

Thermal stability of d-dimensional Lifshitz like topological black holes in special class of F(R) gravity

Seyed Hossein Hendi^{*1}, Reza Ramezani-Arani², Ebrahim Rahimi²

¹Physics Department and Biruni Observatory, College of Sciences, Shiraz University, Shiraz 71454, Iran

²Department of Elementary Particles, Faculty of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran

Received: 26.10.2019 Final revised: 07.03.2020 Accepted: 09.05.2020

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15569](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15569)

Abstract

In recent years, modified gravity models have played an important role in the cosmological structures. One of these models is F(R) gravity theory which opened a new insight in the context of black hole thermodynamics. Some of interesting consequences of the black hole thermodynamics resulted into investigation of thermal properties of different black holes. In this paper, first we investigate topological Lifshitz-like black hole solutions of F(R) gravity in d-dimensions and then study thermodynamic properties of such special class of F(R) gravity. Finally, we examine thermal stability and possible phase transition with respect to the heat capacity and Gibbs free energy.

Keywords: Black hole, F(R) gravity, Thermal stability, Phase transition

* Corresponding Author: hendi@shirazu.ac.ir



پایداری گرمایی سیاهچاله‌های توپولوژیکی شبه‌لیفشیتز d -بعدی در یک

کلاس خاص از گرانش $F(R)$

سید حسین هندی^{1*}، رضا رضائی آرانی²، ابراهیم رحیمی²

¹بخش فیزیک و رصدخانه ابوریحان بیرونی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

²دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

دریافت: 1398/08/04 ویرایش نهائی: 1398/12/17 پذیرش: 1399/02/14

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15569](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15569)

چکیده

در سال‌های اخیر مدل‌های گرانش اصلاح شده نقش مؤثری در ساختارهای کیهانی داشته است. یکی از این مدل‌ها، گرانش $F(R)$ می‌باشد که دیدگاه جدیدی را به سمت مطالعه خواص ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها ایجاد نموده است. نتایج جالب ترمودینامیک سیاهچاله‌ها باعث شده که برخی محققین ویژگی‌های گرمایی سیاهچاله‌های مختلف را مورد بررسی قرار بدهند. در این مقاله ابتدا به جواب‌های توپولوژیکی سیاهچاله‌های شبه‌لیفشیتز در یک کلاس خاص از گرانش $F(R)$ در فضای d -بعدی می‌پردازیم و در ادامه خصوصیت‌های ترمودینامیکی یک کلاس خاص از جواب‌های سیاهچاله‌ای در گرانش $F(R)$ را محاسبه می‌کنیم. در نهایت پایداری حرارتی و وجود گذار فاز این جواب‌ها را بر اساس برخی از نمودارهای ظرفیت گرمایی و انرژی آزاد گیبس مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلیدواژگان: سیاهچاله، گرانش $F(R)$ ، پایداری گرمایی، گذار فاز

مقدمه

کامل‌تر و عمومی‌تر در بین متخصصین این حوزه احساس شد که منجر به تلاش‌های فراوان در پیدا کردن نظریه‌های جدید گرانش گردید. از طرف دیگر در نظریات نسبتاً موفقی مانند ابرگرانش و نظریه ریسمان، کنش‌های مؤثری دیده می‌شوند که جملات مراتب بالاتر ناوردای انحنا را دربر می‌گیرند. پس برای رفع این مشکل، می‌توان گرانش خمش مراتب بالاتر را جایگزین گرانش اینشتین کرد. با توجه به انگیزه‌های ذکر شده، برخی از مدل‌های تعمیم‌یافته جایگزین گرانش اینشتین شد که یکی از این مدل‌ها، گرانش $F(R)$ می‌باشد و از این گرانش می‌توان به‌عنوان ساده‌ترین مدل گرانش تعمیم‌یافته نام برد.

نسبیت عام یکی از زیباترین نظریه‌های فیزیکی است که به‌عنوان پایه کیهان‌شناسی محسوب می‌گردد. علیرغم موفقیت‌های شگفت‌انگیز و تطابق این نظریه با برخی شواهد رصدی، این نظریه در حد گرانش‌های قوی مثلاً نزدیک سیاهچاله‌ها- به‌خوبی پاسخگو نیست. از جمله مشکلات دیگر این نظریه می‌توان به عدم توضیح انبساط شتابدار عالم، بازبهنجار ناپذیر بودن این نظریه در ناحیه فرابنفش (UV) و کوانتومی نشدن نظریه نام برد [1]. هم‌چنین این نظریه ماهیت ماده تاریک و انرژی تاریک را به‌خوبی توضیح نمی‌دهد. لذا با توجه به مشکلات ذکر شده، نیاز به بررسی مدل‌های

* نویسنده مسئول: hendi@shirazu.ac.ir



$F(R)$ نیز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است [13].

علاوه بر انتخاب مدل گرانش به کار رفته در یک فضا-زمان، ساختار اولیه انتخاب شده مربوط به یک فضا-زمان حائز اهمیت است و فضا-زمان های متقارن کروی به رغم زیبایی در ساختار، از عمومیت بالایی برخوردار نیستند. پیترو هوراوا در سال 2009 برای حل برخی مشکلات نظریه نسبیت عام یک فضا-زمان جدید پیشنهاد کرد که بعدها به فضا-زمان هوراوا-لیفشیتز معروف شد [14]. این پیشنهاد کمک می کند تا یک فضا-زمان جدید با مقیاس ناهمسانگردی بین فضا و زمان ایجاد کنیم. این فضا-زمان تحت تبدیلات زیر ناورداست

$$t \rightarrow \lambda^z t \quad x \rightarrow \lambda x$$

که در آن z نماد بحرانی دینامیکی است. این فضا-زمان جدید با انگیزه های متفاوتی مورد مطالعه قرار گرفته شده است که از جمله آنها می توان به شکست تقارن و بازبهنجارپذیری گروه در مقیاس های بزرگ در نظریه نسبیت عام نام برد.

برای انجام محاسبات معادلات میدان در گرانش $F(R)$ ، دو روش مورد استفاده قرار می گیرد که شامل مکانیزم متریک استاندارد و فرمالیزم پلاتینی می باشد. در این مقاله ما از رهیافت اول، مکانیزم متریک استاندارد استفاده می کنیم. در این مقاله ما با محاسبه جواب های یک کلاس خاص سیاهچاله ها در گرانش $F(R)$ ، خواص ترمودینامیکی این سیاهچاله ها را در ابعاد دلخواه مورد بررسی قرار داده ایم. در ادامه تابع متریک را به صورت تحلیلی محاسبه کرده و کلی ترین جواب را در ابعاد دلخواه به دست می آوریم. سپس با استفاده از روابط استاندارد [15 و 7 و 6] دما و آنتروپی این سیاهچاله را در گرانش $F(R)$ محاسبه خواهیم کرد. پس از آن با گسترش فضای فاز ترمودینامیکی، پایداری گرمایی و

نظریه $F(R)$ در شاخه های مختلف گرانش، کیهان شناسی و اخترفیزیک مورد مطالعه قرار گرفته است [2 و 3]. این نظریه با تغییر لاگرانژی اینشتین-هیلبرت از اسکالر ریچی به تابع دلخواهی از آن، معادلات میدان تعمیم یافته را حاصل می کند. این گرانش تعمیم یافته می تواند در حالت های حدی خاص به گرانش اینشتین-هیلبرت کاهش یابد.

