **6** (1989) 199-204. DOI: https://doi.org/10.1364/JOSAB.6.000199

[6] M.J. Faghihi, M.K. Tavassoly, M. Hatami, Dynamics of entanglement of a three-level atom in motion interacting with two coupled modes including parametric down conversion, *Physica A* **407** (2014) 100-109.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.03.092

[7] A.-S. F. Obada, A.A. Eied, Entanglement in a system of an Ξ -type three-level atom interacting with a non-correlated two-mode cavity field in the presence of nonlinearities, *Optics Communications* **282** (2009) 2184-2191.
DOI:https://doi.org/10.1016/j.optcom.2009.02.038

[8] M.K. Tavassoly, F.Yadollahi, Dynamics of states in the nonlinear interaction regime between a three-level atom and generalized coherent states and their non-classical features, *International Journal of Modern Physics B* **26** (2012) 1250027. DOI:
https://doi.org/10.1142/S0217979212500270

[9] W.Z. Li, L.T. Shen, Sudden death and birth of two-atom entanglement with two thermal fields in coupled cavities, *European Physical Journal* D **67** (2013) 111.
DOI: https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-30709-2

[10] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[11] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein, Volume of the set of separable states, *Physical Review A* **58** (1998) 883-892. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.883

[12] M.R. Abbasi, M.M. Golshan, Thermal entanglement of a two-level atom and bimodal photons in a Kerr nonlinear coupler, *Physica A* **392** (2013) 6161-6167.
DOI: 10.1016/j.physa.2013.07.068

[13] M.R. Abbasi, Thermal atom–atom entanglement in a nonlinear cavity, *Physica A* **426** (2015) 1-8.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.01.048

[14] M.R. Abbasi, Thermal atom–atom entanglement in a bichromatic Kerr nonlinear coupler, *Annals of Physics* **365** (2016) 198-209.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.10.024

[15] B. Mojaveri, A. Dehghani, M.A. Fasihi, T. Mohammadpour, Ground state and thermal entanglement between two two-level atoms interacting with a non-degenerate parametric amplifier: different sub-spaces, *International Journal of Modern Physics. B* **33** (2019) 1950035. DOI:
https://doi.org/10.1142/S0217979219500358

[16] Sh. Alizadeh, R. Safaiee, M.M. Golshan, Effect of temperature on photon–photon entanglement in a nonlinear nanocavity, *Physica A* **428** (2015) 133-139.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.01.050

[17] B. Mojaveri, A. Dehghani, M.A. Fasihi, T. Mohammadpour, Thermal entanglement between two two-level atoms in a two-photon Jaynes-Cummings model with an added Kerr medium, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 3396-3409.

DOI: https://doi.org/10.1007/s10773-018-3853-9