

# The Calculation of binding energy and wave function of $\overline{bb}ss$ tetraquark from lattice QCD potential with analytical approach

Fereshteh Chezani Sharahi, Majid Monemzadeh\*, Abbas Abdoli Arani

Department of Physics, Faculty of science, University of Kashan, Kashan, Iran

Received: 27.06.2018    Final revised: 21.09.2019    Accepted: 28.12.2019

DOI: 10.22055/jrmbms.2020.15329

## Abstract

In this paper, Tetraquark is considered as a bound state of 4-quark systems containing two heavy-heavy antiquarks and two light-light quarks  $ss$ . Tetraquark is also assumed as a 2-body system consisting of two mesons, each containing a light quark and a heavy quark. Born-Oppenheimer approximation could be employed due to the heavy weight mesons. Hence, the Schrödinger equation may be solved by replacing the ensuing potential from lattice QCD. Having solved the equations, the binding energy and tetraquark wave function are then obtained in scalar  $ss$  channel. Finally, obtained values for binding energy are compared with those reported in the literature, and considering the wave function diagrams for the particle, its tetraquark radius is estimated.

**Key words:** Binding energy, Tetraquark, Exotic hadrons, Wave function, Lattice QCD

---

\* Corresponding Author: monem@kashanu.ac.ir



## محاسبه انرژی بستگی و تابع موج تتراکوارک $\overline{bb}ss$ با پتانسیل شبکه QCD به روش تحلیلی

فرشته جزانی شراهی، مجید منعم زاده\*، عباس عبدلی آرائی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

دریافت: 1397/04/06 ویرایش نهائی: 1398/06/30 پذیرش: 1398/10/07

DOI: 10.22055/jrmb.2020.15329

### چکیده

در این مقاله، تتراکوارک به عنوان حالت مقید چهار کوارکی با دو پادکوارک سنگین  $\overline{bb}$  و دو کوارک سبک  $ss$ ، در نظر گرفته می‌شود. همچنین تتراکوارک، به عنوان یک سیستم دو جسمی متشکل از دو مزون فرض شده، که هر مزون، از یک کوارک سبک و یک پادکوارک سنگین تشکیل شده است. با توجه به سنگین بودن هر مزون، می‌توان از تقریب بورن-اپنهایمر استفاده نمود. بنابراین معادله شرودینگر، با جای گذاری پتانسیل  $\overline{bb}$  به دست آمده از شبکه QCD، حل خواهد شد. با حل معادلات به دست آمده از معادله شرودینگر، انرژی بستگی و تابع موج تتراکوارک، برای حالت اسکالر  $ss$  به دست می‌آید. در نهایت مقادیر به دست آمده برای انرژی بستگی با مقادیر تعیین شده در سایر مقالات مقایسه می‌گردد. همچنین، با توجه به نمودارهای تابع موج این ذره، شعاع تتراکوارک تخمین زده می‌شود.

**کلیدواژگان:** انرژی بستگی، تتراکوارک، هادرون‌های ناشناخته، تابع موج، شبکه QCD

نیافته‌اند که مانع وجود این چند کوارکی‌ها باشد، بنابراین با پذیرش وجود چند کوارکی‌ها، ساختارهای مختلفی برای آن‌ها پیشنهاد کرده‌اند [1 و 2].

از دیدگاه اندرکنش‌های قوی، حالت چهار کوارکی در واقع یک سیستم با دو مزون  $(q\bar{q} - \bar{q}q)$  است که از طریق مبادله یک مزون انجام می‌گردد. حالت پنج کوارکی، سیستمی شامل یک مزون و یک باریون  $(qq - \bar{q}q)$  است و حالت شش کوارکی سیستمی با دو باریون  $(qqq - \bar{q}qq)$  (به عنوان مثال دو نوکلئون که تشکیل دوترون می‌دهند) می‌باشد [3]. از سوی دیگر، از دیدگاه اندرکنش‌های بنیادی (با کوارک‌ها به عنوان درجات آزادی و حالت‌های مقید مربوط به تبادل رنگ) ساختارهای دیگری از چند کوارکی‌ها