شبهت بین خواص هندسی سیاهچاله ها و متغیرهای ترمودینامیکی، بینش عمیقی را نسبت به رابطه بین خواص فیزیکی گرانش و ترمودینامیک کلاسیک ارائه می دهد. اخیراً ترمودینامیک سیاهچاله ها، به عنوان اولین پله های گذار از گرانش کلاسیک به گرانش کوانتومی، مورد توجه فراوانی قرار گرفته است [4 و 5]. در ابتدا هاوکنینگ نشان داد که دمای سیاهچاله ها به دلیل تابش هاوکنینگ غیرصفر است [6] و پس از آن بکنشتاین بیان کرد که باید به سیاهچاله ها یک آنتروپی متناسب با مساحت افق رویدادشان نسبت داد و بدین ترتیب سیاهچاله ها به عنوان سیستم های ترمودینامیکی در نظر گرفته شدند. از سوی دیگر با توجه به ارتباط بین خصوصیات هندسی گرانش در ترمودینامیک سیاهچاله ها، تعمیم گرانش اینشتین باعث تغییر در رابطه های ترمودینامیکی متناظر با آن نظریه می گردد و بنابراین بررسی تغییرات کمیت های ترمودینامیکی سیاهچاله ها در گرانش $F(R)$ شایان توجه خواهد بود. در دهه های اخیر توجه زیادی به گرانش تعمیم یافته $F(R)$ معطوف گردیده است که به عنوان نمونه در مرجع [7]، موضوع آنتروپی سیاهچاله ها در گرانش $F(R)$ ، مورد بررسی قرار گرفته است. در پژوهشی دیگر در این گرانش به بررسی ترمودینامیک سیاهچاله شوارتزشیلد پرداخته شده است [8-11]. همچنین در مرجع [12] موضوع ماده تاریک در این گرانش مطالعه شده است. معادلات تعمیم یافته ژئودزیک در گرانش

معروف است. با در نظر گرفتن شرط $F(R_0) = F_R|_{R=R_0} = 0$ ، معادلات میدان ناشی از وردش کنش که معادلاتی مرتبه چهار هستند، صرف نظر از انتخاب متریک، به یک رابطه بدیهی منجر می‌شوند و تنها رابطه مورد استفاده در محاسبه تابع متریک، معادله مرتبه دوم مربوط به اسکالر ریچی است. لذا با رعایت شرط $F_{RR} \neq 0$ ، می‌توان خاطر نشان کرد که جواب‌های به دست آمده پایدار هستند (برای یافتن مثال‌هایی از گرانش $F(R)$ که شرایط ذکر شده را دارا هستند [20-23]).

از آنجا که در پی یافتن جواب‌های لیفتشیتز-گونه هستیم، متریک زیر را با تابع اختیاری $B(r)$ در نظر می‌گیریم [16]

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 B(r) dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 h_{ij} dx_i dx_j \quad 2$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \dots, d_2)$$

که در آن r_0 یک مقیاس طول دلخواه (مثبت) است و عنصر خطی $h_{ij} dx_i dx_j$ متریک ابرسطح d_2 - بعدی با انحنای ثابت $d_1 d_2 k$ و حجم w_k می‌باشد و به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$3$$

$$h_{ij} dx_i dx_j = \begin{cases} dx_1^2 + \sum_{i=2}^{d_2} \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 x_j dx_i^2, & k=1 \\ dx_1^2 + \sinh^2 x_1 \sum_{i=2}^{d_2} dx_i^2 \prod_{j=2}^{i-1} \sin^2 x_j, & k=-1 \\ \sum_{i=1}^{d_2} dx_i^2, & k=0 \end{cases}$$

که در این رابطه $k = 1$ و $k = 0$ و $k = -1$ به ترتیب معرف ابرسطوحی با انحنای مثبت (کروی)، صفر (تخت) و منفی (هایپربولیک) می‌باشد. در روابط بالا از اختصار نویسی $d_i = d - i$ استفاده شده است. با اندکی محاسبه اسکالر ریچی به صورت زیر به دست می‌آید

گذار فاز واندروالس گونه سیاهچاله را با بررسی نمودارهای فشار، ظرفیت گرمایی و انرژی آزاد گیبس توضیح خواهیم داد و در انتها به ارائه نتایج خواهیم پرداخت.

جواب‌های سیاهچاله‌ای در گرانش $F(R)$

هدف این مقاله، بررسی پایداری گرمایی کلاس خاصی از سیاهچاله‌ها در گرانش $F(R) = R + f(R)$ در d -بعد با اسکالر ریچی ثابت ($R = R_0$) می‌باشد. کنش نیز در d بعد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$1 \quad \int_M d^d x \sqrt{-g} [R + f(R)],$$

که در این رابطه M خمینه d -بعدی می‌باشد. آشکار است که برای $F(R) = R$ ($f(R) = 0$)، این رابطه به کنش اینشتین-هیلبرت نسبت عام تبدیل می‌گردد. به منظور به دست آوردن جواب‌های تحلیلی، در این مقاله ما از روش ارائه شده در مرجع [16]، که بیان کننده کلاسی خاص از گرانش $F(R)$ با دو قید هم‌زمان، $F(R_0) = 0$ و $\frac{dF(R)}{dR}|_{R=R_0} = F_R|_{R=R_0} = 0$ است، استفاده می‌کنیم.

برخلاف گرانش اینشتین، گرانش $F(R)$ ممکن است دارای ناپایداری باشد. دلیل این اختلاف از آنجا نشأت می‌گیرد که معادلات میدان در نظریه اینشتین مرتبه دوم و در گرانش $F(R)$ مرتبه چهارم است. در صورتی که $F(R) \neq 0$ ولی $F_R = 0$ ، نشان داده شده است که هیچ گونه حالت زمینه پایداری وجود ندارد [17]. برای جواب‌های ارائه شده در این مقاله فرض بر اینست که $F(R_0) = F_R|_{R=R_0} = 0$ ولی مشتق دوم تابع $F(R)$ نسبت به اسکالر ریچی مخالف صفر است ($F_{RR} \neq 0$). برای داشتن جواب‌های دینامیکی پایدار، جرم مؤثر گرانش $F(R)$ که متناسب با F_{RR} است باید مثبت باشد که به شرط پایداری دولگوو-کاوازاکی [18 و 19]

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\alpha\beta\gamma\sigma} = f_1\lambda^2 + \frac{f_2k^2}{r^4} + \frac{f_3\lambda k}{r^2} + \frac{f_4mk}{r^{4+\alpha}} + \quad 9$$

$$\frac{f_5nk}{r^{4+\beta}} + \frac{f_6m\lambda}{r^{2+\alpha}} + \frac{f_7n\lambda}{r^{2+\beta}} + \frac{f_8m^2}{r^{4+2\alpha}} + \frac{f_9n^2}{r^{4+2\beta}} + \frac{f_{10}mm}{r^{4+\alpha+\beta}},$$

