

# Entanglement and Specific Heat in an Open Quantum System with the Jaynes-Cummings Interaction during Non-Markovian Processes

Bahareh Pourali<sup>1</sup>, Behzad Lari<sup>\*1</sup>, Hassan Hassanabadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran.

<sup>2</sup>Faculty of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
Received: 26.05.2019      Final revised: 16.02.2020      Accepted: 03.05.2020

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15564](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15564)

## Abstract

In this work, we consider the Jaynes-Cummings (J-C) interaction in which the particles of the system exposed to the bosonic bath. It is supposed that the system includes two spins  $1/2$  particles with the spin-exchange interaction. It also assumes that each of the particles is in a separate bosonic bath with the Cauchy-Lorentz distribution. By using the Liouville-von Neumann equation and applying the Born-approximation, we obtain the density matrix of the system as a function of both time and temperature during the Non-Markovian processes. Moreover, in order to calculate the specific heat, a new formula is presented by using the eigenvalues of the density matrix. Also, we consider the quantum entanglement (EN) as a function of time, temperature and the other parameters in Hamiltonian. The results obtained from these investigations show that, when the temperature of the system tends to zero, the state of system takes the maximum value of Entanglement (EN) and the specific heat diverges. The other result is the negative amount in specific heat at the moment of the system attached to the environment. These results play an important role in designing the solid quantum gates whose operations are based on the EN and thermal properties of the environment.

**Keywords:** Open Quantum System, Jaynes-Cummings Interaction, Born approximation, Entanglement, Specific Heat.

---

\* Corresponding Author: behzadlari1979@gmail.com

## درهم‌تنیدگی و گرمای ویژه در یک سیستم باز کوآنتومی با اندرکنش جینز-

### کامینگ در طی فرآیندهای غیرمارکوی

بهاره پورعلی<sup>1</sup>، بهزاد لاری<sup>1\*</sup>، حسن حسن آبادی<sup>2</sup>

<sup>1</sup> گروه فیزیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

<sup>2</sup> دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دریافت: 1398/03/05 ویرایش نهائی: 1398/11/27 پذیرش: 1399/02/14

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15564](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15564)

#### چکیده

در این گزارش، سیستمی مشتمل بر دو ذره اسپین  $1/2$  و با اندرکنش اسپین تبادلی، که از مدل جینز-کامینگ پیروی می‌کند را در نظر می‌گیریم فرض خواهیم کرد که ذرات سیستم در معرض حمامی بوزونی با توزیع لورنتسی قرار دارند. با استفاده از معادله وان-نیومن لیوویل و با اعمال تقریب بورن، ماتریس چگالی سیستم را در طی فرآیندهای غیر مارکوی به‌عنوان تابعی از زمان و دما به‌دست می‌آوریم. سپس رابطه‌ای جدید، برای محاسبه گرمای ویژه، با استفاده از ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی ارائه می‌دهیم. همچنین، درهم‌تنیدگی کوآنتومی را به‌عنوان تابعی از دما، زمان و پارامترهای موجود در هامیلتونی بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم، هنگامی که دمای سیستم به‌صفر میل می‌کند، حالت سیستم دارای بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی بوده و گرمای ویژه، واگرا می‌شود. علاوه بر آن دریافت‌ه‌ایم، هنگامی که دستگاه در معرض محیط قرار می‌گیرد، گرمای ویژه می‌تواند مقادیر منفی داشته باشد. به‌نظر می‌رسد فهم این موارد می‌تواند در طراحی درگاه‌های کوآنتومی جامد که بر اساس درهم‌تنیدگی کوآنتومی و خواص حرارتی محیط عمل می‌کنند دارای اهمیت باشد.

**کلیدواژگان:** سیستم‌های باز کوآنتومی، اندرکنش جینز-کامینگ، تقریب بورن، درهم‌تنیدگی، گرمای ویژه

#### مقدمه

شبکه‌های کوآنتومی [4] بر اساس دو یا چند کیوبیت درهم‌تنیده، در دست انجام هست [5-6]. از آنجایی که این درگاه‌ها<sup>2</sup> در معرض محیط قرار داشته و دچار اتلاف اطلاعات می‌شوند، بررسی تحول دینامیک آن‌ها از اهمیت برخوردار است [7-17]. در ساخت کامپیوترهای کوآنتومی سریع با مصرف انرژی پایین، سرعت کلید زنی

تئوری اطلاعات کوآنتومی بر پایه کیوبیت‌ها، رویکرد جدیدی از تئوری اطلاعات هست که از مفهوم درهم‌تنیدگی<sup>1</sup> به‌عنوان یک همبستگی صرف کوآنتومی به‌خوبی استفاده نموده است. امروزه طراحی درگاه‌ها [2-1] و حافظه‌های کوآنتومی [3]، همچنین کامپیوترها و

<sup>1</sup> Entanglement

<sup>2</sup> Gates



درگاه‌ها و به‌طور هم‌زمان، حفظ پایداری درهم‌تندگی میان اجزای آن‌ها، یکی از اهداف مهم در تئوری اطلاعات کوآنتومی است [18]. از طرفی می‌دانیم که، ساخت و کنترل درگاه‌ها با بیشترین میزان درهم‌تندگی و آشکار سازی آن در شرایط گذرا، نیاز به طراحی ابزار آشکار سازی دارد. لذا ارائه پیشنهادی جهت ساخت چنین ابزارهایی می‌تواند رهگشا باشد. بدین منظور، در این گزارش، ابتدا ماتریس چگالی را به‌عنوان تابعی از دما و زمان برای سیستمی متشکل از دو کیوبیت که از مدل جینز-کامینگ<sup>1</sup> پیروی می‌کند، به‌دست می‌آوریم. میان کیوبیت‌ها، اندرکنش اسپینی تبادلی در نظر گرفته و هر یک از این کیوبیت‌ها را در معرض حمام بوزونی جداگانه قرار می‌دهیم. همچنین، توزیع فرکانسی هر یک از این حمام‌های بوزونی را لورنتسی [18-19] فرض می‌کنیم. سپس، با حل معادلات وان-نیومن لیوویل<sup>2</sup> و استفاده از تقریب‌های بورن و اندرکنش ضعیف بین سیستم و محیط، ماتریس چگالی سیستم در تصویر اندرکنشی را به‌دست می‌آوریم. در مدلی که ارائه خواهیم کرد، دمای سیستم را  $T$  و دمای محیط را صفر در نظر می‌گیریم. پس از تحول زمانی ماتریس چگالی کل، با ردگیری روی قسمت محیط و تبدیل وارون به‌تصویر شرودینگر، ماتریس چگالی سیستم را در طی فرآیندهای غیر مارکوی<sup>3</sup> به‌دست می‌آوریم. همچنین، فرمولی برای محاسبه گرمای ویژه با استفاده از ماتریس چگالی سیستم ارائه می‌دهیم. از نمودارهای به‌دست آمده برای گرمای ویژه و درهم‌تندگی درمی‌یابیم، وقتی سیستم دارای بیشترین میزان

درهم‌تندگی است گرمای ویژه آن به‌صورت فزاینده‌ای، زیاد و در حوالی دمای صفر واگرا می‌شود. به‌نظر می‌آید از این رفتار بتوان در آشکارسازی میزان درهم‌تندگی سیستم‌ها و فرمان پذیری درگاه، استفاده نمود. در بررسی‌های انجام شده از سنجه کانکرنس [20-23] استفاده نموده‌ایم.