### مقدمه

به صورت تجربی امکان وجود چند کوارکی‌های ناشناخته مانند تتراکوارک‌ها، پنتاکوارک‌ها، هگزا کوارک‌ها، دو گلوئون-گلوبال‌ها، سه گلوئون-گلوبال‌ها و ... از دهه‌های قبل پیشنهاد شده است [1]. با یادآوری این نکته که نظریه بنیادی برای اندرکنش‌های قوی، کرومودینامیک کوانتومی یا QCD است. بنابراین، پیش‌بینی اینکه آیا حالت‌های چند کوارکی وجود دارند و آیا این حالت‌ها مطابق با انتظارات مدل‌های چند کوارکی یا تفسیرهای دیگری هستند، باید با توجه به این نظریه، پاسخ داده شود. همچنین به دلیل اینکه، دانشمندان فیزیک نظری هیچ قضیه‌ای را در QCD

\* نویسنده مسئول: monem@kashanu.ac.ir

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کپی‌رایت کامنز تخصصی 4.0 بین‌المللی می‌باشد.



این ذرات می‌تواند دلیل محکمی برای تأیید وجود چهارکوارکی‌ها با ساختاری متشکل از دو مزون باشد، به دلیل اینکه، جرم ذره کشف شده  $Z_b^\pm(10610)$  نزدیک به مجموع جرم‌های  $B$  و  $\bar{B}$  است. از دیدگاه اندرکنش‌های بنیادی یک حالت مقید چهار کوارکی را می‌توان با ساختارهای مختلف تفسیر نمود [3]. از نظر پدیده‌شناسی، سیستم‌هایی با دو مزون که هر مزون شامل یک کوارک سبک و یک پادکوارک سنگین یعنی  $Q\bar{Q}q\bar{q}$  است، برای مطالعه حالت مقید چهار کوارکی‌ها مناسب‌تر است. بنابراین چنین حالت‌هایی در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرند [15-11]. با توجه به نکات اخیر، درباره ذره باردار باتمونیوم گونه  $Z_b^\pm$ ، می‌توان بیان کرد که این ذره از یک جفت کوارک-پادکوارک  $B\bar{B}$  تشکیل شده است، که بار الکتریکی موجود در آن را می‌توان با اضافه کردن یک جفت کوارک-پادکوارک سبک  $ss$  توجیه کرد. همچنین عدد کوآنتومی این ذره  $I(J^P) = 1(+1)$  می‌باشد، که در آن  $I$  ایزو اسپین،  $J$  تکانه زاویه‌ای کل و  $P$  پارته است [9].

با توجه به اینکه، در حل عددی معادله شرودینگر، تنها تعدادی از مقادیر انرژی بستگی به دست می‌آید و همچنین هیچ اطلاعاتی در مورد تابع موج ذره نمی‌توان به دست آورد، بنابراین ما علاقه‌مند به حل تحلیلی معادله شرودینگر بوده‌ایم. در این مقاله، انرژی بستگی تتر کوارک  $b\bar{b}ss$ ، با حل تحلیلی معادله شرودینگر به دست می‌آید، به طوری که تمامی مقادیر ممکن برای انرژی بستگی این ذره، به طور کامل و دقیق محاسبه می‌گردد. همچنین، با توجه به رابطه تابع موج به دست آمده از حل تحلیلی معادله شرودینگر، نمودار تابع موج رسم می‌شود. سپس با توجه به نمودارهای تابع موج می‌توان، به برخی اطلاعات و ویژگی‌های جدید در مورد تتراکوارک دست یافت. این تحقیق در چهار بخش ارائه می‌گردد، در بخش اول، مقدمه کار ارائه می‌شود.

می‌تواند وجود داشته باشد [6-3]. بنابراین، امکان وجود سیستم‌های پیچیده‌تر از مزون‌ها و باریون‌ها توسط دانشمندان مختلف بررسی و مطالعه شده است. همچنین، هادرون‌های ناشناخته سیستم‌های بسیار گریزان هستند، به همین دلیل یافتن و مشاهده آن‌ها برای دانشمندان تجربی بسیار دشوارتر از پیش‌بینی‌های آنها بوده است [1].

کشف تجربی حالت‌های چهار کوارکی (دو کوارک و دو پادکوارک) و حالت‌های پنج کوارکی (چهار کوارک و یک پاد کوارک)، زمینه جدیدی در طیف‌سنجی هادرونی باز کرده است. حالت‌های چهار کوارکی ناشناخته که به نام‌های  $X$  و  $Y$  و  $Z$  نامیده می‌شوند در تعدادی از مدل‌های نظری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. همچنین به لحاظ تجربی مزون‌های فراوانی شامل یک یا چند کوارک سنگین مشاهده شده، که این مشاهدات دریچه‌ای ارزشمند از تنوع فیزیک اندرکنش‌های قوی را ارائه می‌دهد [8 و 7].