که در این رابطه، ضرایب $f_i = f_i(d, z)$ توابعی از ابعاد فضا زمان و پارامتر z است که به علت اختصارنویسی از ارائه شکل صریح این توابع صرف نظر کرده ایم. با توجه به اینکه در این مقاله فقط حالت $z \geq 0$ را در نظر گرفته ایم و همچنین $d \geq 3$ ، به آسانی می توان نشان داد α و β کمیت های غیرمنفی هستند و لذا اسکالر کریشمن در $r = 0$ و اگر، برای مقادیر $r \neq 0$ محدود و در $r \rightarrow \infty$ متناسب با λ^2 می گردد. با توجه به معادله 5 می توان دریافت که با انتخاب

$$(R_0 = -\frac{z^2 + 2dz + 2dd_1}{2l^2}) \lambda = \frac{-1}{l^2} = \frac{2\Lambda}{d_1d_2}$$

رفتار مجانبی جواب ها به صورت آنتی دوسیده خواهد بود (که Λ و l به ترتیب ثابت کیهان شناسی و طول مشخصه فضای آنتی دوسیده است).

برای محاسبه افق رویداد از معادله $g^{rr} = 0$ استفاده می شود. از آنجا که یافتن افق رویداد به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست، از محاسبات عددی استفاده می کنیم. بر طبق شکل 1، می توان مشاهده کرد که تابع متریک (با انحنای افق دلخواه) می تواند دارای یک ریشه مثبت حقیقی باشد که شیب تابع متریک در محل این ریشه مثبت (یا صفر) است.

$$\frac{2d_2d_3k - [z^2 + 2d_3(z + d_2)]B(r)}{2r^2} - \quad 4$$

$$\frac{(3z + 4d_2)B'(r)}{2r} - B''(r) = R_0$$

که در این رابطه، نماد پریم معرف مشتق نسبت به مختصات شعاعی می باشد. از حل معادله فوق، تابع متریک به صورت زیر به دست می آید

$$B(r) = K - \frac{m}{r^\alpha} - \frac{n}{r^\beta} - \lambda r^2 \quad 5$$

که در آن K و λ دو کمیت ثابت می باشند که مقادیر آنها وابسته به علامت و مقدار z ، k و R_0 بوده و به صورت زیر تعریف می شوند

$$K = \frac{2d_2d_3k}{z^2 + 2zd_3 + 2d_2d_3} \quad 6$$

$$\lambda = \frac{2R_0}{z^2 + 2dz + 2dd_1} \quad 7$$

همچنین در رابطه 5، m و n ثابت های انتگرال گیری هستند و کمیت های α و β به صورت زیر معرفی می شوند

$$\alpha = \frac{3z}{4} + d - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{z^2 + 4z(2d-3) + 4}}{4}$$

$$\beta = \frac{3z}{4} + d - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{z^2 + 4z(2d-3) + 4}}{4},$$

به منظور تفسیر جواب ها به عنوان سیاهچاله، باید وجود افق و تکینگی برای جواب ها را بررسی کرد. جهت بررسی وجود تکینگی، اسکالر کریشمن به صورت زیر محاسبه می شود

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\alpha\beta\gamma\sigma} = B''^2 + \left(\frac{z[3rB' + (z-2)B]}{r^2}\right)B'' + \left(\frac{9z^2 + 8d_2}{4r^2}\right)B'^2 + \frac{z[3z(z-2) + 4d_2]B}{2r^3}B' + \frac{(z^4 - 4z^3 + 4z^2d_1 + 8d_2d_3)B^2}{4r^4} - \frac{4kd_2d_3}{r^4}B + \frac{2k^2d_2d_3}{r^4} \quad 8$$

با جای گذاری تابع متریک 5 در معادله فوق، می توان به رابطه زیر رسید

α و β حقیقی و مثبت خواهند بود به طوری که $\beta > \alpha$ می‌باشد. لذا تفسیر پارامترهای α و β در حالت $z = 0$ ، با اندکی تغییر قابل تعمیم به حالت $z \neq 0$ ($z > 0$) می‌باشد.

خصوصیات ترمودینامیکی و پایداری گرمایی

در ادامه کمیت‌های ترمودینامیکی جواب‌های سیاهچاله به دست آمده در گرانش $F(R)$ را محاسبه نموده و سپس پایداری گرمایی جواب‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ابتدا از تعریف گرانش سطحی برای به دست آوردن دمای سیاهچاله در افق رویداد r_+ استفاده می‌کنیم [25]

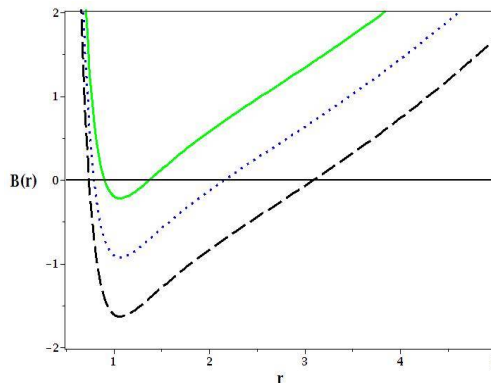
$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} (\nabla_\mu \chi_\nu) (\nabla^\mu \chi^\nu)} \quad 11$$

که در این رابطه $\chi = \frac{\partial}{\partial t}$ بردار کیلینگ فضا-زمان ایستای مورد مطالعه است. با اندک محاسبه می‌توان نوشت

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{dB(r)}{dr} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{z}{2}} \Bigg|_{r=r_+} \quad 12$$

با استفاده از روابط 11 و 12، داریم

$$T = \frac{\left(\frac{r_+}{r_0} \right)^{\frac{z}{2}}}{4\pi} \left[\frac{K\alpha}{r_+} - (\alpha+2)\lambda r_+ + \frac{n(\beta-\alpha)}{r_+^{1+\beta}} \right] \quad 13$$



شکل 1. نمودار $B(r)$ بر حسب r به ازای مقادیر $(n = -1, m = 2, \lambda = -0.1, z = 1, d = 5)$ و $k = -1$ (خط چین)، $k = 0$ (نقطه چین) و $k = 1$ (خط پیوسته)

لذا این جواب‌ها را می‌توان به جواب‌های سیاهچاله‌ای تفسیر نمود. به دیگر سخن وجود ریشه مثبت با خصوصیات گفته شده تضمین کننده وجود افق رویداد می‌باشد.