در این گزارش، مطالب به‌شرح زیر ترتیب یافته‌اند. در بخش 2، ابتدا هامیلتونی "سیستم + محیط" معرفی و معادله دیفرانسیل اصلی، حاکم بر رفتار دینامیک ماتریس چگالی، به‌دست آورده می‌شود. در بخش 3، ماتریس چگالی سیستم در دمای  $T$  و در شرایط تعادل حرارتی معرفی می‌شود. این ماتریس چگالی، به‌عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته‌شده و با استفاده از آن، جواب معادله اصلی در طی فرآیندهای غیر مارکوی به‌دست آورده می‌شود. در بخش 4، گرمای ویژه، و در بخش 5، درهم‌تندگی سیستم بررسی شده است. در بخش 6، به‌تحلیل نتایج، پرداخته شده است.

## معادله دیفرانسیل اصلی حاکم بر رفتار دینامیک

### سیستم در طی فرآیندهای غیر مارکوی

مدل جینز-کامینگ به‌عنوان یک مدل کاملاً کوآنتومی، نقش مهمی در توضیح اندرکنش اتم (کیوبیت) و میدان دارد. هامیلتونی برای سیستمی متشکل از دو کیوبیت با اندرکنش اسپین تبادلی، که هر یک از کیوبیت‌ها در معرض یک حمام جداگانه بوزونی قرار دارند را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

<sup>1</sup> Jaynes Cummings

<sup>2</sup> Von-Neumann Liouville

<sup>3</sup> Non-Markovian Process

$$\frac{\partial \rho_{sb}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho_{sb}(t)] \quad 5$$

می‌توان معادله اصلی را در طی فرآیندهای غیر مارکوی و با استفاده از تقریب بورن<sup>1</sup> (با فرض  $\hbar=1$ ) به صورت زیر به دست آورد.

$$\frac{\partial \rho'_s}{\partial t} = -it r_b \left\{ [H'_{sb}(t), \rho'_{sb}(0)] \right\} - \int_0^t dt' tr_b \left\{ [H'_{sb}(t), [H'_{sb}(t'), \rho'_{sb}(t')]] \right\} \quad 6$$

در تقریب اندرکنش ضعیف نشان داده می‌شود که اختلاف در بین  $\rho'_{sb}(t)$  و  $\rho'_{sb}(t')$  از درجه دوم قدرت برهم‌کنش بین سیستم و محیط است و بنابراین می‌توان  $t'$  را با  $t$  جایگزین کرد [9]. لذا می‌توان نوشت

$$\rho'_{sb}(t) = \rho'_s(t) \otimes \rho'_b(0) \quad 7$$

اگر حالت اولیه، ویژه توابع انتخاب شوند جمله اول معادله 6 همواره صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \rho'_s}{\partial t} = - \int_0^t dt' tr_b \left\{ [H'_{sb}(t), [H'_{sb}(t'), \rho'_s(t) \otimes \rho'_b(0)]] \right\} \quad 8$$

که در آن

$$H'_{sb}(t) = \exp\{-i(H_s + H_b)t\} H_{sb} \exp\{i(H_s + H_b)t\} \quad 9$$

$$\rho'_s(t) = \exp\{-iH_s(t)\} \rho_{sb}(t) \exp\{iH_s(t)\} \quad 10$$

$$\rho'_b(0) = \rho_b(0) \quad 11$$

با استفاده از روابط زیر،

$$\frac{db_{n_i}(t)}{dt} = i[H_b, b_{n_i}(t)] \Rightarrow b_{n_i}(t) = b_{n_i} \exp\{-i\omega_{n_i}(t)\} \quad 12$$

$$H = H_S + H_B + H_{S.B} \quad 1$$

که در آن،

$$H_s = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_{iz} + K \sum_{\substack{i,j=+ \\ i \neq j}} (\sigma_1^i \sigma_2^j) \quad 2$$

$$H_b = \sum_{n_1} \omega_{n_1} b_{n_1}^\dagger b_{n_1} + \sum_{n_2} \omega_{n_2} b_{n_2}^\dagger b_{n_2} \quad 3$$

$$H_{sb} = \sum_{i=1}^2 \sigma^+ \sum_{n_i} g_{n_i} b_{n_i} + h.c. \quad 4$$

که  $H_s$ ، هامیلتونی سیستم و  $K$  ثابت جفت‌شدگی بین کیوبیت‌های سیستم است.  $\varepsilon$  بیانگر انرژی برانگیزش هریک از کیوبیت‌ها در میدان است.  $H_b$ ، هامیلتونی محیط بوزونی، با تعداد  $n_i$  مد در هر فرکانس  $\omega_{n_i}$  است.  $H_{sb}$ ، هامیلتونی اندرکنش بین سیستم-حمام و  $g_{n_i}$  قدرت اندرکنش را نشان می‌دهد.  $i \in \{1, 2\}$  برچسب هر یک از کیوبیت‌ها می‌باشد.  $\sigma_{iz}$  و  $\sigma_i^\pm$  ماتریس‌های پائولی،  $b_{n_i}$  و  $b_{n_i}^\dagger$  عملگرهای ایجاد و نابودی بوزونی برای قسمت حمام می‌باشند. برای یافتن وابستگی زمانی ماتریس چگالی سیستم (جهت بررسی درهم‌تیدگی و گرمای ویژه)، از معادله وان-نیومن لیوویل استفاده می‌شود. بدین منظور، ابتدا با یک تبدیل یکانی، ماتریس چگالی "سیستم + محیط" در فضای اندرکنشی بازنویسی شده و سپس، با ردگیری روی قسمت محیط و تبدیل یکانی وارون به تصویر شرودینگر، ماتریس چگالی سیستم در زمان  $t$  به دست آورده می‌شود. برای سادگی گاهی از نماد خلاصه  $\rho_{\dots}(t)$  به جای  $\rho_{\dots}(t, T)$  استفاده می‌کنیم.

