Measurement of weak values for all powers of an observable

Elahe Nahvifard*

Department of Physics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Received: 24.08.2018 Final revised: 18.07.2020 Accepted: 21.09.2020
Doi link: 10.22055/JRMBS.2020.15920

Abstract
Weak values of an observable can be found using weak measurements with pre- and post selections for target states. For example, when weak values are small, the expectation value of the pointer position (momentum) shows a shift proportional to the real (imaginary) part of the weak value. In this paper, we introduce the foundations of a new method for obtaining weak values that need not the weakness of the measurement. Using this method, not only the weak values of an observable but also weak values of all powers of the observable can be determined. The key point in this method is that instead of conditional expectation values of the device position and momentum in the standard method we use a complete set of marginal distributions to reconstruct device quantum state.

Keywords: Weak measurement, Weak values, State tomography

* Corresponding Author: Nahvifard@sci.ikiu.ac.ir

اندازه‌گیری مقادیر ضعیف برای توان‌های یک مشاهده‌پذیر

الهه نحوی‌فرد *

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

دریافت: 1397/06/02 ویرایش نهائی: 1399/04/28 پذیرش: 1399/06/31

Doi link: 10.22055/JRMBS.2020.15920

چکیده

مقادیر ضعیف یک مشاهده‌پذیر می‌توانند با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با پیش و پس‌گزینش‌گری حالت برای سامانه هدف به‌دست آیند. مثلاً، وقتی مقادیر ضعیف کوچک باشند، چشم‌داشتی مکان (تکانه) ابزار، یک جابه‌جایی متناسب با جزء حقیقی (موهومی) مقدار ضعیف را نمایش می‌دهد. در این مقاله، مبانی روش جدیدی برای به‌دست آوردن مقادیر ضعیف ارائه می‌گردد که الزاماً نیازی به ضعیف بودن اندازه‌گیری ندارد. با استفاده از این روش نه تنها مقدار ضعیف یک مشاهده‌پذیر بلکه مقادیر ضعیف همه توان‌های آن نیز قابل محاسبه هستند. نکتهٔ کلیدی در این روش استفاده از اندازه‌گیری یک مجموعهٔ کامل از توزیع‌های حاشیه‌ای برای بازسازی حالت ابزار به‌جای مقادیر چشمداشتی مشروط مختصه و تکانه ابزار در روش متعارف است.

کلیدواژگان: اندازه‌گیری ضعیف، مقادیر ضعیف، توموگرافی حالت

مقدمه

نخستین توصیف کاملاً کوآنتومی از فرآیند اندازه‌گیری در بخش آخر کتاب معروف فون نیومن معرفی شده‌است [1]. در این توصیف هم سامانه هدف و هم ابزار اندازه‌گیری، سامانه‌های کوآنتومی در نظر گرفته می‌شوند. بنا بر ایده‌های اولیهٔ اندازه‌گیری کوآنتومی، فرض می‌شد ابزار اندازه‌گیری هم قبل و هم بعد از اندازه‌گیری در حالت‌های شبه‌کلاسیک، یعنی حالت‌هایی با توزیع نسبتاً جایگزیده برای مختصه و تکانه ابزار، قرار داشته‌باشد. انگیزه این انتخاب شاید این بود که قرارگرفتن ابزار در حالت ترکیب همدوس از چند حالت شبه‌کلاسیک متمایز ناممکن می‌نمود. نتیجه چنین اندازه‌گیری، که گاه اندازه‌گیری قوی نامیده می‌شود، قرائت تصادفی ویژه‌مقادیر کمیت مورد اندازه‌گیری برای سامانه هدف و آشکار شدن فراوانی نسبی آنها است. بنابراین اگر حالت سامانه هدف درست قبل از اندازه‌گیری قوی مشاهده‌پذیر S بردار بهنجار $|\psi_{\mathrm{i}}\rangle$ باشد از نتایج یک اندازه‌گیری قوی می‌توان چشم‌داشت $\langle \hat{S} \rangle = \langle \psi_{\mathrm{i}} | \hat{S} | \psi_{\mathrm{i}} \rangle$ را به‌دست آورد.