در سال‌های اخیر آشکارسازی و شناسایی چند کوارکی‌ها مورد توجه بسیاری از دانشمندان نظری و تجربی قرار گرفته است. به صورت تجربی (در LHC و Belle) اخیراً تعدادی مزون مشاهده شده است که هنوز قابل درک نیستند، چرا که عدد کوآنتومی و جرم آنها به یک ساختار چهار کوارکی ناشناخته دلالت دارد. این حالت‌های ناشناخته می‌توانند شاهد و دلیلی برای وجود چند کوارکی‌ها باشند. غالباً حالت مقید چهار کوارکی با عنوان تتر کوارک نام‌گذاری می‌شود [9].

اخیراً دو نامزد چهارکوارکی جدید، در پنج کانال مختلف واپاشی  $\Upsilon(5s)$ ، توسط همکاران بللی مشاهده شده است [10 و 2]. این ذرات، در واقع دو ذره باردار جدید باتمونیوم گونه  $Z_b^\pm$  با جرم 10610 مگا الکترون ولت و 10650 مگا الکترون ولت و پهنای باریک از مرتبه 15 مگا الکترون ولت می‌باشند. همچنین کشف

که در رابطه بالا مقدار  $P=2$  و مقادیر  $\alpha$  و  $d$  از شبکه QCD به دست می‌آیند. همچنین  $V_0$  یک ثابت است که با توجه به دو برابر جرم حالت پایه مزون‌های استاتیک-سبک در کانال اسکالر تتراکوارک  $\overline{bbss}$  به دست می‌آید.

### محاسبه انرژی بستگی و تابع موج تتراکوارک با حل معادله شرودینگر

برای بررسی امکان وجود یک حالت مقید چهار کوارکی، از تقریب بورن-اپنهایمر استفاده می‌شود، یعنی معادله شرودینگر با پتانسیل دو پادکوارک سنگین در حضور دو کوارک سبک استخراج شده از طریق شبکه QCD، حل می‌گردد [18 و 19].

معادله شرودینگر شعاعی موج  $S$  برای سیستم‌های دو جسمی به شکل زیر می‌باشد

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \frac{l(l+1)}{x^2}\right) R_{n,l}(x) + \frac{2\mu}{\hbar} (E - V(x)) R_{n,l}(x) = 0 \quad (3)$$

با تغییر متغیر  $\varphi(x) = xR_{n,l}(x)$  و با فرض  $\hbar=1$ ، معادله 3 به معادله زیر تبدیل خواهد شد،

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + 2\mu(E - V(x)) \phi(x) = 0. \quad (4)$$

اکنون ما پتانسیل تتراکوارک  $V(x)$  را بسط می‌دهیم و سپس آن را در رابطه 4 قرار می‌دهیم. رابطه زیر به دست می‌آید

در بخش دوم، هامیلتونی و پتانسیل تتراکوارک که از شبکه QCD به دست آمده، مطالعه می‌گردد. سپس در بخش سوم، با استفاده از تقریب بورن-اپنهایمر، معادله شرودینگر را برای تتراکوارک  $\overline{bbss}$  به صورت تحلیلی حل خواهد شد. در بخش آخر، نتیجه کار بیان می‌شود.

### هامیلتونی و پتانسیل تتراکوارک $\overline{BB}$

چهارکوارک متشکل از دو کوارک سبک و دو پادکوارک سنگین  $\overline{bbss}$  را در نظر می‌گیریم. هامیلتونی برای مختصات نسبی پادکوارک-پادکوارک به صورت زیر می‌باشد.

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + 2m_H + U(r), \quad (1)$$

که در آن  $U(r) = V(r)|_{V_0=0}$  و  $\mu = \frac{m_H}{2}$  جرم کاهش یافته است [1].

