

Study of thermal entanglement teleportation via two qubits Heisenberg interaction in Jaynes-Cummings model

Reza Hamzehofi¹, Azita Naji^{*1}, Davood Afshar^{1,2}

¹Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

²Center for Research on Laser and Plasma, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 10.08.2019 Final revised: 10.08.2019 Accepted: 09.06.2020

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15923](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15923)

Abstract

In this paper, we study a system consisting of two two-level atoms under XXX and XYZ Heisenberg interaction coupled with an optical cavity. Calculating Hamiltonian of two-qubit Heisenberg interaction in the presence of electromagnetic field in Jaynes-Cummings model, we obtain the density matrix of the system by Gibbs equation in the thermal equilibrium. Assuming an arbitrary pure state as input state in the quantum channel, we obtain the output state for the system under the thermal equilibrium. It is observed that as the temperature increases the entanglement decreases until it reaches to zero and the fidelity decreases until it reaches to a steady value. Also, we have found that the assumed model is a suitable system for transmitting quantum information with high efficiency.

Keywords: Entanglement teleportation, Thermal teleportation, Jaynes-Cummings model, Thermal entanglement



مطالعه ترابرد درهم‌تنیدگی گرمایی از طریق دو کیوبیت با برهم‌کنش

هایزنبرگ در مدل جینز-کامینگز

رضا حمزه عوفی¹، آریتا ناجی^{1*}، داود افشار^{۱،۲}¹گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران²مرکز تحقیقات لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دریافت: 1398/05/19 ویرایش نهایی: 1399/03/20 پذیرش: 1399/06/31

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15923](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15923)

چکیده

در این مقاله، یک سیستم شامل دو اتم دو-ترازه را تحت برهم‌کنش هایزنبرگ مدل‌های XXX و XYZ در یک کاواک نوری را مطالعه می‌کنیم. با محاسبه هامیلتونی برهم‌کنش هایزنبرگ دو-کیوبیتی در حضور میدان الکترومغناطیسی در مدل جینز کامینگز، ماتریس چگالی سیستم در تعادل گرمایی را با استفاده از معادله گیبس به دست می‌آوریم. با انتخاب یک حالت خالص دلخواه به عنوان حالت ورودی به کانال کوآنتومی، حالت خروجی از کانال کوآنتومی تحت تعادل گرمایی را به دست می‌آوریم. مشاهده می‌شود که با افزایش دما، درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد تا به صفر برسد و وفاداری به یک مقدار ثابت کاهش می‌یابد. همچنین، نتیجه می‌گیریم که مدل فرض شده یک سیستم مناسب برای انتقال اطلاعات کوآنتومی با راندمان بالا می‌باشد.

کلیدواژه‌گان: ترابرد درهم‌تنیدگی، ترابرد گرمایی، مدل جینز-کامینگز، درهم‌تنیدگی گرمایی

مقدمه

این پدیده اولین بار توسط بنت در سال 1993 معرفی

شد و توسط دیک بومستر و همکاران در سال 1998 برای یک تک فوتون اجرا شد [3].

مدل جینز-کامینگز مدلی نظری برای مطالعه برهم‌کنش یک کیوبیت با میدان الکترومغناطیسی کوآنتیده در درون یک کاواک می‌باشد [4]. این مدل توسط ادوین جینز و فرد کامینگز در سال 1963، حین مطالعه آثار انتشار خود

ویژگی ناموضعیات مکانیک کوآنتومی، امکان پدیده بارزی به نام ترابرد کوآنتومی را فراهم می‌کند. در ترابرد کوآنتومی یک حالت نامعلوم کوآنتومی در محل فرستنده نابود می‌شود درحالی‌که حالت مشابه آن با کمک کانال کوآنتومی و کانال کلاسیک در مکان دورتر ظاهر می‌شود [1-2].