بررسی حالت حدی $z = 0$ نیز جالب توجه است. در این حالت حدی متریک به صورت زیر معرفی می‌گردد

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 h_{ij} dx_i dx_j, \quad 10$$

که در این رابطه تابع متریک به صورت زیر است

$$B(r) = k - \frac{m}{r^{d-3}} - \frac{n}{r^{d-2}} - \frac{R_0}{dd_1} r^2.$$

در حالت 4 بعدی، این حالت حدی همان متریک رایسنر-نوردستروم-آنتی دوسیته ($R_0 < 0$) می‌باشد ولی در ابعاد بالا، این جواب‌ها متناظر با جواب‌های باردار نظریه توانی ماکسول (توان ناوردای ماکسول در لاگرانژی را برابر با یک چهارم ابعاد فضا-زمان در نظر می‌گیریم) می‌باشد (برای توضیحات بیشتر در این رابطه به مرجع [24] مراجعه نمایید). با توجه به این حالت حدی، می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر m معرف جرم و نیز ارتباط کمیت n با بار الکتریکی به صورت $n = -q^{d/2}$ می‌باشد [24]. با توجه به اینکه در این مقاله پارامتر z مثبت در نظر گرفته شده، هر دو کمیت

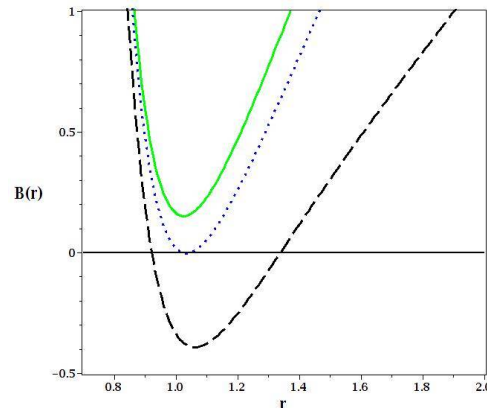
اکنون به محاسبه آنتروپی می‌پردازیم. برای محاسبه آنتروپی در گرانش اینشتین از قانون مساحت استفاده می‌شود. ولی به منظور محاسبه آنتروپی سیاهچاله‌ها در گرانش $F(R)$ ، قانون مساحت تعمیم یافته مورد استفاده قرار می‌گیرد. آنتروپی در این گرانش از رابطه زیر به دست می‌آید [7]

$$S = \frac{A}{4} F_R(R_0), \quad 14$$

که در معادله فوق A مساحت افق رویداد سیاهچاله و شرط $\left. \frac{dF(R)}{dR} \right|_{R=R_0} \neq 0$ باید رعایت شود. با در نظر گرفتن دو قید مورد نظر در این مقاله، $F(R_0) = 0$ ، مقدار آنتروپی معادله 14 به صفر منجر خواهد شد. این مشکل از آنجا ناشی می‌شود که آنتروپی گرانش $F(R)$ تعمیمی از قانون مساحت بکنشتاین با جفتیدگی مؤثر $(G_{eff} = \frac{G}{F_R})$ می‌باشد. بنابراین با توجه به صفر شدن آنتروپی در حالت مورد نظر و شکست این قانون، ما نمی‌توانیم از قانون مساحت تعمیم یافته استفاده نماییم. از آنجایی که اعتقاد بر اینست که جواب‌های سیاهچاله باید در قوانین ترمودینامیک صدق کنند، پس ما برای محاسبه آنتروپی غیرصفر از قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها استفاده می‌کنیم [26]. برای این کار نیاز به دانستن جرم سیاهچاله داریم.

با توجه به مطالب گفته شده در آخرین سطور بخش قبل و نیز اینکه r_+ ریشه تابع متریک $B(r)$ می‌باشد، جرم سیاهچاله به ازای واحد حجم w_k به صورت زیر به دست می‌آید (رفتار مجانبی تابع متریک را با سیاهچاله‌های لیفشیتزگونه در گرانش اینشتین مقایسه می‌کنیم)

$$M = \frac{d_2}{16\pi} (K r_+^\alpha - \lambda r_+^{2+\alpha} - \frac{n}{r_+^{\beta-\alpha}}) \quad 15$$



شکل 2: نمودار $B(r)$ بر حسب r به ازای مقادیر

$(n = -1, m = 2, d = 5, r_0 = 1, z = 3, k = 1)$

و $\lambda > \lambda_{ext}$ (خط چین)، $\lambda = \lambda_{ext}$ (نقطه چین) و $\lambda < \lambda_{ext}$ (خط پیوسته).

با توجه به اینکه تابع متریک در نزدیکی مبدأ و در بینهایت فضایی دارای مقادیر مثبت است (شکل‌های 1 و 2)، با در نظر گرفتن رابطه 13، می‌توان دریافت که در صورت مثبت بودن دما، سیاهچاله مورد مطالعه دارای دو افق درونی و بیرونی (رویداد) می‌باشد. در حالتی که دما منفی شود، تابع متریک در کل بازه $[0, +\infty)$ یک تابع همواره مثبت (بدون ریشه) می‌باشد. به دیگر سخن در این حالت تکینگی با افقی پوشیده نشده که به آن تکینگی عریان (naked singularity) می‌گویند. همچنین صفر شدن دما معرف یک سیاهچاله اکستریم است. با توجه به وجود توان‌های مختلف برای r_+ در رابطه 13، امکان یافتن جواب تحلیلی برای شعاع افق اکستریم وجود ندارد. لذا برای طبقه‌بندی جواب‌ها می‌توان از سایر پارامترها بهره گرفت. به عنوان مثال می‌توان نوشت

$$\lambda_{ext} = \frac{K\alpha}{(\alpha+2)r_{ext}^2} + \frac{n(\beta-\alpha)}{(\alpha+2)r_{ext}^{2+\beta}}$$

که بر طبق این رابطه، جواب‌های به دست آمده برای حالت‌های $\lambda < \lambda_{ext}$ و $\lambda = \lambda_{ext}$ ، $\lambda > \lambda_{ext}$ سیاهچاله با دو افق، سیاهچاله اکستریم و تکینگی عریان طبقه‌بندی می‌شوند (شکل 2).

با در نظر گرفتن فشار متناسب با ثابت کیهان‌شناسی، قانون اول ترمودینامیک تعمیم یافته با رابطه اسمار تعمیم یافته مطابقت دارد که به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$dM = TdS + PdV + \mathfrak{S}dn \quad 20$$

$$\alpha M = \left(\alpha + 1 - \frac{z}{2} \right) TS - 2PV + \beta \mathfrak{S}n \quad 21$$

که در آن

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial n} \right)_{S,P} = - \frac{d_2}{16\pi r_+^{\beta-\alpha}}, \quad 22$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,\mathfrak{S}} = \frac{r_+^{2+\alpha}}{d_1}.$$

روابط 20 و 21 نیز مؤید صحت کمیت‌های پایا و ترمودینامیکی محاسبه شده نیز می‌باشند.