در فواصل بسیار کوتاه  $r$ ، پادکوارک با پتانسیل کولنی با مبدله یک گلوئون به صورت احتمالی اندرکنش می‌کند. در حالی که در فواصل بزرگ  $r$ ، کوارک سبک، به طور کامل کوارک سنگین را می‌پوشاند و این چهار کوارک، دو اندرکنش نسبتاً ضعیف  $B$  مزونی را دارند [1]. این جداسازی کوارک سبک از پادکوارک سنگین باعث کاهش تابع موج به صورت یک تابع نمایی از مرتبه 2، یعنی  $\psi(r) \propto \exp(-r/d)^p$  (مشخصه اندازه مزون  $B$  و  $d < 0.5$  fm است) می‌گردد. بنابراین پتانسیل مربوط به انرژی یک سیستم چهار کوارکی سنگین-سنگین-سبک-سبک منهای انرژی یک جفت مزون حالت پایه سنگین-سبک با در نظر گرفتن ملاحظات شبکه QCD برای چهارکوارک  $\overline{bbss}$  به شکل زیر می‌باشد [3 و 16 و 17]

$$V(r) = V_0 - \frac{\alpha}{r} \exp\left(-\left(\frac{r}{d}\right)^p\right) \quad (2)$$

$$\begin{cases}
 2a_1 = -2\mu\alpha \\
 6a_2 + a_1^2 = -2\mu E \\
 12a_3 + 4a_1a_2 = \frac{2\mu\alpha}{d^2} \\
 20a_4 + 4a_2^2 + 6a_1a_3 = 0 \\
 30a_5 + 8a_1a_4 + 12a_2a_3 = -\frac{\mu\alpha}{d^4} \\
 \vdots
 \end{cases} \quad 8$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) - 2\mu(-E - \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha}{d^2}x - \frac{\alpha}{2d^4}x^3 \\
 & + \frac{\alpha}{6d^6}x^5 - \frac{\alpha}{24d^8}x^7 + \frac{\alpha}{120d^{10}}x^9 - \dots \\
 & - \frac{l(l+1)}{2\mu x^2} \phi(x) = 0
 \end{aligned} \quad 5$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر عددی ثابت‌ها برای تتراکوآرک  $\overline{bbss}$  انرژی بستگی تتراکوآرک در کانال اسکالر ذرات  $ss$  یعنی  $(s^{(1)}s^{(2)} - s^{(2)}s^{(1)})/\sqrt{2}$  و همچنین مقادیر عددی ضرایب، به دست می‌آیند [9].

جداول زیر مقادیر مختلف انرژی بستگی به دست آمده از معادلات بالا برای تتراکوآرک  $\overline{bbss}$  را نشان می‌دهد.

جدول 1. انرژی بستگی برای  $m_b=4977\text{MeV}$

$E_B (\text{MeV})$	$d = 0.3\text{fm}$	$d = 0.2\text{fm}$
$\alpha = 0.22$	-37-57i	-2/05
$\alpha = 0.27$	-	-
$\alpha = 0.35$	-50-21i, -43/94	-114-79i

جدول 2. انرژی بستگی برای  $m_b=5367\text{MeV}$

$E_B (\text{MeV})$	$d = 0.3\text{fm}$	$d = 0.2\text{fm}$
$\alpha = 0.22$	23-80i	-18/73
$\alpha = 0.27$	-32, -118	-
$\alpha = 0.35$	-28-27i, -34	-81-150i

که در جداول بالا انرژی مختلط خواهیم داشت. همان‌گونه که در برخی از مقالات آورده شده است،

در این معادله دیفرانسیل، ما بسط پتانسیل را تا مرتبه نهم در نظر می‌گیریم. برای اینکه جواب‌های این معادله تا تقریب نهم به لحاظ فیزیکی قابل قبول هستند و همچنین با نتایج به دست آمده در سایر مقالات سازگاری خوبی دارند. جواب پیشنهادی برای معادله دیفرانسیل اخیر، به شکل زیر است [20].

$$\begin{aligned}
 \phi(x) = h(x) e^{g(x)} = x^r \exp(a_1x + a_2x^2 \\
 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 \\
 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10}). \quad 6
 \end{aligned}$$

پس از جای‌گذاری رابطه 6 در رابطه 5 و از مساوی قرار دادن توان‌های مختلف  $x$  به صورت جداگانه، تعدادی معادله به دست می‌آید. یکی از روابط به دست آمده به شکل زیر می‌باشد

$$r(r-1) = -l(l+1) \quad 7$$

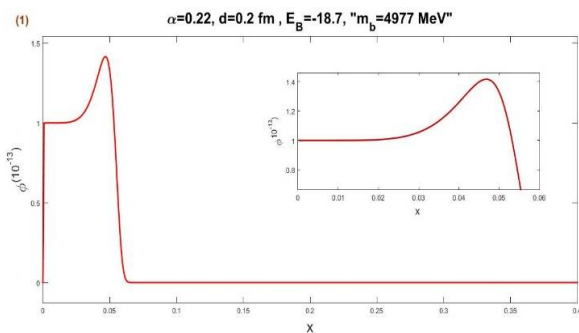
که در حالت پایه یعنی  $l=0$  دو مقدار برای  $r$  تعیین می‌گردد، که با توجه به معادله 5 جواب  $r=1$  قابل قبول است. همچنین، تعدادی معادله غیر خطی به صورت زیر به دست می‌آید.