در مرحلهٔ بعد، ایدهٔ اندازه‌گیری قوی فون نویمن به‌وسیلهٔ آهارونوف، آلبرت، و وایدمن تعمیم داده‌شد [2]. آنها فرض جایگزیدگی توزیع برای مختصهٔ ابزار در حالت اولیهٔ آن را کنار گذاشتند. به‌طور وارون، توزیع تکانهٔ ابزار جایگزیده در نظر گرفته شد و در نتیجه مثلاً تابع موج ابزار در فضای مختصات یک توزیع مکانی نسبتاً پهن را نمایش می‌داد. قرائت چنین ابزاری لزوماً به‌ویژه مقادیر کمیت مورد اندازه‌گیری سامانه هدف منجر نمی‌شود اگرچه مقدار چشمداشتی $\langle \hat{S} \rangle$ هنوز به‌درستی به‌دست می‌آید. اندازه‌گیری ضعیف از زمان

* نویسنده مسئول: nahvifard@sci.ikiu.ac.ir

طرح اولیه به‌انگیزه‌های زیادی مورد توجه قرارگرفته‌است. نشان داده‌شده که اندازه‌گیری ضعیف تصویرگر نیست یعنی حالت کوآنتومی هدف را تغییر نمی‌دهد [3]. همچنین وقتی اندازه‌گیری ضعیف با یک اندازه‌گیری قوی گزینشگر دیگر بر روی سامانه هدف ترکیب شود ویژگی‌های کوآنتومی و کاملاً غیرکلاسیک منحصر به‌فردی را به نمایش می‌گذارد [4,5]. اگر قرائت ابزار، مشروط به یافتن هدف در یک حالت کوآنتومی پسین $\langle\psi_{\rm f}|$ باشد از تابع توزیع مشروط مختصهٔ ابزار می‌توان مقدار ضعیف یک مشاهده‌پذیر را به‌دست آورد [3]. در اینجا مقدار ضعیف یک مشاهده‌پذیر یک کمیت مختلط است و با رابطهٔ $\langle\hat{s}\rangle_{\rm w}=\langle\psi_{\rm f}|\psi_{\rm i}\rangle^{-1}\langle\psi_{\rm f}|\hat{s}|\psi_{\rm i}\rangle$ تعریف می‌شود. بنابراین، اندازه‌گیری ضعیف پس گزینشی ما را قادر می‌سازد عناصر ماتریسی یک عملگر را اندازه‌گیری کنیم. وقتی $\langle\psi_{\rm f}|\psi_{\rm i}\rangle\approx 0$ مقادیر ضعیف می‌توانند بسیار بزرگ باشند و این می‌تواند روشی برای تقویت سیگنال‌های ضعیف باشد [6].

رابطهٔ بین جزء حقیقی و موهومی مقدار ضعیف با داده‌های قابل اندازه‌گیری ابزار با تقریب‌های خاصی به‌دست آمده‌است. اگرچه این رابطه به‌طور مفصل در مقالات تحلیل شده‌است [7-9] ولی به‌جز در حالت‌های تقریبی، رابطهٔ ساده‌ای وجود ندارد. هدف ما در این مقاله این است که موضوع را از جنبهٔ جدیدی بررسی کنیم. ما به‌جای استفاده از چشمداشتی‌های یک یا چند مشاهده‌پذیر سامانهٔ ابزار به کلاس کاملی از مشاهده‌پذیرهای آن توجه می‌کنیم که بازسازی حالت ابزار، در اندازه‌گیری ضعیف با پس گزینشگری $\langle\psi_{\rm f}|$ برای سامانهٔ هدف، را امکان‌پذیر کند. این بار در واقع این حالت سامانه هدف است که مقادیر ضعیف از آن محاسبه می‌شوند. از این نظر، این کار شبیه مراجع [10,11] است با این تفاوت که ابزار لزوماً یک کیوبیت نیست و ضمناً نیازی به تکرار اندازه‌گیری با مقادیر متفاوت ضریب برهم کنش سامانه–ابزار هم نیست. برای سادگی بحث را تنها به وضعیتی که حالت‌های اولیهٔ سامانهٔ هدف و ابزار خالص هستند محدود می‌کنیم.

اندازه‌گیری کوآنتومی

برای اندازه‌گیری یک مشاهده‌پذیر سامانه هدف، مانند s، آن را با سامانهٔ دیگری، که ابزار اندازه‌گیری یا نشانگر نامیده می‌شود، در کنش متقابل قرار می‌دهیم. در اینجا فرض کنید ابزار یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی با مختصه و تکانهٔ $\hat{P},\hat{X}$ باشد و مطابق مدل فون نیومن هامیلتونی برهم کنش به فرم پالسی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{H}=\varepsilon\delta(t)\hat{s}\otimes\hat{P}. \qquad 1$$

برحسب مدل فون نیومن [1] ابزار در یک حالت شبه کلاسیک اولیه $\langle\varphi_{\rm i}|$، مثلاً حالت پایهٔ نوسانگر با تابع موج گاُوسی و پاشندگی بسیار کوچک σ_X، قرار دارد. درست بعد از برهم‌کنش پالسی مذکور، سامانهٔ مرکب هدف و ابزار حالتی درهم‌تنیده خواهدداشت

$$|\Psi_{\rm f}\rangle=e^{-i(\varepsilon/\hbar)\hat{s}\otimes\hat{P}}|\psi_{\rm i}\rangle|\varphi_{\rm i}\rangle, \qquad 2$$