در ادامه به بررسی پایداری گرمایی و احتمال وجود گذار فاز خواهیم پرداخت. مطالعه رفتار سیاهچاله‌ها نشان می‌دهد که بعضی از آنها، مشابه با گاز واندوالس، گذار فاز مرتبه اول از خود نشان می‌دهند [31]. جهت تحقیق در این مورد و به دست آوردن نقطه بحرانی، از ویژگی نقطه عطف نمودار فشار-حجم در نقطه بحرانی استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر در نقطه بحرانی، مشتقات مرتبه اول و دوم فشار نسبت به حجم برابر صفر خواهند شد

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial r_+} \right)_T = 0, \quad 23$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_T = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r_+^2} \right)_T = 0.$$

در روابط فوق از این واقعیت استفاده شده که حجم ویژه یک سیاهچاله با افق رویداد آن متناسب است و لذا نتایج حاصل از نمودار $P-r_+$ متناظر با نتایج حاصل از نمودار فشار-حجم است [31]. با کمی محاسبه و ساده سازی، دو معادله 23 به صورت زیر نوشته می‌شوند

جهت تأیید صحت این رابطه، در ادامه نشان خواهیم داد که این رابطه به صورت همزمان در قانون اول ترمودینامیک و رابطه اسمار صدق می‌کند. تنها نکته قابل ذکر اینکه در حالت خاص $m=0$ و با تبدیل می‌توان $z \rightarrow \frac{64(3-2d)+12(\beta-\alpha)-25z}{7}$ پارامتر n را به جرم تعبیر نمود که این حالت خاص به علت شرط $m \neq 0$ در این مقاله بررسی نمی‌گردد.

کنون هدف ما به دست آوردن آنتروپی با استفاده از اعتبار قانون اول ترمودینامیک است. بنابراین می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود

$$\delta S = \frac{1}{T} \delta M \quad 16$$

و لذا آنتروپی به ازای واحد حجم w_k به صورت زیر محاسبه می‌گردد [27]

$$S = \int \frac{dM}{T} = \frac{d_2 r_+^{1+\alpha}}{2(2\alpha-z+2)} \left(\frac{r_+}{r_0} \right)^{-\frac{z}{2}}. \quad 17$$

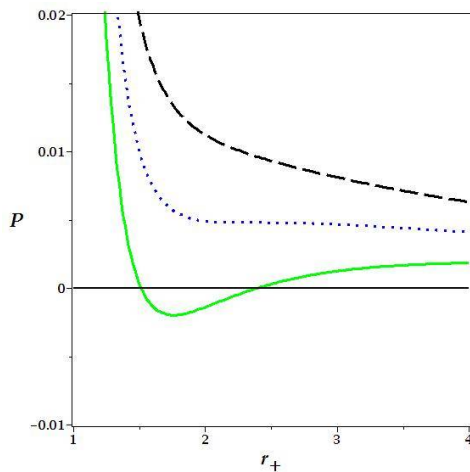
قابل ذکر است که به ازای مقدار $z=0$ ، معادله فوق به قانون سطح کاهش پیدا می‌کند.

به رغم برقراری قانون اول، رابطه اسمار برای این سیاهچاله برقرار نیست. برای حل این مشکل از ترمودینامیک سیاهچاله‌ها در فضای فاز گسترش یافته استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه در سال‌های اخیر ثابت کیهان‌شناسی متناسب با فشار ترمودینامیکی سیاهچاله در نظر گرفته می‌شود [28-30]، می‌توان نوشت

$$P = \frac{-d_1 d_2 \lambda}{16\pi} \quad 18$$

و لذا با در نظر گرفتن رابطه 13، فشار ترمودینامیکی به شکل زیر محاسبه می‌گردد

$$P = \frac{d_1 d_2 \left[4\pi T r_+ \left(\frac{r_+}{r_0} \right)^{-\frac{z}{2}} - \frac{n(\beta-\alpha)}{r_+^\beta} - K\beta \right]}{16\pi r_+^2 (2+\beta)} \quad 19$$



شکل 3. نمودار فشار برحسب شعاع افق رویداد به ازای مقادیر $T < T_c$ و $n = -1, r_0 = 1, k = 1, z = 1, d = 5$ (خط پیوسته)، $T = T_c$ (نقطه چین) و $T > T_c$ (خط چین)

براساس جداول ارائه شده می توان دید که کاهش پارامتر دینامیکی لیفشیتز (افزایش ابعاد فضا زمان) باعث افزایش دما و فشار بحرانی و کاهش شعاع (حجم ویژه) بحرانی می گردد.

اکنون برای تأیید نتایج به دست آمده و نیز یافتن مرتبه گذار فاز، انرژی آزاد گیبس این سیستم را محاسبه می نماییم. با توجه به اینکه در فضای فاز گسترش یافته جرم محاسبه شده تعبیر آنتالپی دارد [30]، انرژی آزاد گیبس از رابطه زیر محاسبه می شود

$$G = M - TS \quad 24$$

که در آن M, T, S به ترتیب آنتروپی، دما و جرم سیاهچاله می باشند. با جای گذاری جرم، دما و آنتروپی و نیز اندکی ساده سازی، انرژی آزاد گیبس به صورت زیر به دست می آید

$$G = \frac{(z+2)Pr_+^2}{d_1\Psi} - \frac{d_2 \left[\frac{(z-2\beta-2)n}{r_+^\beta} - K(z-2) \right]}{16\pi\Psi} \quad 25$$

که در این رابطه کمیت Ψ برابر است با

$$\Psi = \frac{(z-2\alpha-2)}{r_+^\alpha} \quad 26$$

$$\left[\alpha K + \frac{n(\beta+2)(\beta-\alpha)}{2r_+^\beta} \right] \left(\frac{r_+}{r_0} \right)^{\frac{z}{2}} - \pi T(z+2)r_+ = 0,$$

$$\left[6\alpha K + \frac{n(\beta+3)(\beta+2)(\beta-\alpha)}{r_+^\beta} \right] \left(\frac{r_+}{r_0} \right)^{\frac{z}{2}} - \pi T(z+2)(z+4)r_+ = 0.$$

از آنجایی که حل تحلیلی دو معادله فوق به صورت همزمان جهت به دست آوردن دو مجهول T و r_+ امکان پذیر نیست، برای محاسبه کمیت های بحرانی از روش های عددی استفاده می کنیم. نتایج این محاسبات عددی برای افق کروی ($k=1$)، به صورت نمودار فشار-حجم (شکل 3) و نیز در جداول زیر آمده است. به راحتی می توان دید که سیاهچاله مورد مطالعه دارای رفتار واندروالس گونه است. به دیگر سخن، نمودارهای هم دمای فشار-حجم نشان می دهند که سیستم دارای یک گذار فاز در زیر دمای بحرانی است. بر طبق این نمودارها می توان دید که به ازای $T > T_c$ ، سیاهچاله شبیه گاز ایده آل رفتار کرده و هیچ گذار فازی وجود ندارد. برای حالت $T = T_c$ منحنی همدمای بحرانی با یک نقطه عطف رسم شده است.