با شروع از معادله وان نیومن-لیوویل:

<sup>1</sup> Born Approximation

$$18 \quad \frac{d\rho_s^l(t)}{dt} = \sum_{j=1}^2 \{ [\sigma_j^- \rho_s^l(t), \sigma_j^+] \sum_{n_j} |g_{n_j}|^2 n_j \int_0^t dt' e^{i(\varepsilon - \omega_{n_j})(t-t')} + [\sigma_j^+ \rho_s^l(t) \sigma_j^-] \sum_{n_j} |g_{n_j}|^2 (n_j + 1) \int_0^t dt' e^{i(\varepsilon - \omega_{n_j})(t-t')} + h.c. \}$$

$$= \sum_{j=1}^2 \Gamma^l(t) \rho_s^l(t)$$

که در آن  $\Gamma_j^+$ ، ابر عملگرهایی هستند که برای زمان‌های طولانی و در طی فرآیندهای مارکوی تبدیل به همان عملگرهای لیندبلاد مشهور، می‌شوند. در زمان  $t=0$ ، دمای حمام صفر و حالت آن خلأ در نظر گرفته می‌شود، یعنی:

$$19 \quad \rho_b(0) = |N=0, \dots, 0, \dots, 0, \dots\rangle_b \langle N=0, \dots, 0, \dots, 0, \dots|$$

بنابراین در معادله 18، جمله اول صفر می‌شود و خواهیم داشت،

$$20 \quad \frac{d\rho_s^l(t)}{dt} = \sum_{j=1}^2 \{ [\sigma_j^+ \rho_s^l(t), \sigma_j^-] \sum_{n_j} |g_{n_j}|^2 \int_0^t dt' e^{i(\varepsilon - \omega_{n_j})(t-t')} + h.c. \} = \sum_{j=1}^2 \Gamma_j^l(t) \rho_s^l(t)$$

با استفاده از مفهوم کلی چگالی حالات و توزیع فرکانسی لورنتس برای حمام، می‌توان نوشت،

$$21 \quad \sum_{n_j} |g_{n_j}|^2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega)$$

توزیع لورنتسی زیر را انتخاب می‌کنیم.

$$22 \quad J(\omega) = \frac{\gamma_0}{\pi\gamma} \left[ \frac{\gamma^2}{(\omega - \varepsilon)^2 + \gamma^2} \right]$$

پارامتر  $\gamma$  نشان‌دهنده پهنای منحنی توزیع در نیمه‌راه قله است و  $\gamma_0$  تعیین‌کننده تیزی تابع توزیع هست [20].

بنابراین، خواهیم داشت:

$$13 \quad \frac{d\sigma_j^\pm(t)}{dt} = i[H_s, \sigma_j^\pm(t)] \Rightarrow \sigma_j^\pm(t) = \sigma_j^\pm \exp\{\pm i\varepsilon(t)\}$$

معادله 4 را می‌توان در تصویر اندرکنشی بازنویسی نمود.

$$14 \quad H_{sb}^l = \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \sum_{n_j} g_{n_j} b_{n_j} \exp\{i(\varepsilon - \omega_{n_j})t\} + h.c.$$

در معادله 8، حالت عمومی زیر را به‌عنوان حالت اولیه برای حمام بوزونی در نظر بگیریم.

$$15 \quad \rho_b(0) = |N, \dots, n_j, \dots, n_p, \dots\rangle_b \langle N, \dots, n_j, \dots, n_p, \dots|$$

با کمی عملیات جبری و استفاده از معادلات 8 و 1 خواهیم داشت،

$$16 \quad \frac{d\rho_s^l(t)}{dt} = \sum_{j=1}^2 \{ [\sigma_j^- \rho_s^l(t), \sigma_j^+] \sum_{n_j} |g_{n_j}|^2 \langle N, \dots, n_j, \dots | b_{n_j}^\dagger b_{n_j}^\dagger | N, \dots, n_j, \dots \rangle \int_0^t dt' e^{i(\varepsilon - \omega_{n_j})(t-t')} + [\sigma_j^+ \rho_s^l(t), \sigma_j^-] \sum_{n_j} |g_{n_j}|^2 \langle N, \dots, n_j, \dots | b_{n_j}^\dagger b_{n_j}^\dagger | N, \dots, n_j, \dots \rangle \int_0^t dt' e^{i(\varepsilon - \omega_{n_j})(t-t')} + h.c. \}$$

در محاسبه معادله 16 روابط زیر مفید هستند.

$$17 \quad tr(\alpha\beta\gamma) = tr(\beta\gamma\alpha) = tr(\gamma\alpha\beta)$$

$$b_{n_j} |N, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j + 1} |N + 1, \dots, n_{j+1}, \dots\rangle$$

$$b_{n_j} |N, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j} |N - 1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle$$

$$\langle N, \dots, n_j, \dots, n_p, \dots | b_{n_j}^\dagger b_{n_p} | N, \dots, n_j, \dots, n_p, \dots \rangle = n_j \delta_{n_j, n_p}$$

$$\langle N, \dots, n_j, \dots, n_p, \dots | b_{n_j} b_{n_p}^\dagger | N, \dots, n_j, \dots, n_p, \dots \rangle = (n_j + 1) \delta_{n_j, n_p}$$

در دو جمله آخر معادله 17، وقتی عملگرهای  $b_{n_j}^\dagger$  و  $b_{n_p}$  روی جایگاه‌های مختلف عمل می‌کنند نتیجه صفر می‌شود. با اعمال روابط بالا، معادله 16 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

## معادله اصلی در فرآیندهای غیر مارکوی

در این بخش، سیستم را در دمای  $T$  فرض کرده و با استفاده از توزیع گیبس، ماتریس چگالی سیستم را به دست می‌آوریم. سپس، از آن به عنوان شرایط اولیه در معادله 27 استفاده نموده و جواب‌های آن را به دست می‌آوریم.

ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر سیستم عبارت است:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -k, & |E_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) \\ \lambda_2 &= -k, & |E_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ \lambda_3 &= -\varepsilon, & |E_3\rangle &= |11\rangle \\ \lambda_4 &= -\varepsilon, & |E_4\rangle &= |00\rangle \end{aligned} \quad 28$$

که در آن  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  و  $k_B$  ثابت بولتزمن است. ماتریس چگالی وابسته به دمای  $T$ ، در ابتدای زمان در پایه  $\{|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$ ، به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho_s(t=0, T) &= \frac{e^{-\beta H_s}}{z_s(0, T)} = \frac{1}{z_s(0, T)} (\text{Cosh}(\beta k) |10\rangle\langle 10| \\ &- \text{Sinh}(\beta k) |10\rangle\langle 01| - \text{Sinh}(\beta k) |01\rangle\langle 10| + \\ &\text{Cosh}(\beta k) |10\rangle\langle 10| + e^{\beta \varepsilon} |11\rangle\langle 11| + e^{-\beta \varepsilon} |00\rangle\langle 00|) = \\ &\frac{1}{z_s(0, T)} (\rho_{22}(0, T) |10\rangle\langle 10| + \rho_{32}(0, T) |10\rangle\langle 01| + \\ &\rho_{23}(0, T) |01\rangle\langle 10| + \rho_{33}(0, T) |01\rangle\langle 01| + \\ &\rho_{44}(0, T) |11\rangle\langle 11| + \rho_{11}(0, T) |00\rangle\langle 00|) \end{aligned} \quad 29$$

که در آن  $z_s(0, T) = \frac{1}{2 (\text{Cosh}[\beta k] + \text{Cosh}[\beta \varepsilon])}$  تابع

پارش سیستم هست. برای به دست آوردن جواب‌های معادله اصلی، با کمی عملیات جبری، معادلات جفت شده بر اساس درآیه‌های ماتریس چگالی  $\rho_{ij}(t)$ ، به صورت زیر به دست آورده می‌شود. البته می‌دانیم که ماتریس

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega) e^{i(\varepsilon - \omega)t'} \\ &= \frac{\gamma_0}{2} (1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad 23$$

با اعمال معادله 23 در معادله 20، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s^i(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^2 \{ [\sigma_j^+, \rho_s^i(t) \sigma_j^-] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J(\omega) \int_0^t dt' e^{i(\varepsilon - \omega_j)(t-t')} + h.c. \} \\ &= R(t) \sum_{j=1}^2 [\sigma_j^+, \rho_s^i(t) \sigma_j^-] + h.c. = \sum_{j=1}^2 \Gamma_j'(t) \rho_s^i(t) \end{aligned} \quad 24$$

نماد نمایش  $\Gamma_j'(t)$  در معادلات بالا نشان‌دهنده یک ابر عملگر غیر خطی است که روی ماتریس چگالی اثر می‌کند. با اعمال معادله 21 و 23 در معادله 20، معادله اصلی زیر در تصویر شروودینگر به دست آید.