که در آن $\langle\psi_{\rm i}|$ حالت اولیهٔ سامانهٔ هدف، درست قبل از اندازه‌گیری، است. اگر $\langle\psi_{\rm i}|$ را برحسب ویژه‌پایهٔ راست هنجار مشاهده‌پذیر مورد اندازه‌گیری بسط دهیم، $|\psi_{\rm i}\rangle=\sum_j c_j|s_j\rangle$، آنگاه معلوم می‌شود که عملگر چگالی کاهش یافتهٔ ابزار، متناظر با یک ترکیب آماری از حالت‌های اولیه انتقال‌یافته آن است:

$$\rho'_{\rm d}=\sum_j|c_j|^2 e^{-i(\varepsilon s_j/\hbar)\hat{P}}|\varphi_{\rm i}\rangle\langle\varphi_{\rm i}|e^{+i(\varepsilon s_j/\hbar)\hat{P}}. \qquad 3$$

توزیع مختصهٔ نشانگر نیز به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\Pr'(X) = \sum_j |c_j|^2 |\varphi_\mathrm{i}(X - \varepsilon s_j)|^2. \qquad 4$$

در حد اندازه‌گیری قوی $\varepsilon\Delta s \gg \hbar\sigma_X$، حالت اولیهٔ ابزار توزیع مکان به‌قدر کافی جایگزیده $|\varphi_\mathrm{i}(X)|^2$ را دارد و قله‌های هر دو جمله متوالی در جمع بالا به‌خوبی از یکدیگر متمایزند. بنابراین عملاً هر قرائت ابزار، تنها به‌یکی از ویژه‌مقادیر مشاهده‌پذیر S منتهی می‌شود. وقتی حالت اولیهٔ سامانهٔ هدف یکی از ویژه حالت‌های مشاهده‌پذیر S است عملاً تنها ویژه‌مقدار متناظر با آن به‌طور قطعی به‌دست خواهدآمد و شرط اندازه‌گیری قوی، ویژگی توزیع تصادفی نتیجهٔ اندازه‌گیری را پنهان می‌کند [1].

اندازه‌گیری ضعیف

اندازه‌گیری ضعیف، به‌عنوان تعمیم اندازه‌گیری فون نویمن، نخست در مرجع [2] معرفی شد. در نظام اندازه‌گیری ضعیف $\varepsilon\Delta s \ll \hbar\sigma_X$، حالت اولیه ابزار چنان اختیار می‌شود که توزیع بسیار پهنی برای مختصهٔ خود داشته باشد. به‌این ترتیب، جملات مختلف در معادلهٔ 4 هم‌پوشانی خواهند داشت و نتیجهٔ قرائت ابزار، منحصر به‌ویژه مقادیر نخواهدبود. با این وجود هنوز چشمداشتی $\langle \hat{s} \rangle$ به‌درستی از توزیع احتمال $\Pr'(X)$ قابل محاسبه است. یک وضعیت جالب در اندازه‌گیری ضعیف، گزینش یک حالت پسین $\langle\psi_\mathrm{f}|$ برای سامانه هدف است. در اندازه‌گیری ضعیف پس گزینشی، ابزار به‌طور مشروط قرائت می‌شود یعنی اینکه بعد از فرایند اندازه‌گیری ضعیف یک اندازه‌گیری قوی تصویرگر $|\psi_\mathrm{f}\rangle\langle\psi_\mathrm{f}|$ بر روی هدف انجام می‌شود و به‌شرط پیدا شدن هدف در حالت $\langle\psi_\mathrm{f}|$ قرائت ابزار انجام می‌گیرد. از دیدگاه فیزیک کلاسیک چون برهم کنش اندازه گیری ضعیف آنی است پس داده‌های ابزار از قبل تحقق فیزیکی پیدا کرده‌اند و ظاهراً ما بخشی از داده‌های اندازه‌گیری ضعیف را قرائت کرده و بقیه را دور ریخته‌ایم. اگر تابع توزیع مشروط مورد بحث برای مختصه ابزار را با $\Pr''(X)$ نشان دهیم مطابق مکانیک کوآنتومی، به‌خاطر وجود پدیده درهم تنیدگی حالت‌های سامانه‌های هدف و ابزار، با هیچ غربالگری داده‌های اولیه از توزیع احتمال $\Pr'(X)$ نمی‌توان به $\Pr''(X)$ رسید [4]. در واقع با توجه به رابطهٔ 2 در صورت پس گزینش‌گری، حالت سامانه مرکب با بردار حالت حاصل‌ضربی زیر معین می‌شود:

$$\begin{aligned} |\Psi_\mathrm{f}\rangle &\propto |\psi_\mathrm{f}\rangle\langle\psi_\mathrm{f}|e^{-i(\varepsilon/\hbar)\hat{s}\otimes\hat{P}}|\psi_\mathrm{i}\rangle|\varphi_\mathrm{i}\rangle \\ &= N\,|\psi_\mathrm{f}\rangle\hat{T}\,|\varphi_\mathrm{i}\rangle. \end{aligned} \qquad 5$$