جدول 1. کمیت های بحرانی به ازای مقادیر.

$$(n = -1, r_0 = 1, k = 1, z = 1)$$

d	r_c	T_c	P_c
4	3,687	0,0276	0/0004
5	2,532	0,0771	0/0029
6	2,105	0,1382	0/0098
7	1,879	0,2064	0/0228
8	1,738	0,2796	0/0430

جدول 2. کمیت های بحرانی به ازای مقادیر ($n = -1, r_0 = 1, k = 1, d = 5$)

z	r_c	T_c	P_c
0	1,710	0,1396	0,0245
0,1	1,910	0,1178	0,0173
0,5	2,287	0,0875	0,0073
1,5	2,814	0,0751	0,0009

$$C_{P,n} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,n} = T \left(\frac{\partial S}{\partial r_+} \right)_{P,n} \left(\frac{\partial T}{\partial r_+} \right)_{P,n}^{-1} \quad 27$$

با محاسبات مستقیم می‌توان نشان داد که ظرفیت گرمایی به صورت زیر ساده می‌شود

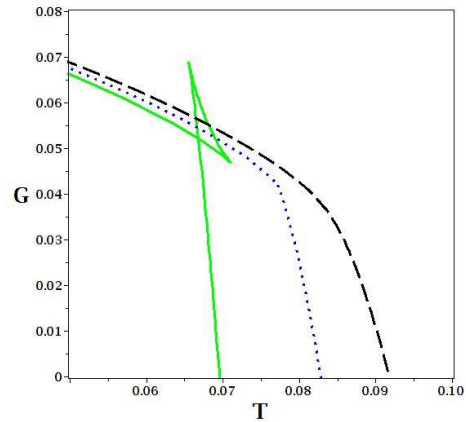
$$C_{P,n} = \frac{d_2 (16\pi P(\alpha + 2)r_+^2 + X) r_+^{1+\alpha}}{32\pi P(z + 2)(2 + \alpha)r_+^2 + Y} \left(\frac{r_0}{r_+} \right)^{\frac{z}{2}} \quad 28$$

که در آن

$$X = d_1 d_2 K \alpha - \frac{d_1 d_2 (\alpha - \beta)n}{r_+^\beta}, \quad 29$$

$$Y = 2d_1 d_2 \left[\alpha K(z - 2) - \frac{(z - 2 - 2\beta)(\alpha - \beta)n}{r_+^\beta} \right].$$

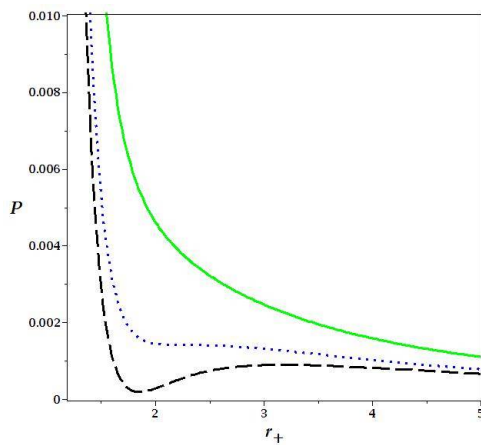
اکنون با رسم نمودار ظرفیت گرمایی به بررسی پایداری گرمایی و تأثیر پارامترهای مختلف می‌پردازیم. باتوجه به نمودار ظرفیت گرمایی (شکل 5) می‌توان دید که به‌ازای بعضی از پارامترهای سیستم، ظرفیت گرمایی دارای دو واگرایی است (r_{1+}, r_{2+}) که بین این دو واگرایی ($r_{1+} < r_+ < r_{2+}$) ظرفیت گرمایی مقداری منفی دارد. بنابراین در این ناحیه یک حالت ناپایدار مشاهده می‌شود و سیستم یک گذار فازی را بین این دو واگرایی تجربه می‌کند. برای حالت $P = P_c$ یک واگرایی وجود دارد که در تمام نواحی ظرفیت گرمایی مثبت و سیستم در پایداری حرارتی خواهد بود. این نقطه واگرایی معرف حالت بحرانی سیستم است (وجود این واگرایی مربوط به حالت بحرانی با واگرایی ناشی از گذار فاز هاوکینگ-پیچ که ظرفیت گرمایی در دو طرف واگرایی تغییر علامت می‌دهد، متفاوت است). به‌ازای $P > P_c$ واگرایی وجود نخواهد داشت و ظرفیت گرمایی همواره مثبت و سیستم از لحاظ گرمایی به‌طور موضعی پایدار است.



شکل 4. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازای مقادیر $n = -1, r_0 = 1, k = 1, z = 1, d = 5$ و $P < P_c$ (خط پیوسته) $P = P_c$ (نقطه چین) و $P > P_c$ (خط چین).

جهت مطالعه دقیقتر، نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما در شکل 4 رسم شده است. با توجه به نموداری که به دم چلچله‌ای معروف است، به‌وضوح می‌توان تأیید کرد که یک گذار فاز مرتبه اول در زیر فشار بحرانی ($P < P_c$) در نمودار انرژی آزاد گیبس دیده می‌شود. به‌عبارت دیگر، وجود شکستگی در نمودار گیبس (ناپیوستگی در مشتق اول)، تضمین‌کننده وجود گذار فاز مرتبه اول است.

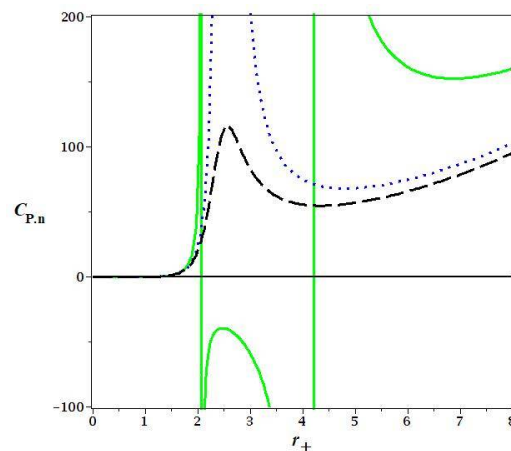
از سوی دیگر، به‌منظور مطالعه پایداری گرمایی و نیز گذار فاز یک سیستم می‌توان ظرفیت گرمایی آن را مطالعه نمود. مثبت بودن ظرفیت گرمایی (به‌همراه مثبت بودن دما) متضمن پایداری گرمایی یک سیستم است. به‌عبارت دقیقتر، در صورتی که ظرفیت گرمایی سیستم منفی باشد آن سیستم ناپایدار است و اگر ظرفیت گرمایی مثبت باشد، سیستم در یک پایداری موضعی قرار گرفته است. همچنین وجود واگرایی در ظرفیت گرمایی، نشانه‌ای از وجود گذار فاز می‌باشد. ظرفیت گرمایی سیستم مورد مطالعه در این مقاله از رابطه زیر محاسبه می‌گردد



شکل 6. نمودار فشار برحسب r_+ به ازای مقادیر

$$T < T_c \text{ و } n = -1, r_0 = 1, k = -1, z = 3, d = 5$$

(خط پیوسته)، $T = T_c$ (نقطه چین) و $T > T_c$ (خط چین)



شکل 5. نمودار ظرفیت گرمایی برحسب شعاع افق رویداد به ازای مقادیر

$$p < p_c \text{ و } n = -1, r_0 = 1, k = 1, z = 1, d = 5$$

(خط پیوسته) $p > p_c$ و (خط چین).