25

$$\frac{d\rho_s(t)}{dt} = -[H_s, \rho_s(t)] + \sum_{j=1}^2 \Gamma_j'(t) \rho_s(t)$$

با استفاده از معادلات 8 و 25 به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s(t)}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 [\sigma_{iz}, \rho_s(t)] - \\ &K \sum_{i,j=1}^2 [\sigma_i^+ \sigma_j^-, \rho_s(t)] + \\ &\{ R(t) \sum_{j=1}^2 [\sigma_j^+, \rho_s(t) \sigma_j^-] + h.c. \} \end{aligned} \quad 26$$

جمله اول در معادله 26، بیانگر فرآیندهای بازگشت‌پذیر است و در تحول مقدار انتظاری  $\rho_s(t)$  تأثیری ندارد. بنابراین، معادله اصلی در طی فرآیندهای غیر مارکوی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_s(t)}{dt} &= -K \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 [\sigma_i^+ \sigma_j^-, \rho_s(t)] + \\ &\{ R(t) \sum_{j=1}^2 [\sigma_j^+, \rho_s(t) \sigma_j^-] + h.c. \} \end{aligned} \quad 27$$

جواب معادله دیفرانسیل 30 به صورت زیر است.

$$|\alpha(t)\rangle_i = e^{\hat{C}_i(t)} |\alpha(0)\rangle_i \quad 35$$

که در آن:

$$\hat{C}_i(t) = \int_0^t M_i(t') dt' \quad 36$$

از آنجایی که عملگرهای  $\hat{C}_i(t)$  غیر هرمیتی هستند. همچنین، عمل تابع نمایی یک عمل ریاضی غیر خطی است برای این که بتوان روی ماتریس عمل  $\exp[\dots]$  را انجام داد، آن را باید قطری نمود. با یک تبدیل تشابهی [24] می‌توان آن‌ها را قطری نمود. بنابراین معادله 35

به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle_i &= \exp\{P^{-1}_i \hat{C}_{dig}(t) P_i\} |\alpha(0)\rangle_i \\ &= \left( P^{-1}_i e^{\hat{C}_{dig}(t)} P_i \right) |\alpha(0)\rangle_i \end{aligned} \quad 37$$

که در آن  $\hat{C}_{dig}(t)$  صورت قطری شده  $\hat{C}_i(t)$  و  $P_i^1$  و  $P_i$  به ترتیب ماتریس تبدیل تشابهی و وارون آن می‌باشند. سرانجام  $e^{\hat{C}_i(t)}$  به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$e^{\hat{C}_i(t)} = \begin{pmatrix} e^{-4\alpha t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-2\alpha t}(1-e^{-2\alpha t}) & e^{-2\alpha t}\cos^2(Kt) & e^{-2\alpha t}\sin^2(Kt) & 0 & \frac{-i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) & \frac{i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) \\ e^{-2\alpha t}(1-e^{-2\alpha t}) & e^{-2\alpha t}\sin^2(Kt) & e^{-2\alpha t}\cos^2(Kt) & 0 & \frac{i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) & \frac{-i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) \\ 1+e^{-2\alpha t}(e^{-2\alpha t}-2) & (1-e^{-2\alpha t}) & (1-e^{-2\alpha t}) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) & \frac{-i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) & 0 & e^{-2\alpha t}\cos^2(Kt) & e^{-2\alpha t}\sin^2(Kt) \\ 0 & \frac{-i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) & \frac{i}{2}e^{-2\alpha t}\sin(2Kt) & 0 & e^{-2\alpha t}\sin^2(Kt) & e^{-2\alpha t}\cos^2(Kt) \end{pmatrix} \quad 38$$

چگالی خود الحاقی<sup>1</sup>، هرمیتی<sup>2</sup>، و شبه-مثبت<sup>3</sup> و رد<sup>4</sup> آن یک است. بنابراین می‌توان نوشت  $\rho_{ij}(t) = \rho_{ji}^*(t)$ . البته باید متذکر شد که سایر مؤلفه‌های ماتریس چگالی که در معادلات زیر وجود ندارند، صفر می‌باشند.

در زیر سه دسته از معادلات دیفرانسیل مستقل روی عناصر ماتریس چگالی به صورت آورده شده است. برچسب  $i \in \{1, 2, 3\}$  معرف این سه دسته مستقل از معادلات هست.

$$\frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle_i = M_i(t) |\alpha(t)\rangle_i \quad 30$$

31

$$|\alpha(t, T)\rangle_1 \equiv \begin{pmatrix} \rho_{11}(t, T) \\ \rho_{22}(t, T) \\ \rho_{33}(t, T) \\ \rho_{44}(t, T) \\ \rho_{23}(t, T) \\ \rho_{32}(t, T) \end{pmatrix} \quad |\alpha(t, T)\rangle_2 \equiv \begin{pmatrix} \rho_{12}(t, T) \\ \rho_{13}(t, T) \\ \rho_{24}(t, T) \\ \rho_{34}(t, T) \end{pmatrix} \quad |\alpha(t, T)\rangle_3 \equiv \begin{pmatrix} \rho_{14}(t, T) \\ \rho_{41}(t, T) \end{pmatrix}$$

با کمی عملیات جبری ماتریس‌های  $M_i(t)$  به شکل زیر به دست آورده می‌شوند.

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} -4R(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2R(t) & -2R(t) & 0 & 0 & iK & -iK \\ 2R(t) & 0 & -2R(t) & 0 & -iK & iK \\ 0 & 2R(t) & 2R(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iK & -iK & 0 & -2R(t) & 0 \\ 0 & -iK & iK & 0 & 0 & -2R(t) \end{pmatrix} \quad 32$$

$$M_2(t) = \begin{pmatrix} -3R(t) & iK & 0 & 0 \\ K & -3R(t) & 0 & 0 \\ 0 & 2R(t) & -R(t) & -iK \\ 2R(t) & 0 & -iK & -R(t) \end{pmatrix} \quad 33$$

33

$$M_3(t) = \begin{pmatrix} -2R(t) & 0 \\ 0 & -2R(t) \end{pmatrix} \quad 34$$

<sup>1</sup> Self-adjoint

<sup>2</sup> Hermitian

<sup>3</sup> Semi Positive

<sup>4</sup> Trace

ویژه مقادیر ماتریس چگالی تعریف شده در معادله 44 برای

محاسبه گرمای ویژه در بخش بعد، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2}((\rho_{11} + \rho_{44}) + |\rho_{11} - \rho_{44}|) \\ \eta_2 &= \frac{1}{2}((\rho_{11} + \rho_{44}) - |\rho_{11} - \rho_{44}|) \\ \eta_3 &= \frac{1}{2}((\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2}) \\ \eta_4 &= \frac{1}{2}((\rho_{22} + \rho_{33}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2}) \end{aligned} \quad 47$$

### گرمای ویژه در یک سیستم باز کوآنتومی

در این بخش، روشی برای محاسبه گرمای ویژه با استفاده از ماتریس چگالی ارائه و آن را برای مدل ارائه شده در این گزارش، به کار می‌بریم. در اهمیت این کار می‌توان گفت که برخی از محققین سعی در پیدا کردن ارتباطاتی بین میزان در هم‌تنیدگی کوآنتومی و گرمای ویژه سیستم نموده‌اند [25-27].