نمودار تابع موج یک پیک دارد. این پیک می‌تواند نشانگر حداکثر شعاع تتراکوارک باشد. با توجه به شکل‌ها، توابع موج یک بیشینه در  $x=0.045-0.075$  دارد.

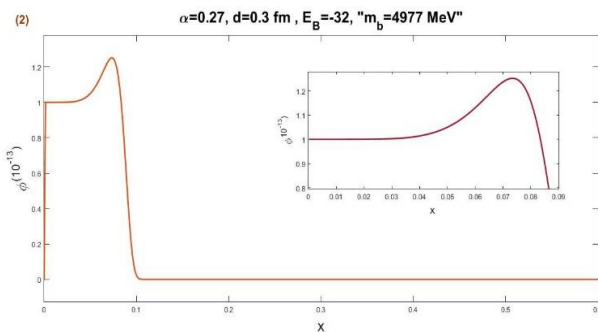
### نتیجه گیری

در این تحقیق، سیستم تتراکوارک متشکل از دو مزون که هر یک شامل یک پادکوارک سنگین و یک کوارک سبک بود، در نظر گرفته شد. سپس معادله شرودینگر برای سیستم دو ذره‌ای با پتانسیل تتراکوارک به دست آمده از ملاحظات شبکه QCD حل شد. با حل آن، معادلات دیفرانسیل غیر خطی به دست آمد.

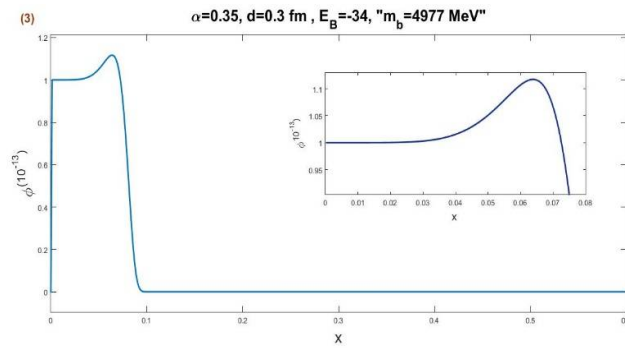
قسمت حقیقی انرژی مختلط، انرژی بستگی را نشان می‌دهد و قسمت موهومی آن نشانگر پهنای واپاشی می‌باشد [21-24]. برای اثبات وجود تتراکوارک  $\overline{bbss}$  باید انرژی بستگی به دست آمده منفی باشد و همچنین مجموع جرم دو ذره تشکیل دهنده تتراکوارک (یعنی مجموع جرم دو مزون)، به علاوه انرژی بستگی، نزدیک به جرم تتراکوارک  $\overline{bbss}$  باشد. بنابراین با توجه به نکات بیان شده، نتایج ذکر شده در جداول بالا تا حدود زیادی قابل قبول می‌باشند. اکنون نمودار تابع موج برای تتراکوارک  $\overline{bbss}$  با توجه به مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $d$  رسم می‌گردد (شکل 5-1). همان‌گونه که در نمودارها نشان داده شده است، هر



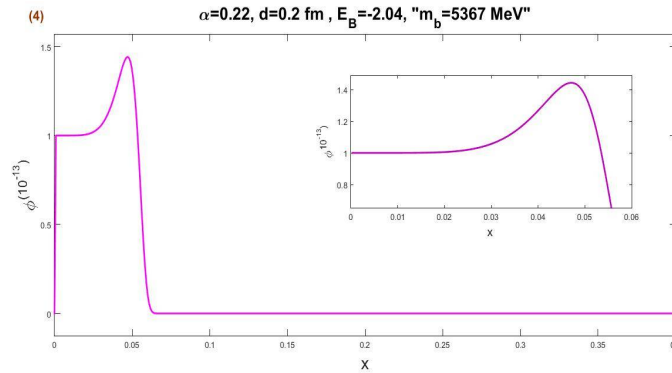
شکل 1. تابع موج  $\overline{bbss}$  برای  $d = 0.2\text{fm}, \alpha = 0.22, m_b = 4977\text{MeV}$