همان‌طور که می‌بینیم این بار برخلاف 3 ابزار در حالت خالص $|\varphi_\mathrm{f}\rangle = \hat{T}|\varphi_\mathrm{i}\rangle$ است. در اینجا عملگر $\hat{T}$ برابر است با

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \langle\psi_\mathrm{f}|e^{-i(\varepsilon/\hbar)\hat{s}\otimes\hat{P}}|\psi_\mathrm{i}\rangle, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-i\varepsilon}{\hbar}\right)^k \langle\psi_\mathrm{f}|\hat{s}^k|\psi_\mathrm{i}\rangle\hat{P}^k. \end{aligned} \qquad 6$$

با توجه به‌حالت اولیهٔ ابزار در اندازه‌گیری ضعیف می‌توان فرض کرد تکانهٔ ابزار در حالت اولیه حول صفر دارای یک توزیع به‌قدر کافی جای‌گزیده است و با استفاده از این تقریب می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{T} &\approx 1 + \left(\frac{-i\varepsilon}{\hbar}\right)\langle\psi_\mathrm{f}|\hat{s}|\psi_\mathrm{i}\rangle\hat{P}, \\ &\approx \langle\psi_\mathrm{f}|\psi_\mathrm{i}\rangle e^{\frac{-i\varepsilon}{\hbar}\langle\hat{s}\rangle_w\hat{P}}, \end{aligned} \qquad 7$$

که در آن مقدار ضعیف مشاهده‌پذیر سامانه هدف که متناسب با عنصر ماتریسی آن بین حالت‌های پیش و پس گزینشی است با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \hat{s} \rangle_{\mathrm{w}} \equiv \frac{\langle \psi_{\mathrm{f}} | \hat{s} | \psi_{\mathrm{i}} \rangle}{\langle \psi_{\mathrm{f}} | \psi_{\mathrm{i}} \rangle}. \qquad 8$$

در تقریب فوق در صورت قرائت ابزار بعد از پس گزینش‌گری، توزیع زیر برای مختصهٔ ابزار به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\langle X | \varphi_{\mathrm{f}} \rangle|^2 &= \mathrm{Pr}''(X), \\ &\approx |\langle X - \varepsilon \langle \hat{s} \rangle_{\mathrm{w}} | \varphi_{\mathrm{i}} \rangle|^2. \end{aligned} \qquad 9$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد چشمداشتی $\langle X \rangle''$، که با استفاده از تابع توزیع $\mathrm{Pr}''(X)$ محاسبه شده، یک جابه‌جایی متناسب با مقدار ضعیف $\langle \hat{s} \rangle_{\mathrm{w}}$ نسبت به مقدار همان چشمداشتی، قبل از اندازه‌گیری ضعیف نشان می‌دهد. بنابراین مقدار ضعیف به‌این روش قابل اندازه‌گیری است. هدف از مرور مطالب بالا در این بخش روشن شدن نکات زیر است. نخست آنکه محاسبات ریاضی که مقدار ضعیف را به جابه‌جایی چشمداشتی در تابع توزیع مختصه ابزار مربوط می‌کند تقریبی هستند. البته محاسبات دقیقتری در مورد این جابه‌جایی انجام شده‌است [8,9] ولی از آنها به‌جز در حالت‌های حدی نمی‌توان مقدار ضعیف را محاسبه کرد. دوم آنکه آنچه در اندازه‌گیری ضعیف پس گزینشی، به‌دست می‌آید در واقع یک تابع توزیع است اگرچه معمولاً تنها به یکی از ویژگی‌های آماری آن، یعنی چشم‌داشتی، توجه می‌شود. سوم اینکه اگر $\langle \hat{s} \rangle_{\mathrm{w}}$ کمیتی حقیقی نباشد برای به‌دست آوردن جزء موهومی آن وادار می‌شویم به‌جزء توزیع مختصه ابزار، توزیع مشاهده‌پذیرهای دیگر آن را نیز اندازه‌گیری کنیم [7]. نکتهٔ آخر اینکه برای اندازه‌گیری مقدار ضعیف هر توان $\langle \hat{s}^k \rangle_{\mathrm{w}}$ نیاز به هامیلتونی برهم‌کنشی جدیدی در اندازه‌گیری ضعیف است که تحقق فیزیکی آن کار ساده‌ای نخواهدبود. در بخش‌های بعدی مقاله این ایده اساسی را دنبال می‌کنیم که مقدار ضعیف را از روی همهٔ مشخصات آماری توابع توزیع محاسبه کنیم. این کار نه تنها دقت نتایج را بالا می‌برد بلکه نتایج قابل توجه‌تری هم دارد.