برای این مهم، از تابع پارش تعریف شده برای یک سیستم باز کوآنتومی شروع می‌کنیم [25].

$$Z_s = \frac{Tr_{sb}[\exp(-\beta H)]}{Tr_b[\exp(-\beta H_b)]} \quad 48$$

$H$  هامیلتونی کل و  $H_b$  هامیلتونی حمام است. گرمای ویژه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C = k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln(Z) \quad 49$$

گرمای ویژه سیستم یعنی  $C_s$  را می‌توان از اختلاف بین گرمای ویژه کل (سیستم + محیط) یعنی  $C_{sb}$  و گرمای ویژه حمام یعنی  $C_b$  به دست آورد [25].

$$C_s(t, T) = C_{sb}(t, T) - C_b(t, T) \quad 50$$

39

$$e^{\hat{C}_3(t)} = \begin{pmatrix} e^{-3D(t)} \cos(Kt) & ie^{-3D(t)} \sin(Kt) & 0 & 0 \\ ie^{-3D(t)} \sin(Kt) & e^{-3D(t)} \cos(Kt) & 0 & 0 \\ \eta(t) & \xi(t) & e^{-D(t)} \cos(Kt) & -ie^{-D(t)} \sin(Kt) \\ \xi(t) & \eta(t) & -ie^{-D(t)} \sin(Kt) & e^{-D(t)} \cos(Kt) \end{pmatrix}$$

$$e^{\hat{C}_3(t)} = \begin{pmatrix} e^{-2D(t)} & 0 \\ 0 & e^{-2D(t)} \end{pmatrix} \quad 40$$

که در آن

$$D(t) = \frac{\gamma_0}{2} t + \frac{\gamma_0}{2\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) \quad 41$$

$$\eta(t) = \frac{-iD(t) e^{-3D(t)}}{(D(t)^2 + Kt^2)} [Kt \cos(Kt)(1 - e^{2D(t)}) + \quad 42$$

$$D(t) \sin(Kt)(1 + e^{2D(t)})]$$

$$\xi(t) = \frac{D(t) e^{-3D(t)}}{(D^2 + Kt^2)} [D(t) \cos(Kt)(-1 + e^{2D(t)}) + \quad 43$$

$$Kt \sin(Kt)(1 + e^{2D(t)})]$$

ماتریس چگالی  $\rho(t, T)$  به دست آمده در پایه  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ، از نوع "X-Type" بوده و به شکل زیر است.

$$\rho(t, T) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t, T) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t, T) & \rho_{23}(t, T) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(t, T) & \rho_{33}(t, T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t, T) \end{pmatrix} \quad 44$$

که در آن

$$\rho_{11}(t, T) = \frac{1}{Z(0, T)} e^{-\beta \varepsilon} e^{-4D(t)}$$

$$\rho_{22}(t, T) = \frac{e^{-2D(t)}}{Z(0, T)} ((1 - e^{-2D(t)}) e^{-\beta \varepsilon}$$

$$+ \cosh(\beta K)) = \rho_{33}(t, T)$$

$$\rho_{44}(t, T) = \frac{e^{-2D(t)}}{Z(0, T)} (e^{-2D(t)} e^{-\beta \varepsilon} (e^{-2D(t)} - 2)$$

$$+ 2(2 - e^{-2D(t)}) C \cosh(\beta K))$$

$$\rho_{23}(t, T) = \frac{1}{Z(0, T)} e^{-4D(t)} S \sin(\beta K) = \rho_{32}(t, T) \quad 45$$

همان‌طور که دیده می‌شود

$$\rho_{14}(t, T) = \rho_{41}(t, T) = 0 \quad 46$$



از آنجایی که، ماتریس چگالی به صورت زیر با تابع پارش تعریف می‌شود:

$$\hat{\rho}(t, T) = \frac{1}{z(t, T)} \exp[-\beta \hat{H}] \quad 51$$

می‌توان معادله 50 را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$Tr[\ln(\rho)] = Tr\left[\ln\left(\frac{1}{z}\right)\right] - \beta \sum_n E_n \quad 52$$

همان‌طور که می‌دانیم هامیلتونی  $H$  و در نتیجه ویژه‌مقادیر آن یعنی  $E_n$  به‌طور آشکار وابسته به  $\beta$  نیستند. بنابراین می‌توان نشان داد که

$$C_s(t, T) = -4k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (Tr[\ln(\rho_{sb})]) - Tr[\ln(\rho_b)] \quad 53$$

در تقریب اندرکنش ضعیف بین سیستم و محیط می‌توان نوشت:  $\rho_{sb}(t, T) = \rho_s(t, T) \otimes \rho_b(0)$  با کاربرد این تقریب در معادله 53 و همچنین استفاده از رابطه

$$Tr[A \otimes B] = Tr[A] \otimes Tr[B] \quad 54$$

که در آن، فرض بر آن است  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مثبت هرمیتی باشند. با معرفی روابط زیر

$$\begin{aligned} Ln(A \otimes B) &= \ln(A^{diag}) \otimes I_n + I_m \\ &\otimes \ln(B^{diag}). \\ Tr[Ln(A \otimes B)] &= n Tr[Ln(A^{diag})] + \\ &m Tr[Ln(B^{diag})] \end{aligned} \quad 55$$

که در آن  $A^{diag}$  و  $B^{diag}$  به ترتیب، صورت قطری شده ماتریس‌های  $A$  و  $B$  و با ابعاد  $n$  و  $m$  هستند. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Tr_{sb}[Ln(\rho_{sb})] &= \\ Tr[Ln(\rho_s^{diag}(t, T))] Tr[I_n] &+ \\ Tr[I_4] Tr[Ln(\rho_b^{diag}(0))] & \end{aligned} \quad 56$$

با توجه به انتخاب انجام شده در معادله 16 (یعنی  $\rho_b(0) = \rho_b^{diag}(0)$ )، می‌توان نوشت:

$$Tr[Ln(\rho_b^{diag}(0))] = 0 \quad 57$$

با استفاده از روابط بالا، برای گرمای ویژه خواهیم داشت:

$$C_s(t, T) = -4nk_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (Tr[Ln(\rho_s^{diag}(t, T))]) \quad 58$$

می‌دانیم که عناصر قطری  $\rho_s^{diag}(t, T)$  همان ویژه‌مقادیر آن هستند بنابراین داریم،

$$C_s(t, T) = -4nk_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_{i=1}^m Ln(\eta_i) \quad 59$$