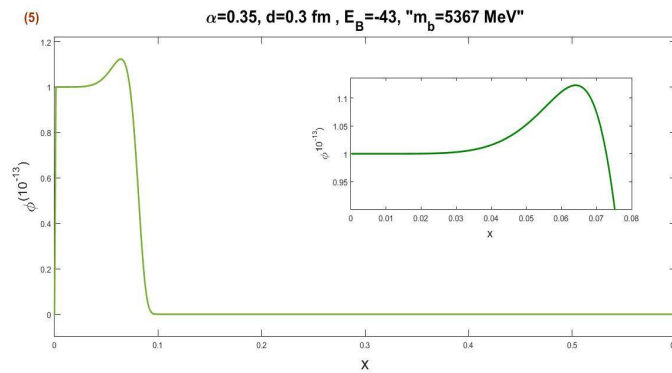
شکل 2. تابع موج  $\overline{bbss}$  برای  $d = 0.3\text{fm}, \alpha = 0.27, m_b = 4977\text{MeV}$



شکل 3. تابع موج  $\overline{bbss}$  برای  $d = 0.3 \text{ fm}, \alpha = 0.35, m_b = 4977 \text{ MeV}$



شکل 4. تابع موج  $\overline{bbss}$  برای  $d = 0.2 \text{ fm}, \alpha = 0.22, m_b = 5367 \text{ MeV}$



شکل 5. تابع موج  $\overline{bbss}$  برای  $d = 0.3 \text{ fm}, \alpha = 0.35, m_b = 5367 \text{ MeV}$

که حالت مقید تتراکوارک  $\overline{bbss}$  می‌تواند وجود داشته باشد. همچنین همان‌گونه که در شکل‌های 1-5 مشخص شده، هر نمودار تابع موج دارای یک بیشینه است که بیانگر شعاع تتراکوارک  $\overline{bbss}$  باشد. با توجه

آن‌گاه با حل دستگاه معادلات غیرخطی انرژی بستگی و تابع موج تعیین شد. نتایج به صورت جداول و نمودارها در قسمت قبل نشان داده شد. مقادیر به دست آمده برای انرژی بستگی تتراکوارک، بیانگر این است

[6] A. Esposito, A.L. Guerrieri, F. Piccinini, A. Pilloni, A.D. Polosa, Four-quark hadrons: an updated review, *International Journal of Modern Physics A* **30** 04n05 (2015) 1530002.

<https://doi.org/10.1142/S0217751X15300021>

[7] G.K. Cheung, C.E. Thomas, J.J. Dudek, R.G. Edwards, Tetraquark operators in lattice QCD and exotic flavour states in the charm sector, *Journal of High Energy Physics*, 11 (2017) 33.

[https://doi.org/10.1007/JHEP11\(2017\)033](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2017)033)

[8] A. Ali, L. Maiani, A.V. Borisov, I. Ahmed, M.J. Aslam, A.Y. Parkhomenko, A. Rehman, A new look at the Y tetraquarks and  $\Omega_c$  baryons in the diquark model, *European Physical Journal C* **78** 1 (2018) 29.

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5501-6>

[9] A. Peters, P. Bicudo, K. Cichy, M. Wagner, Investigation of  $\bar{B}B$  four-quark systems using lattice QCD, *Journal of Physics: Conference Series*, **742** 1 (2016) 012006.

<https://doi.org/10.1088/1742-6596/742/1/012006>

[10] M.N. Anwar, J. Ferretti, F.K. Guo, E. Santopinto, B.S. Zou, Spectroscopy and decays of the fully-heavy tetraquarks, *The European Physical Journal C* **78** 647 (2018).

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6073-9>

[11] J. Vijande, E. Weissman, A. Valcarce, N. Barnea, Are there compact heavy four-quark bound states?, *Physical Review D* **76** (2007) 094027.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.094027>

[12] J. Vijande, A. Valcarce, J.M. Richard, Stability of multi-quarks in a simple string model, *Physical Review D* **76** (2007) 114013.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.114013>

به‌نمودارها شعاع بیشینه برای تترا کوآرک را در  $x=8,88 \text{ fm}-14,79 \text{ fm}$  به‌دست می‌آید.