با توجه به جداول 3 و 4 و همچنین شکل های 6، 7 و 8 درمی یابیم که رفتاری مشابه رفتار سیال واندروالس برای افق های پربولیک نیز مشاهده می شود. قابل ذکر است که اگرچه مقادیر بحرانی حجم و فشار مثبت است اما دمای بحرانی منفی است. به عبارت دیگر در این مورد تمام کمیت های فیزیکی مانند انرژی آزاد گیبس، حجم و فشار مثبت هستند اما دما منفی است. بنابراین، اگرچه شکل دم چلچله ای در نمودار $G-T$ و رفتار واندروالسی در نمودار $P-r_+$ (برخلاف سیال واندروالس به ازای $T > T_c$) دیده می شود، تفسیر گذار فاز (بین دو حالت پایدار) براساس (مثبت بودن) ظرفیت گرمایی باید تغییر کند. از آنجائی که دمای منفی مربوط به رفتار سیستم های مکانیک کوآنتومی است (در سیستم های کلاسیکی مشاهده نمی گردد)، بررسی رفتار ترمودینامیکی جواب های سیاهچاله ذکر شده با روش مکانیک آماری جالب توجه خواهد بود.

در همین قسمت باید متذکر شویم که مقادیر عددی پارامترهای استفاده شده در رسم نمودارها منطقی هستند و به دیگر سخن به ازای این پارامترها و نیز کمیت های بحرانی به دست آمده، همه کمیت های فیزیکی از جمله دما، جرم و آنتروپی مثبت و فیزیکی هستند.

نکته قابل ذکر اینکه تمامی محاسبات و نمودارهای قبلی صرفاً برای جواب های با افق کروی ذکر گردید. در بیشتر جواب های سیاهچاله های توپولوژیکی مجانباً آنتی دوسیت، رفتار واندروالس گونه فقط برای افق کروی گزارش شده و برای افق هایی با انحنای منفی و انحنای صفر، چنین رفتاری دیده نمی شود. در این قسمت به طور خلاصه، به بررسی امکان وجود رفتار واندروالس گونه برای جواب های سیاهچاله ای با افق های پربولیک (انحنای منفی $k = -1$) می پردازیم.

جدول 4. کمیت‌های بحرانی به‌ازای مقادیر

$$(n = -1, r_0 = 1, k = -1, d = 5)$$

z	r_c	T_c	P_c
2,1	3,477	-0,0816	0,0001
2,5	2,590	-0,0846	0,0007
3,1	2,225	-0,0857	0,0015
3,5	2,095	-0,0858	0,0020

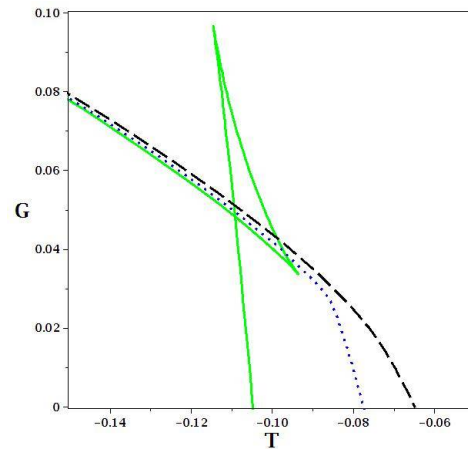
نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن یک فضا-زمان d -بعدی مجانباً لیفشیتر و با اعمال دو قید $F(R_0) = 0$ ، $F_R(R_0) = 0$ در گرانج $F(R)$ ، رفتار ترمودینامیکی سیاهچاله‌های توپولوژیکی بررسی شده است.

کمیت‌های ترمودینامیکی محاسبه و قانون اول ترمودینامیک بررسی شده است. سپس پایداری حرارتی و گذار فاز مورد تحلیل واقع شده است. گذار فاز را با در نظر گرفتن ثابت کیهان‌شناسی به‌عنوان یک فشار ترمودینامیکی برای افق کروی سیاهچاله‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. با بررسی سه نمودار ظرفیت گرمایی، انرژی آزاد گیبس و فشار مشاهده شد که شرایط رفتار شبه واندروالسی با یک گذار مرتبه اول برای افق کروی وجود دارد.

علاوه بر این نتایج سازگاری از نمودارهای ذکر شده به‌دست آمد که عبارتند از 1- حالت‌هایی با پایداری گرمایی موضعی بدون گذار فاز 2- رفتار بحرانی در نمودارهای بحرانی 3- وجود گذار فاز مرتبه اول شبه واندروالسی. ضمناً نشان داده شد که هرکدام از پارامتر لیفشیتر و ابعاد فضا-زمان نقش مهمی در مقادیر کمیت‌های بحرانی دارد.

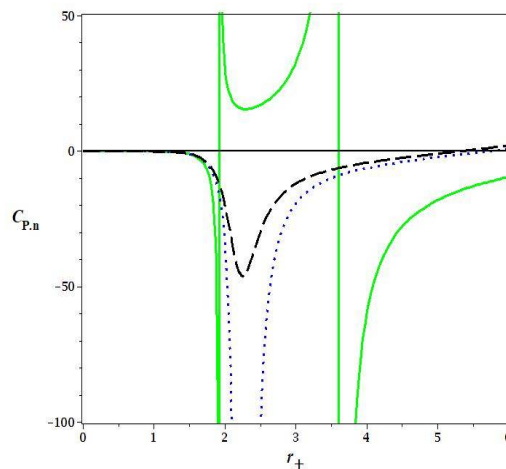
همچنین رفتاری شبیه گذار فاز واندروالسی برای جواب‌های با افق هایپربولیک معرفی شد که به لحاظ ساختاری تفاوت عمده‌ای با آنچه در مورد گذار فاز می‌دانیم، دارد. از آنجاکه این رفتار به‌ازای دماهای منفی



شکل 7. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازای مقادیر

$$P = P_c \text{ و } n = -1, r_0 = 1, k = -1, z = 3, d = 5$$

(خط چین)، $p < P_c$ (خط پیوسته) و $p > P_c$ (نقطه چین).



شکل 8. نمودار ظرفیت گرمایی برحسب r_+ به‌ازای مقادیر

$$p = P_c \text{ و } n = -1, r_0 = 1, k = -1, z = 3, d = 5$$

(خط چین) $p < P_c$ (خط پیوسته) و $p > P_c$ (نقطه چین)

جدول 3. کمیت‌های بحرانی به‌ازای مقادیر.

$$(n = -1, r_0 = 1, k = -1, z = 3)$$

d	r_c	T_c	P_c
4	2,907	-0,0403	0,0002
5	2,267	-0,0866	0,0014
6	1,976	-0,1342	0,0047
7	1,806	-0,1848	0,0108
8	1,692	-0,2366	0,0207

holes in bumblebee gravity models, *Annals of Physics (in press)*[arXiv:1811.08503].

<https://doi.org/10.1016/j.aop.2020.168198>

[6] S.W. Hawking, Black hole explosions, *Nature* **248** (1974) 30.