در فرمول بالا و برای مسئله مورد بحثمان در این مقاله  $m=4$  و  $\eta_i$ ها، ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی هستند که در

معادله 46 معرفی گردیدند. تعداد مدهای موجود در هر

یک از حمام‌ها را با  $n$ ،  $k_B$  ثابت بولتزمن و  $\beta = \frac{1}{k_B T}$

است. در زیر پارامتر گرمای ویژه سیستم به‌ازای تعداد

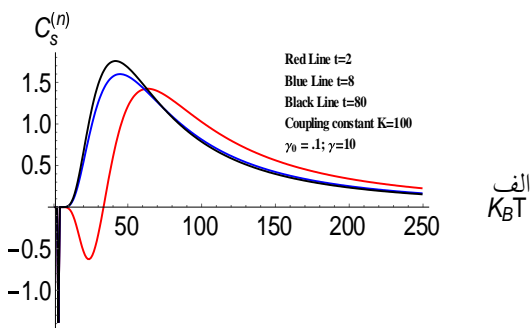
مدهای حمام را به صورت  $C_s^{(n)}(t, T) = \frac{C_s(t, T)}{4nk_B}$  تعریف

و آن را برحسب  $k_B T$  و برای زمان‌های مختلف رسم

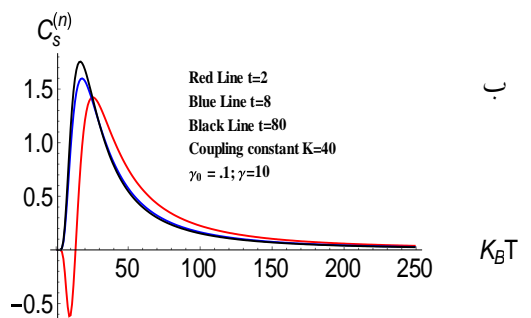
کرده‌ایم. در شکل 1 می‌توان دید که در دماهای پایین و

به‌ازای برخی از مقادیر  $K$  و  $t$ ، گرمای ویژه منفی می‌شود.

دلیل آن را می‌توان در باز بودن سیستم یافت.



الف  
 $K_B T$



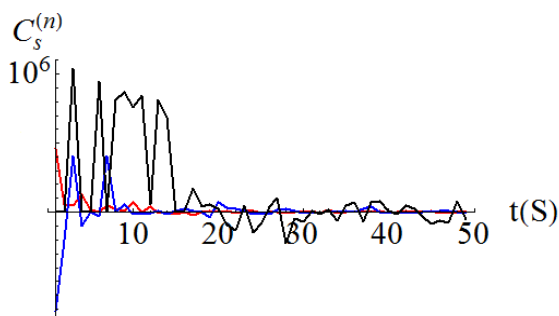
ب  
 $K_B T$

شکل 1. تغییرات  $C_s^{(n)}$  برحسب  $k_B T$  الف: برای  $K=40$

و ب: برای  $K=100$  را نشان می‌دهد.

این مورد قابل قیاس با حالتی است که در اندازه‌گیری عملی در آزمایشگاه در مورد سیستم‌های باز، گرمای ویژه ظرف را به‌عنوان محیط و گرمای ویژه ظرف + محتویات ظرف (به‌عنوان سیستم) به‌طور جداگانه اندازه‌گیری و سپس این دو مقدار از هم کم می‌شود که گاهی به‌مقادیر منفی نیز می‌انجامد [25]. این اولین باری است که در مورد سیستم باز کوآنتومی با اندرکنش جینز-کامینگ این مورد نیز مشاهده می‌شود. در شکل 2، منحنی تغییرات  $C_s^{(n)}$  برحسب زمان ترسیم گردیده است. همان‌طور که دیده می‌شود، گرمای ویژه با کم شدن دما، به‌سرعت زیاد و حتی در حوالی صفر مطلق، واگرا می‌شود. که به‌نظر می‌رسد، خلاف قانون سوم ترمودینامیک باشد. اما باید کمی با احتیاط بود. زیرا اولاً، بنا به‌قانون سوم و در بینشی بنیادین در صفر مطلق، آنتروپی فقط به‌چندگانگی حالت پایه بستگی دارد و یا به‌طور معادل می‌توان گفت که طی هیچ مجموعه‌ای از فرآیندهای آزمایشگاهی نمی‌توان به صفر مطلق دست یافت. ثانیاً، هنگامی که دمای سیستم (با حالت تفکیک‌پذیر) به‌صفر میل می‌کند گرمای ویژه آن نیز باید به‌طور مجانبی به‌صفر میل کند. با این حال دیده می‌شود برای برخی هامیلتونی‌های خاص، وقتی دما به صفر مطلق میل می‌کند نه تنها ظرفیت گرمایی به صفر میل نمی‌کند بلکه واگرا هم می‌شود. چنین واگرایی در سیستم‌های باز کوآنتومی پیش از این نیز گزارش و به درهم‌تنیدگی حالت سیستم (حالت غیرقابل تفکیک) مربوط دانسته شده است [27]. در این گزارش نیز، برای مدل J-C دو کیوبیتی در معرض محیط، چنین واگرایی مشاهده می‌شود. همان‌طور که در بخش بعد خواهیم دید، در تقرب به‌دمای صفر و برای مدل مان نیز میزان در هم

تنیدگی ماکزیمم می‌شود. از این پدیده، شاید بتوان به‌عنوان یک آشکارساز در هم‌تنیدگی استفاده نمود. در ساخت درگاه‌های کوآنتومی که بر پایه درهم‌تنیدگی ساخته می‌شوند این پدیده می‌تواند از اهمیت برخوردار باشد.



شکل 2. تغییرات پارامتر  $C_s^{(n)}$  برحسب زمان برای دماهای مختلف ( $T_{Red}(=10) < T_{Blue}(=20) < T_{Black}(=45)$ ) در  $K=20$  را نشان می‌دهد.

### درهم‌تنیدگی موجود در سیستم باز کوآنتومی

با استفاده از ماتریس چگالی سیستم J-C که در بخش 3 به‌دست آوردیم، می‌توان میزان در هم‌تنیدگی را با استفاده از کمیت کانکرنس محاسبه نمود [7].