نتایج به‌دست آمده در این مقاله به‌صورت تحلیلی محاسبه شده است. اما در مراجع دیگر، نتایج از حل عددی معادله شرودینگر به‌دست آمده است. با مقایسه نتایج به‌دست آمده در این مقاله با مراجع دیگر در همان شرایط، می‌بینیم که مقادیر، سازگاری خوبی با سایر مراجع دارد [11 و 1].

### مرجع‌ها

[1] P. Bicudo, M. Cardoso, Tetraquark bound states and resonances in the unitary and microscopic triple string flip-flop quark model, the light-light-antiheavy-antiheavy  $\bar{Q}Qqq$  case study, *Physical Review D* **94** 094032 (2016).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.094032>

[2] P. Bicudo, M. Wagner, Lattice QCD signal for a bottom-bottom tetraquark *Physical Review D* **87** (2013) 114511.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.114511>

[3] V.R. Debastiani, F.S. Navarra, A non-relativistic model for the  $[\bar{c}][\bar{c}]$  tetraquark, *Chinese Physics C* **43** 1 (2019) 013105.

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/16741137/43/1/013105>

[4] A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai, S. Yasui, Exotic hadrons with heavy flavors: X, Y, Z, and related states, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 6 (2016) 062C01.

<https://doi.org/10.1093/ptep/ptw045>

[5] S.L. Olsen, A new hadron spectroscopy, *Frontiers of Physics*, **10** 2 (2015) 101401.

<https://doi.org/10.1007/s11467-014-0449-6>



- [20] M.R. Shojaei, A.A. Rajabi, hypercentral constituent quark model and the hyperfine dependence potential, *Iranian Journal of Pharmaceutical Research* **7** 2 (2007). [COI: JR\\_PSI-7-2\\_008](https://doi.org/10.1088/1361-6471/aa9afd)
- [21] Y. Ikeda, The Tetraquark Candidate  $Z_c(3900)$  from Dynamical Lattice QCD Simulations, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **45** 2 (2018) 024002. <https://doi.org/10.1088/1361-6471/aa9afd>
- [22] F. Chezani Sharahi, M. Monemzadeh, A. Abdoli Arani, The binding energy and wave function of  $\bar{b}bss$  tetraquark from lattice QCD potential, *The Eighth Conference on Particle and Fields Physics*, Shahid Beheshti University, Tehran, (2018) 62-65. <http://psi.ir/farsi.asp?page=particles8>
- [23] Sh. Naderalasl, Investigation of Binding Energy and the potential in heavy hadrons, *Thesis of master of physics*, University of Kashan (2015).
- [24] P. Sadeghi Alavijeh, Investigation of binding energy of four heavy hidden-charm quarks, *Thesis of master of physics*, University of Kashan (2013).
- [13] J. Vijande, A. Valcarce, N. Barnea, Exotic meson-meson molecules and compact four-quark States, *Physical Review D* **79** (2009) 074010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.074010>
- [14] Z.S. Brown, K. Orginos, Tetraquark bound states in the heavy-light heavy-light system, *Physical Review D* **86** 11 (2012) 114506. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.114506>
- [15] M. Monemzadeh, N. Tazimi, P. Sadeghi, Tetraquarks as diquark-antidiquark bound systems, *Physics Letters B* **741** 1 (2015) 124-127. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.12.001>
- [16] P. Bicudo, K. Cichy, A. Peters, B. Wagenbach, M. Wagner, Evidence for the existence of  $ud\bar{b}\bar{b}$  and the non-existence of  $ss\bar{b}\bar{b}$  and  $cc\bar{b}\bar{b}$  Tetraquarks from lattice QCD, *Physical Review D* **92** (2015) 014507. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.014507>
- [17] P. Bicudo, K. Cichy, A. Peters, M. Wagner, BB interactions with static bottom quarks from Lattice QCD, *Physical Review D* **93** (2015) 034501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.034501>
- [18] L. Xue-Wen, K. Hong-Wei, D. Yi-Bing and L. Xue-Qian, Study on the structures of the four-quark states in terms of the Born-Oppenheimer approximation, *Chinese physics C* **39** 8 (2015) 083103. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/39/8/083103>
- [19] E. Braaten, C. Langmack, D.H. Smith, Born-Oppenheimer Approximation for the XYZ Mesons, *Physical Review D* **90** (2014) 014044. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.014044>