توموگرام کوآنتومی حالت

یک مجموعهٔ کمینه از توابع توزیع حاشیه‌ای[1] برای مشاهده‌پذیرهای سامانهٔ کوآنتومی که به‌طور یگانه‌ای حالت کوآنتومی را معین کند توموگرام حالت نامیده می‌شود. در اینجا متناسب با بحث، مبانی یک نمایش توموگرافیک برای حالت نوسانگر هارمونیک (که در مدل ما ابزار اندازه‌گیری است) را مرور می‌کنیم. فرض کنیم نوسانگر دارای جرم m و فرکانس طبیعی ω بوده و عملگرهای کانونیک مکان و تکانه آن $\hat{P}, \hat{X}$ باشند. کلاسی از عملگرهای بی‌بعد به شکل:

$$\hat{\xi}_{\mu,\nu} = \mu \hat{q} + \nu \hat{p}, \quad \hat{q} = \kappa \hat{X}, \; \hat{p} = \hat{P} / \hbar\kappa, \qquad 10$$

که در آن $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ هستند و $\kappa = \sqrt{m\omega/\hbar}$ را تعریف می‌کنیم. اگر حالت کوآنتومی با عملگر چگالی $\hat{\rho}$ معین شده‌باشد توموگرام کوآنتومی آن را به‌عنوان کلاس همهٔ توابع توزیع احتمال برای طیف همه عملگرهای $\hat{\xi}_{\mu,\nu}$ تعریف می‌کنیم [12,13]. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} w(\xi;\mu,\nu) &\equiv \mathrm{Tr}\left\{ \delta\left(\xi - \hat{\xi}_{\mu,\nu} \right) \hat{\rho} \right\}, \\ &= {}_{\mu,\nu}\langle \xi | \hat{\rho} | \xi \rangle_{\mu,\nu}. \end{aligned} \qquad 11$$

در اینجا هر کت بردار $|\xi\rangle_{\mu,\nu}$ ویژه‌بردار عملگر $\hat{\xi}_{\mu,\nu}$ متناظر با ویژه‌مقدار ξ است. نمایش توموگرافیک حالت $w(\xi;\mu,\nu)$ تابعی حقیقی و مثبت است که نسبت به ξ بهنجار است. $w(\xi;1,0)$ همان تابع توزیع چگالی احتمال مکان بی‌بعد و $w(\xi;1,0)$ تابع توزیع چگالی احتمال تکانه بی‌بعد در حالت $\hat{\rho}$ است.

[1] Marginal distribution

نکته مهم در نمایش توموگرافیک امکان بازسازی عملگر چگالی از آن است. در واقع اگر $\mu = \cos\theta$ و $\nu = \sin\theta$ این نمایش، همان توموگرام اپتیکی حالت است که به‌طور متداول در اپتیک کوآنتومی با استفاده از چیدمان اندازه‌گیری هموداین برای میدان تابشی سیگنال قابل اندازه‌گیری است [14]. می‌توان نشان داد که عملگر چگالی با رابطه زیر از توموگرام حالت قابل محاسبه است [12,13]:

$$\hat{\rho} = \int d\xi d\mu d\nu e^{i(\xi - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})} w(\xi;\mu,\nu). \qquad 12$$

بنابراین عناصر ماتریسی عملگر چگالی بر پایه مکان $\langle X'|\hat{\rho}|X''\rangle$ با رابطهٔ زیر به توموگرام حالت مربوط می‌شود:

$$\langle X|\hat{\rho}|X'\rangle = \int d\xi d\mu d\nu e^{i\xi} \langle X|e^{-i(\mu\hat{q}+\nu\hat{p})}|X'\rangle w(\xi;\mu,\nu). \qquad 13$$

اگر حالت کوآنتومی یک حالت خالص باشد آنگاه با انتخاب یک X' دلخواه می‌توان تابع موج بر پایهٔ مکان را با رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\varphi(X) = \frac{\rho(X,X')}{\sqrt{\rho(X',X')}}, \qquad \rho(X',X') \neq 0. \qquad 14$$

به‌این ترتیب با استفاده از دو رابطهٔ آخر می‌توان تابع موج را برحسب توموگرام حالت، که خود قابل اندازه‌گیری است، بیان کرد:

$$\varphi(X) = \frac{\kappa}{\sqrt{\rho(X',X')}} \int d\xi d\mu \times \exp\left[i\left(\xi - \frac{\mu}{2}\kappa(X+X')\right)\right] \times w(\xi;\mu,\kappa(X-X')) \qquad 15$$

هدف از این بخش نشان دادن این نکته بود که نهایتاً هر عبارت شامل تابع موج برحسب توموگرام حالت قابل بیان است.