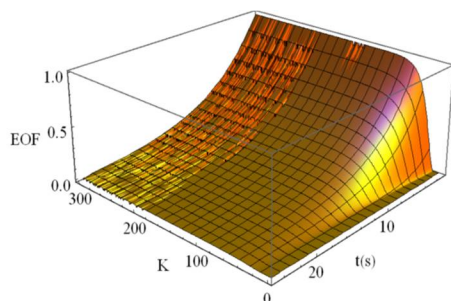
$$C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad 60$$

که در آن  $\lambda_i (i=1,2,3,4)$ ، ویژه‌مقادیر عملگر  $\rho_s(t, T) \tilde{\rho}_s(t, T)$  در یک نظم کاهشی یعنی  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$  می‌باشد.  $\rho(t, T)$  ماتریس چگالی سیستم است و

$$\tilde{\rho}_s(t, T) = (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}) \rho_s^*(t, T) (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}) \quad 61$$

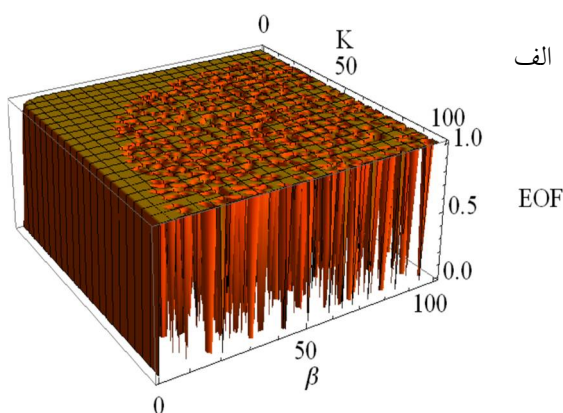
که در آن  $\sigma_{1y}$  و  $\sigma_{2y}$  عملگرهای پائولی هستند. درهم‌تنیدگی تشکیل (EOF) را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$EOF = h \left( \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right) \quad 62$$



شکل 3. در هم‌تندگی تشکیل به‌عنوان تابعی از زمان و ثابت جفت‌شدگی بین دو کیوبیت سیستم.

در شکل 5، منحنی  $EOF$  الف بر حسب زمان و  $\beta$  برای  $\beta$  ها و برای ثابت‌های جفت‌شدگی  $K$  مختلف رسم شده است. همان‌طور که از منحنی دیده می‌شود، با افزایش  $\beta$  (کاهش دما) و  $K$ ، مقدار  $EOF$  افزایش و منحنی‌ها به حالت اشباع می‌رسند. همچنین صفر شدن‌های ناگهانی و پی‌درپی نیز اتفاق می‌افتد. از آنجایی که در مدل ما، محیط در دمای صفر فرض گردیده است بنابراین اختلاف دمای سیستم با محیط برابر دمای سیستم می‌باشد که با توجه به منحنی‌ها، هر چه این اختلاف دما بیشتر باشد به میزان بیشتری از درهم‌تندگی در ابتدای زمان می‌رسیم.



الف

که در آن

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x) \quad 63$$

همان‌طور که می‌توان دید کانکرنس  $C=0$  مطابق با عدم وجود در هم‌تندگی و  $C=1$  مطابق ماکزیمم در هم‌تندگی می‌باشد. در شکل 3 میزان در هم‌تندگی تشکیل به‌عنوان تابعی از زمان و ثابت جفت‌شدگی بین دو کیوبیت موجود در سیستم رسم شده است. می‌توان دید که  $EOF$  با گذشت زمان به سرعت از مقدار ماکزیمم آن یعنی  $EOF_{\max}=1$  کاهش و به صفر می‌گراید. همچنین دیده می‌شود که با افزایش ثابت جفت‌شدگی  $K$ ، در هر مقطع زمانی  $t$ ، میزان در هم‌تندگی افزایش می‌یابد. که این می‌تواند آدرس خوبی در تعیین مواد جامدی باشد که قرار است در ساخت درگاه کوانتومی استفاده گردد. در شکل 4 میزان درهم‌تندگی تشکیل را به‌عنوان تابعی از  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  و ثابت جفت‌شدگی  $K$  برای زمان‌های مختلف ترسیم کرده‌ایم. همان‌طور که می‌توان دید، با گذشت زمان، تواتر صفرهای شدن‌های ناگهانی در  $EOF$ ، برای مقادیر بزرگ‌تر  $K$  و  $\beta$  بیشتر می‌شود. بنابراین در این ناحیه از  $K$  و  $\beta$  ساخت یک درگاه پایدار ممکن نیست. در مقابل، در دماهای بالاتر ( $\beta$  کوچک‌تر) و  $K$  کوچک‌تر، ظاهراً در فرآیندهای گذرا، می‌توان مطابق شکل 4، نوعی پایداری مشاهده نمود. بنابراین این خود پیشنهاد می‌کند که اگر قرار است درگاه کوانتومی ساخته شود باید این درگاه خیلی سریع و تا قبل از بین رفتن درهم‌تندگی عمل خود را انجام دهند و در ساخت آن باید دمای درگاه و ثابت جفت‌شدگی که از پارامترهای سیستم است، مورد نظر قرار گیرد.

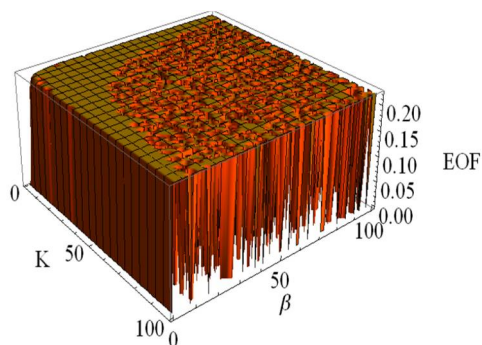
در  $\beta = 5$  برای  $K = 20$  (نمودار نقطه-خط‌چین)،  $K = 40$  (نمودار خط پر)،  $K = 250$  (نمودار خط‌چین) را نشان می‌دهد.

ب

### بحث و نتیجه‌گیری

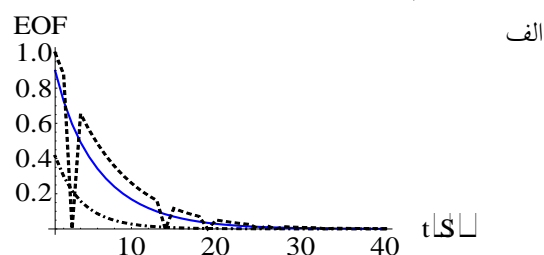
در این گزارش، رابطه‌ای برای محاسبه گرمای ویژه با استفاده از ماتریس چگالی سیستم (در معرض محیط) ارائه شد و از آن برای مدل J-C دو کیوبیتی در معرض محیط استفاده گردید. سپس، میزان درهم‌تنیدگی سیستم محاسبه شد. مشاهده گردید که  $EOF$  در دماهای نزدیک به صفر، بیشترین مقدار خود را دارد و مقدار آن با گذشت زمان (وقتی که سیستم در معرض محیط قرار می‌گیرد) کاهش می‌یابد.

همچنین در طی فرآیندهای غیر مارکوی، مرگ‌های ناگهانی در  $EOF$  پدیدار می‌شود که به  $\beta$  و ضریب جفت شدگی  $K$  بین اجزای سیستم بستگی دارد. می‌دانیم که توجه به نوسانات درهم‌تنیدگی در طی فرآیندهای غیر مارکوی برای کنترل درگاه‌های کوانتومی با سرعت کلید زنی بالا و در معرض محیط، از اهمیت برخوردار است. از طرف دیگر، همان‌طور که مشاهده گردید، گرمای ویژه در حوالی دمای صفر و اگر می‌شود، از این پدیده که بیانگر وجود حالت درهم‌تنیده در سیستم است، می‌توان در آشکار سازی در هم‌تنیدگی، استفاده عملی نمود. در پایان، قابل ذکر است که از واگرایی گرمای ویژه در تقرب به صفر مطلق فقط می‌توان وجود درهم‌تنیدگی سیستم را آشکار سازی نمود ولی به‌عنوان یک مسئله قابل بررسی، هنوز نمی‌دانیم که ارتباط بین گرمای ویژه با میزان درهم‌تنیدگی در سایر دماها و زمان‌هایی که سیستم در مجاورت محیطی ناهمدوس قرار می‌گیرد، چیست؟ همچنین نمی‌دانیم که در طی فرآیندهای مارکوی چه نتایجی به‌دست خواهد آمد؟. در صورت پاسخ به سؤال دوم می‌توان نتایج به‌دست آمده در طی فرآیندهای غیر