*نویسنده مسئول مقاله: a.naji@scu.ac.ir

که در آن H_{int} اندرکنش متقابل اتم-کاواک، H_{field} هامیلتونی میدان و H_{atoms} هامیلتونی اتم‌ها می‌باشد. با استفاده از تقریب موج چرخان می‌توان نوشت

$$H_{\text{int}} = \Omega(a\sigma_1^+ + a\sigma_2^+ + a^\dagger\sigma_1^- + a^\dagger\sigma_2^-) \quad 2$$

$$H_{\text{field}} = \nu a^\dagger a \quad 3$$

$$H_{\text{atoms}} = \frac{\omega}{2}(\sigma_1^z + \sigma_2^z) + J_x\sigma_1^x\sigma_2^x + J_y\sigma_1^y\sigma_2^y + J_z\sigma_1^z\sigma_2^z \quad 4$$

که در آن Ω ضریب جفت شدگی اتم-میدان می‌باشد. فرض می‌کنیم که دو اتم با ضرایب جفت شدگی مساوی با میدان جفت شده باشند. $J_i (i = x, y, z)$ ضریب جفت شدگی اسپین‌ها، ω فرکانس گذار بین دو حالت اتم‌ها، ν فرکانس میدان، a و a^\dagger به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش، $\sigma_i^{x,y,z} (i = 1, 2)$ ماتریس‌های پائولی و $\sigma_i^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_i^x \pm \sigma_i^y)$ هستند. هم چنین فرض می‌کنیم اتم‌ها و میدان در حالت تشدید هستند، یعنی $\nu = \omega$.

هامیلتونی کل سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$H = -J_z |\uparrow\downarrow 0\rangle\langle\uparrow\downarrow 0| + J |\downarrow\uparrow 0\rangle\langle\uparrow\downarrow 0| + J |\uparrow\downarrow 0\rangle\langle\downarrow\uparrow 0| - J_z |\downarrow\uparrow 0\rangle\langle\downarrow\uparrow 0| + \Omega |\downarrow\downarrow 1\rangle\langle\uparrow\downarrow 0| + \Omega |\downarrow\downarrow 1\rangle\langle\downarrow\uparrow 0| + \Omega |\downarrow\uparrow 0\rangle\langle\downarrow\downarrow 1| + J_z |\downarrow\downarrow 1\rangle\langle\downarrow\downarrow 1| + \Omega |\uparrow\downarrow 0\rangle\langle\downarrow\downarrow 1| \quad 5$$

که در آن $J = J_x + J_z$. علامت‌های \uparrow و \downarrow به ترتیب حالت برانگیخته و پایه اتم را نشان می‌دهند.

به‌خودی و جذب فوتون‌ها در حضور میدان الکترومغناطیسی معرفی شد [5].

فاصله رد یک کیوبیت تحت تعادل گرمایی در مدل جینز کامینگز نیز توسط سمیرن و همکاران در سال 2010 مورد مطالعه قرار گرفت [6].

در سال 2012 ماکس فرانزل، دینامیک برهم‌کنش میان اتم‌ها و فوتون‌ها را در مدل جینز کامینگز مورد مطالعه قرار داد و نشان داد که تحت تعادل گرمایی، وفاداری سیستم با افزایش دما کاهش می‌یابد [7].

همچنین مجاوری و همکاران در سال 2018 درهم‌تنیدگی گرمایی دو اتم دو-ترازه در مدل جینز-کامینگز دوفوتونی را با یک محیط کر اضافه شده بررسی کردند [8].

در این مقاله، هدف مطالعه ترابرد گرمایی از طریق دوکیوبیت تحت برهم‌کنش هایزبرگ XYZ و XXX در مدل جینز کامینگز است. در ابتدا هامیلتونی سیستم معرفی و درهم‌تنیدگی کانال کوانتومی محاسبه شده است. سپس وفاداری بین حالت های ورودی و خروجی مورد مطالعه قرار گرفته است و در پایان نتیجه گیری ارائه شده است.

ساختار

سیستم شامل دو اتم دو ترازه با برهم‌کنش هایزبرگ در یک کاواک تک مد می‌باشد. هامیلتونی سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود [9]:

$$H = H_{\text{int}} + H_{\text{field}} + H_{\text{atoms}} \quad 1$$

$$C = J + \sqrt{8\Omega^2 + (J - 2J_z)^2}$$

عناصر ماتریس چگالی از معادله زیر به دست می‌آیند
[10].

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \sum_i \exp\left[\frac{-1}{\lambda_i T}\right] |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad 8$$

که در آن $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$ تابع پارش، $\beta = \frac{1}{K_b T}$ و K_b ثابت بولتزمن است، E_i و ψ_i به ترتیب ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای داده شده در رابطه 7 هستند.