اندازه‌گیری مقادیر ضعیف با استفاده از توموگرام حالت کوآنتومی ابزار

در طرح اولیهٔ اندازه‌گیری ضعیف، کمیت اساسی مقدار ضعیف $\langle\hat{s}\rangle_w$ است که به‌عنوان مقدار انتقال در چشم‌داشتی مختصه ابزار، قابل اندازه‌گیری است. تأکید بیش از حد روی این روش باعث فراموشی نکات عمیق‌تری شده‌است. چشم‌داشتی برای توزیع احتمال تنها یکی از ویژگی‌های آماری آن است. خود توزیع احتمال برای متغیر ابزار، یا در حالت کلی‌تر یک مجموعه به‌اندازهٔ کافی بزرگ از توزیع‌های مربوط به ابزار، هم می‌تواند جالب باشد. بنابراین در اینجا به توموگرام حالت کوآنتومی ابزار توجه می‌کنیم. خواهیم دید که توموگرام مشروط حالت، حامل اطلاعات مفیدتری است. فرض کنیم در اندازه‌گیری ضعیف مشاهده‌پذیر S سامانه هدف، حالت‌های پیش گزینشی و پس گزینشی $|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle$ باشند. اگر ابزار مثلاً یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی در حالت گاوسی پایه $|\varphi_i\rangle$ باشد با استفاده از بسط تابع نمایی در رابطهٔ 5 می‌توان رابطهٔ زیر را برای حالت نهایی ابزار به‌دست آورد:

$$|\varphi_f\rangle \propto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-i\varepsilon}{\hbar}\right)^k \langle\psi_f|\hat{s}^k|\psi_i\rangle \hat{P}^k |\varphi_i\rangle, \equiv N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-i\varepsilon}{\hbar}\right)^k \langle\hat{s}^k\rangle_w \hat{P}^k |\varphi_i\rangle. \qquad 16$$

در اینجا برای سادگی فرض می‌کنیم $\langle\psi_f|\psi_i\rangle \neq 0$ باشد. رابطهٔ بالا یک تعبیر جدید از دنبالهٔ مقادیر ضعیف

$\left\{\left\langle \hat{s}^k \right\rangle_{\mathrm{w}}\right\}_{k=0}^{\infty}$ ارائه می‌دهد. مقدار ضعیف $\left\langle \hat{s}^k \right\rangle_{\mathrm{w}}$ در واقع ضریب بسط حالت نهایی $\langle\varphi_{\mathrm{f}}|$ بر پایه، احتمالاً غیر راست هنجار، زیر است:

$$\frac{N}{k!}\left(\frac{-i\varepsilon}{\hbar}\right)^k \hat{P}^k|\varphi_{\mathrm{i}}\rangle, \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{17}$$

بنابراین هر کلاس از اندازه‌گیری‌ها که به بازسازی بردار حالت نهایی ابزار منجر شود در واقع نه تنها مقدار ضعیف $\langle\hat{s}\rangle_{\mathrm{w}}$ بلکه مقادیر ضعیف همه توان‌های $\left\langle \hat{s}^k \right\rangle_{\mathrm{w}}$ را نیز معین می‌کند. یک نمایش توموگرافیک از حالت کوآنتومی چنین کاری را برای ما انجام می‌دهد. ضمناً توجه کنید این فرایند الزاماً نیازی به ضعیف بودن اندازه‌گیری ندارد.

مورد سامانه هدف با بعد متناهی

ابتدا موردی را در نظر می‌گیریم که سامانه هدف دارای فضای هیلبرت با بعد متناهی n باشد. اگر s یک مشاهده‌پذیر سامانه هدف باشد آنگاه عملگر $\hat{s}$ در معادلهٔ مشخصه[2] خود صدق می‌کند:

$$c_n\hat{s}^n + c_{n-1}\hat{s}^{n-1} + c_1\hat{s} + c_\circ = 0, \quad c_n \neq 0. \tag{18}$$

بنابراین معادلهٔ 18 برای $n+1$ مقدار ضعیف متوالی زیر هم صادق است:

$$c_n\left\langle \hat{s}^{N+n} \right\rangle_{\mathrm{w}} + c_{n-1}\left\langle \hat{s}^{N+n-1} \right\rangle_{\mathrm{w}} + \cdots + c_1\left\langle \hat{s}^{N+1} \right\rangle_{\mathrm{w}} + c_\circ\left\langle \hat{s}^{N} \right\rangle_{\mathrm{w}} = 0. \tag{19}$$

از اینجا آشکار می‌شود که همهٔ گشتاورهای ضعیف باید توابعی خطی از $\left\{\left\langle \hat{s}^k \right\rangle_{\mathrm{w}}\right\}_{k=0}^{n-1}$ باشند، یعنی:

$$\left\langle \hat{s}^k \right\rangle_{\mathrm{w}} = e_0^k + e_1^k\langle\hat{s}\rangle_{\mathrm{w}} + e_2^k\left\langle \hat{s}^2 \right\rangle_{\mathrm{w}} + \cdots + e_{n-1}^k\left\langle \hat{s}^{n-1} \right\rangle_{\mathrm{w}}. \tag{20}$$