<https://doi.org/10.1038/248030a0>

[7] V. Faraoni, Black hole entropy in scalar-tensor and $f(R)$ gravity: an overview, *Entropy* **12** (2010) 1246.

<https://doi.org/10.3390/e12051246>

[8] A. Addazi, S. Capozziello, The fate of Schwarzschild-de Sitter black holes in $f(R)$ gravity, *Modern Physics Letters A* **31** (2016) 1650054.

<https://doi.org/10.1142/S0217732316500541>

[9] S.H. Hendi, D. Momeni, Black-hole solutions in $F(R)$ gravity with conformal anomaly, *European Physical Journal C* **71** (2011) 1823.

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1823-y>

[10] S.H. Hendi, B. Eslam Panah, R. Saffari, Exact solutions of three-dimensional black holes: Einstein gravity versus $F(R)$ gravity, *International Journal of Modern Physics D* **23** (2014) 1450088.

<https://doi.org/10.1142/S0218271814500886>

[11] J.C.C. de Souza, V. Faraoni, The phase-space view of $f(R)$ gravity, *Classical and Quantum Gravity* **24** (2007) 3637.

<https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/14/006>

[12] S. Nojiri, S.D. Odintsov, P.V. Tretyakov, Dark energy from modified $F(R)$ -scalar-Gauss-Bonnet gravity, *Physics Letters B* **651** (2007) 224.

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.06.029>

[13] A. Guarnizo, L. Castaneda, J.M. Tejeiro, Geodesic Deviation Equation in $f(R)$ Gravity, *General Relativity Gravitation* **43** (2011) 2713.

<https://doi.org/10.1007/s10714-011-1194-6>

[14] P. Horava, Quantum gravity at a Lifshitz Point, *Physical Review D* **79** (2009) 084008.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084008>

[15] J.D. Bekenstein, Black holes, entropy, *Physical Review D* **7** (1973) 2333.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>

رخ می‌دهد، بررسی بیشتر این حالت به لحاظ کوآنتومی و از دیدگاه مکانیک آماری جالب توجه خواهد بود.

از آنجاکه این مقاله تعمیم مرجع 26 برای ابعاد دلخواه است، انتظار می‌رود که تمامی روابط محاسبه شده در این مقاله، در حالت خاص $d = 4$ به روابط متناظر در مرجع 26 تبدیل شود. با اندک محاسبه می‌توان نشان داد که صرف نظر از یک ضریب بهنجارش (4π) تمامی نتایج این مقاله در حالت $d = 4$ و نتایج متناظر در مرجع 26 کاملاً همخوانی دارند.

در ادامه پیشنهاد می‌شود که پایداری ترمودینامیکی جواب‌های سیاهچاله مورد مطالعه را در آنسامبل کانونی بزرگ به کمک محاسبه دترمینان ماتریس هسیان، بررسی شود. همچنین می‌توان با استفاده از ترمودینامیک هندسی به مطالعه پایداری این سیستم پرداخت. از سوی دیگر بررسی مدهای شبه‌نرمال و پایداری دینامیکی جواب‌های به دست آمده جالب توجه خواهد بود.

مرجع‌ها

[1] A. Codello, R. Percacci, C. Rahmede, Ultraviolet properties of $f(R)$ -gravity, *International Journal of Modern Physics A* **23** (2008) 143.

<https://doi.org/10.1142/S0217751X08038135>

[2] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, S. Zerbini, One-loop $f(R)$ gravity in de Sitter universe, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **05** (2005) 010.

<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2005/02/010>

[3] J.Q. Guo, A.V. Frolov, Cosmological dynamics in $f(R)$ gravity, *Physical Review D* **88** (2013) 124036.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.124036>

[4] M. Zhang, Interior volume of Banados-Teitelboim-Zanelli black hole, *General Relativity Gravitation* **51** (2019) 13.

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.01.032>

[5] D.A. Gomes, R.V. Maluf, C.A.S. Almeida, Thermodynamics of Schwarzschild-like black

- solutions in $F(R)$ gravity, *European Physical Journal C* **79** (2019) 472.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6972-4>
- [27] G. Gibbons, R. Kallosh, B. Kol, Moduli, scalar charges, and the first law of black hole thermodynamics, *Physical Review Letters* **77** (1996) 4992.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.4992>
- [28] J.D. Brown, C. Teitelboim, Dynamical neutralization of the cosmological constant, *Physics Letters B* **195** (1987) 177.
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91190-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91190-7)
- [29] M.M. Caldarelli, G. Cognola, D. Klemm, Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories, *Classical and Quantum Gravity* **17** (2000) 399.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/17/2/310>
- [30] S.H. Hendi, S. Panahiyan, R. Mamasani, Thermodynamic stability of charged BTZ black holes: Ensemble dependency problem and its solution, *General Relativity Gravitation* **47** (2015) 91.
<https://doi.org/10.1007/s10714-015-1932-2>
- [31] D. Kubiznak, R.B. Mann, P-V criticality of charged AdS black holes, *Journal of High Energy Physics* **07** (2012) 033.
[https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2012\)033](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2012)033)
- [16] M. Calza, M. Rinaldi, L. Sebastiani, A special class of solutions in $F(R)$ -gravity, *European Physical Journal C* **178** (2018) 78.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5681-8>
- [17] H.J. Schmidt, Comparing selfinteracting scalar fields and $R + R^3$ cosmological models, *Astronomische Nachrichten (Astronomical Notes)* **308** (1987) 183.
<https://doi.org/10.1002/asna.2113080309>
- [18] A.D. Dolgov, M. Kawasaki, Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? *Physics Letters B* **573** (2003) 1.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.08.039>
- [19] S. Nojiri, S.D. Odintsov, Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration, *Physical Review D* **68** (2003) 123512.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.123512>
- [20] V. Faraoni, Matter instability in modified gravity, *Physical Review D* **74** (2006) 104017.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.104017>
- [21] V. Faraoni, Viability criterion for modified gravity with an extra force, *Physical Review D* **76** (2007) 127501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.127501>
- [22] O. Bertolami, M.C. Sequeira, Energy conditions and stability in $f(R)$ theories of gravity with nonminimal coupling to matter, *Physical Review D* **79** (2009) 104010.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.104010>
- [23] S.H. Hendi, R.B. Mann, N. Riazi, B. Eslam Panah, Eguchi-Hanson-like space-times in $F(R)$ gravity, *Physical Review D* **86** (2012) 104034.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.104034>
- [24] S.H. Hendi, The relation between $F(R)$ gravity and Einstein-conformally invariant Maxwell source, *Physics Letters B* **690** (2010) 220.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.05.035>
- [25] S.H. Hendi, A. Dehghani, Thermodynamics of third order Lovelock adS black holes in the presence of Born-Infeld type nonlinear electrodynamics, *Physical Review D* **91** (2015) 064045.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.064045>
- [26] S.H. Hendi, R. Ramezani-Arani, E. Rahimi, Thermal stability of a special class of black holes