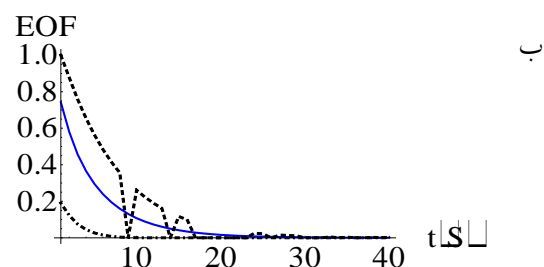


شکل 4. میزان در هم‌تنیدگی تشکیل به‌عنوان تابعی از  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  و ثابت جفت شدگی  $K$  در زمان‌های الف:  $t=0$ ؛ ب:  $t=20$ .

با گذشت زمان به دلیل افت و خیزهای شدید و صفر شدن‌های پی در پی، کنترل درهم‌تنیدگی سیستم بسیار مشکل خواهد بود. از منحنی‌های زیر می‌توان دریافت نوسانات شدید در  $EOF$  و نابودی پی در پی آن، عمل درگاه انجام پذیرد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، جهت کنترل درهم‌تنیدگی باید به ضریب جفت شدگی بین اجزای سیستم توجه داشت.



الف



ب

شکل 5. الف:  $EOF$  به‌عنوان تابعی از زمان در  $K = 30$  برای  $\beta = 0.05$  (نمودار نقطه-خط‌چین)،  $\beta = 0.1$  (نمودار خط پر)،  $\beta = 50$  (نمودار خط‌چین) و ب:  $EOF$  به‌عنوان تابعی از زمان

[7] A.S.M. Hassan, B. Lari, P.S. Joag, Thermal quantum and classical correlations in a two-qubit XX model in a non-uniform external magnetic field, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43** 485302 (2010).

<https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/48/485302>

[8] A.S.M. Hassan, P.S. Joag, Separability Criterion for multipartite quantum states based on the Bloch representation of density matrices, *Quantum Information and Computation*, **8** 8&9 (2008), 0773-0790.

<https://doi.org/10.26421/QIC8.8-9>

[9] M.W. Jack, M. Naraschewski, M.J. Collett, D.F. Walls, Markov approximation

[10] C. Karlewski, M. Marthaler, Time-local master equation connecting the Born and Markov approximations, *Physical Review B* **90** 04302 (2014).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.104302>

[11] H.P. Breuer, E.M. Laine, J. Pilo, B. Vacchini, Non-Markovian dynamics in open quantum systems, *Reviews Of Modern Physics*, **88** 021002 (2016).  
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.021002>

[12] L.K. Castelano, F.F. Fanchini, K. Berada, Open quantum system description of singlet-triplet qubits in quantum dots, *Physical Review B* **94** 235433 (2016).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.235433>

[13] E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin, Entanglement between two qubits induced by thermal field, *Journal of Physics: Conference Series*, **735** 012025 (2016).  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/735/1/012025>

[14] C. Joshi, P. Ohberg, J.D. Cresser, E. Andersson, Markovian evolution of strongly coupled harmonic oscillators, *Physical Review A* **90** 063815 (2014).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.063815>

مارکوی و مارکوی را باهم، در گزارشی جداگانه مقایسه نمود.

## سپاس‌گزاری

بر خود لازم می‌دانم که از دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز کمال تشکر و قدرانی را داشته باشم که در تهیه بودجه این پژوهش همکاری لازم را انجام دادند. همچنین نویسندگان بر خود لازم می‌دانند که از داوران محترمی که با بررسی دقیق خود موجب ارتقای این گزارش شده‌اند تشکر و قدرانی نمایند.

## مرجع‌ها

[1] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge: Cambridge University Press, (2000).

[2] G.P. Berman, G.D. Doolen, R. Mainieri, *Introduction to Quantum Computers*, World Scientific, (1998) 41-42.

[3] C. Simon, M. Afzelius, J. Appel, Quantum Memories, *European Physical Journal D* **58** 1 1-22. (2010)  
<https://doi.org/10.1140/epjd/e2010-00103-y>

[4] H.J. Kimble, The quantum internet, *Nature* **453** (2008) 1023–1030.  
<https://doi.org/10.1038/nature07127>

[5] A.S.M. Hassan, B. Lari, P.S. Joag, Tight lower bound to the geometric measure of quantum discord, *Physical Review A* **85** 024302 (2012).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.024302>

[6] C. Monroe, D.M. Meekhof, B.E. King, W.M. Itano, D. Wineland, Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate, *Physical Review Letters* **75** 25 (1995) 4714–4717.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4714>

on the Bloch representation of density matrices, *Quantum Information and Computation* **8** 773 (2007).

<https://doi.org/10.26421/QIC8.8-9>

[24] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985).  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817>

[25] G.L. Ingold, P. Hanggi, P. Talker, Specific heat anomalies of open quantum systems, *Physical Review E* **79** 061105 (2009).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.061105>

[26] B. Leggio, A. Napoli, H. Nakazato, A. Messina, Heat capacity and entanglement measure in a simple two-qubit model, *Journal of Russian Laser Research*, **32** 4 (2011) 3662-3371.

<https://doi.org/10.1007/s10946-011-9224-0>

[27] M.C. Wiesniek, V. Vedral, C. Brukner, Heat capacity as an indicator of entanglement, *Physical Review B* **78** 064108 (2008).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.064108>

[15] W.H. Zurek, Quantum Darwinism, *Nature Physics* **5** (2009) 181-188.

[16] R.B. Kohout, W.H. Zurek, *Physical Review A* **73** 062310 (2006).  
<https://doi.org/10.1038/nphys1202>

[17] F. Galve, R. Zambrini, S. Maniscalco, Non-Markovianity hinders Quantum Darwinism, *Scientific Reports* **6** 19607 (2016).

<https://doi.org/10.1038/srep19607>

[18] S. Ashhab, P.C. Groot, F. Nori, Speed limits for quantum gates in multi qubit systems, *Physical Review A* **85** 052327 (2012).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.052327>

[19] F.F. Fanchini, M.F. Cornelio, M.C. de Oliveira, A.O. Caldeira, Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord, *Physical Review A* **84** 012313 (2011).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.012313>

[20] I. Sinaysky, E. Ferraro, A. Napoli, A. Messina, F. Petruccione, Non-Markovian dynamics of an interacting qubit pair coupled to two independent bosonic baths, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42** 485301 (2009).  
<https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/48/485301>

[21] S. Hill, W.K. Wootters, Entanglement of a Pair of Quantum Bits, *Physical Review Letters* **78** 5022 (1997).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.5022>

[22] W.K. Wootters, Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, *Physical Review Letters* **80** 2245 (1998).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>

[23] A.S.M. Hassan, P.S. Joag, Separability criterion for multipartite quantum states based