ثابت‌های $e_j^k,\quad 0\le j\le n-1$ را می‌توان مؤلفه‌های بردارهای مختلط $\vec{e}^{\,k}$ در نظر گرفت. آشکارا

$$e_j^k = \delta_{j,k} \qquad 0\le k\le n-1. \tag{21}$$

پس $\vec{e}^{\,0},\cdots\vec{e}^{\,n-1}$ یک پایهٔ راست هنجار می‌سازند و بقیه بردارهای $\vec{e}^{\,n},\cdots$ ترکیبات خطی از آنها هستند. اکنون با استفاده از 16 در پایهٔ مکان برای ابزار می‌توان نوشت:

$$\varphi_{\mathrm{f}}(X) = N\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\varepsilon)^k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{n-1}e_j^k\left\langle \hat{s}^j \right\rangle_{\mathrm{w}}\right)\partial_X^k\varphi_{\mathrm{i}}(X), \equiv \sum_{j=0}^{n-1}\left\langle \hat{s}^j \right\rangle_w\theta_j(X). \tag{22}$$

در رابطهٔ بالا بنابر تعریف داریم:

$$\theta_j(X) \equiv N\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\varepsilon)^k}{k!}e_j^k\,\partial_X^k\varphi_{\mathrm{i}}(X), \quad 0\le j\le n-1. \tag{23}$$

و آشکارا تابع موج حالت نهایی به یک فضای خطی n بعدی محدود شده‌است. با توجه به راست هنجاری $\vec{e}^{\,0},\cdots\vec{e}^{\,n-1}$ می‌توان نشان داد که توابع موج $\left\{\theta_j(X)\right\}_{j=0}^{n-1}$، اگرچه ممکن است راست هنجار نباشند، دارای استقلال خطی هستند. بنابراین می‌توان نظیر پایهٔ $\left\{\theta_j(X)\right\}_{j=0}^{n-1}$ یک پایهٔ دوگان مانند $\left\{\omega_j(X)\right\}$ معین کرد

---

[2] Characteristic relation

$$\int dX \omega_j^* (X) \theta_k (X) = \delta_{j,k},\quad j,k = 0,1,2,\cdots,(n-1). \qquad 24$$

با بازسازی بردار حالت نهایی ابزار، به‌وسیلۀ اندازه‌گیری توموگرافیک مشروط به‌حالت پس گزینشی، مقادیر ضعیف مورد جستجو به‌شکل زیر قابل محاسبه هستند:

$$\langle \hat{s}^j \rangle_{\mathrm{w}} = \int dX \omega_j^* (X) \varphi_{\mathrm{f}} (X),\quad j = 0,1,2,\cdots,(n-1). \qquad 25$$

تمام انتگرال‌های بالا نهایتاً برحسب توموگرام حالت نهایی ابزار قابل بیان هستند بنابراین اندازه‌گیری توموگرام مشروط حالت ابزار به‌اندازه‌گیری تمام مقادیر ضعیف $\left\{ \langle \hat{s}^k \rangle_w \right\}_{k=0}^{n-1}$ منجر می‌شود.

مورد سامانه هدف با بعد نامتناهی

در حالت ویژه‌ای که سامانه هدف دارای فضای حالت با بعد نامتناهی است با توجه به 21 رابطۀ 23 به‌شکل زیر ساده می‌شود:

$$\theta_j (X) = N \frac{(-\varepsilon)^j}{j!} \partial_X^j \varphi_{\mathrm{i}} (X). \qquad 26$$

فرض کنید تابع موج اولیه ابزار به‌شکل گاُوسی $\varphi_{\mathrm{i}} (X) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{\sigma}} e^{-X^2/4\sigma^2}$ باشد آنگاه با استفاده از اتحاد:

$$H_n (x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}, \qquad 27$$

تابع موج حالت نهایی ابزار به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\varphi_{\mathrm{f}} (X) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N}{k!} \left(\frac{\varepsilon}{2\sigma} \right)^k \langle \hat{s}^k \rangle_{\mathrm{w}} e^{-X^2/4\sigma^2} H_k (X/2\sigma). \qquad 28$$

در این مثال معین کردن پایۀ دوگان با استفاده از رابطۀ تعامد چند جمله‌ای‌های هرمیت، یعنی

$$\int e^{-x^2} H_m (x) H_n (x) dx = \sqrt{\pi}\, 2^n n! \delta_{m,n}, \qquad 29$$

انجام می‌گیرد. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\omega_j (X) \propto \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^{\ell} H_{\ell} (X/2\sigma), \qquad 30$$

و از آنجا نتیجه مورد جستجوی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\langle \hat{s}^{\ell} \rangle_{\mathrm{w}} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^{\ell} \frac{\int dX \varphi_{\mathrm{f}} (X) H_{\ell} (X/2\sigma)}{\int dX \varphi_{\mathrm{f}} (X)}. \qquad 31$$

در اینجا هم $\varphi_{\mathrm{f}} (X)$ از توموگرام مشروط ابزار با 15 محاسبه می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

به‌طور متعارف انتظار داریم یک روش اندازه‌گیری، از یک ابزار در حالت شبه کلاسیک استفاده کند و آنچه اندازه گرفته می‌شود چیزی شبیه جابه‌جایی چشم‌داشتی مختصۀ ابزار باشد. در اندازه‌گیری قوی عموماً مقدار این جابه‌جایی تصادفی ولی منحصر به‌ویژه مقادیر مشاهده‌پذیر مورد اندازه‌گیری است. در اندازه‌گیری ضعیف در واقع آنچه به‌دست می‌آید یک تابع توزیع چگالی احتمال است اگرچه اغلب ما به چشمداشتی آن توجه می‌کنیم. چگونگی استخراج مقادیر ضعیف از داده‌های تجربی می‌تواند منجر به‌طرح بی‌شمار مسئله در حوزۀ مکانیک کوآنتومی شود [15]. در این مقاله، روشی برای محاسبۀ مقادیر ضعیف از توموگرام مشروط

حالت ابزار معرفی شده‌است که بنابر آن، آنچه از سامانه ابزار به‌دست می‌آوریم کلاسی از توابع توزیع چگالی احتمال است که، صرف نظر از یک ثابت فاز، بردار حالت سامانه ابزار را معین می‌کند و نهایتاً ما را قادر می‌سازد، برای سامانهٔ هدف، مقادیر ضعیف همه توان‌های طبیعی یک مشاهده پذیر را محاسبه کنیم. این در حالی است که در روش متداول، برای اندازه‌گیری مقدار ضعیف هر توان مشاهده پذیر سامانهٔ هدف نیاز به هامیلتونی برهم کنشی جداگانه‌ای داریم و عموماً پیدا کردن چیدمان‌های آزمایشگاهی که چنین برهم‌کنش هایی را فراهم کنند دشوار است.

مرجع‌ها

[1] J. Von Neumann, *Mathematical foundation of quantum mechanics*, Oxford, (1955).

[2] Y. Aharonov, D.Z. Albert, L. Vaidman, How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-*1/2* particle can turn out to be 100, *Physical Review Letters* **60**. (1988) 1351-1354. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1351

[3] Y. Aharonov, D. Rohrlich, *Quantum paradoxes*, John Wiley,New York, (2004).

[4] L.M. Johansen, Non classicality in weak measurements, *Physcal Review A* **70** (2004) 052115-1- 052115-12.

https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.052115

[5] L.M. Johansen, Non classical properties of coherent states, *Physics Letters A* **329** (2004) 184-187. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.07.003

[6] O. Hoston, P. Kwait, Observation of the spin hall effect of light via weak measurements, *Science* **319** (2008) 787-790. https://doi.org/10.1126/science.1152697

[7] R. Jozsa, Compelex weak values in quantum measurement, *Physical Review A* **76** (2007) 044103. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.044103

[8] T. Geszti, Postselected weak measurement beyond the weak value, *Physical Review A* **81** (2010) 044102. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.044102

[9] S. Pang, S. Wu, Z. Chen, Weak measurement with orthogonal pre-selection and post selection, *Physical Review A* **86** (2012) 022112. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.022112

[10] Y. Kedem, L. Vaidman, Modular vlues and weak values of quantum observable, *Physical Review Letters* **105** (2010) 230401. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.230401

[11] K. Ogawa, O. Yasuhiko, H. Kobayashi, T. Nakanishi and A. Tomita, A framework for measuring weak values without weak interactions and its diagrammatic representation, *New Journal of Physics* **21** (2019) 043013. https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab07 73

[12] S. Mancini, V.I. Manko, P. Tombesi, Symplectic tomography as classical approach to quantum systems, *Physical Letters A* **213** (1996) 1-6. https://doi.org/10.1016/0375-9601(96) 00107-7

[13] S. Mancini, V.I. Manko, P. Tombesi, Classical-like description of quantum dynamics by means of symplectic tomography, *Foundation of Physics* **27** (1997) 801-824. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02550342

[14] U. Leonhardt, *Measuring the quantum state of light*, Cambridge university press, Cambridge, (1997).

[15] K. Ogawa, O. Yasuhiko, H. Kobayashi, T. Nakanishi and A. Tomita, A framework for measuring weak values without weak interactions and its diagrammatic representation, *New Journal of Physics* **21** (2019) 043013.
https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab0773