با جایگذاری 7 در رابطه 8، ماتریس چگالی کل سیستم را به دست می‌آوریم. سپس بعد از ردگیری بر روی درجات آزادی میدان، ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\rho(T) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & C & 0 \\ 0 & D & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad 9$$

که در آن پارامترهای A, B, C, D و F به دلیل پیچیدگی در اینجا آورده نشده‌اند.

توافق (کانکرنس) برای سیستم‌های دو-بعدی به صورت زیر به دست می‌آید [11].

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \quad 10$$

که در آن $\lambda_i (i=1,2,3,4)$ ریشه دوم ویژه‌مقادیر ماتریس R در رابطه زیر هستند که به صورت نزولی مرتب شده‌اند.

همچنین $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به ترتیب به معنی این هستند که میدان در حالت خلأ و برانگیخته می‌باشد. نمایش ماتریس H به صورت زیر خواهد بود.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_z & J & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & J & -J_z & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega & \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad 6$$

ویژه‌مقادیر غیرصفر و ویژه‌بردارهای مربوط به H به صورت زیر داده می‌شوند.

$$E_1 = -J - J_z$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(J - A)$$

$$E_3 = \frac{1}{2}(J + A)$$

$$|\psi_1\rangle = -|\uparrow\downarrow 0\rangle + |\downarrow\uparrow 0\rangle \quad 7$$

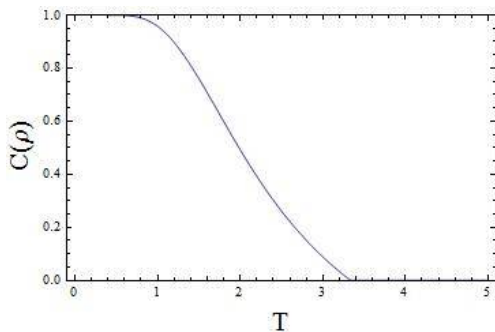
$$|\psi_2\rangle = \frac{B - 2J_z}{4\Omega} |\uparrow\downarrow 0\rangle + \frac{B - 2J_z}{4\Omega} |\downarrow\uparrow 0\rangle + |\downarrow\downarrow 1\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{C - 2J_z}{4\Omega} |\uparrow\downarrow 0\rangle + \frac{C - 2J_z}{4\Omega} |\downarrow\uparrow 0\rangle + |\downarrow\downarrow 1\rangle$$

که در آن A, B و C برابرند با

$$A = \sqrt{8\Omega^2 + (J - 2J_z)^2}$$

$$B = J - \sqrt{8\Omega^2 + (J - 2J_z)^2}$$



شکل 2. توافق $\rho(T)$ برحسب J-T به ازای $\Omega=1$ ، $J_x=1$ ، $J_y=2$ ، $J_z=3$.

ترابرد درهم‌تنیدگی

اکنون ترابرد درهم‌تنیدگی گرمایی از طریق سیستم شامل دو اتم دو ترازه با برهم‌کنش هایزنبرگ در یک کاواک تک مد را بررسی می‌کنیم. سیستم معرفی شده در رابطه 9 را به‌عنوان کانال کوآنتومی برای ترابرد در نظر می‌گیریم. بدین منظور یک کویت در حالت خالص دلخواه $|\psi_{in}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|10\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|01\rangle$ که در آن $(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ است را به‌عنوان حالت ورودی به کانال کوآنتومی انتخاب می‌کنیم.

حالت خروجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [12].

$$\rho_{out} = \sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu} (\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu) \rho_{in} (\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu) \quad 12$$

که در آن $\sigma_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) ماتریس‌های پائولی،

$$\rho_{in} = |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}|$$

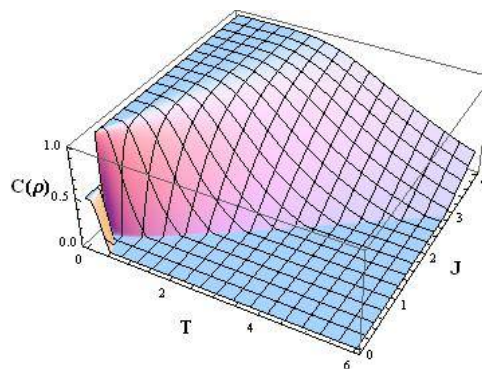
ماتریس $\rho(T)$ و $p_{\mu\nu} = \text{Tr}[E^\mu \rho(t)] \text{Tr}[E^\nu \rho(t)]$

چگالی داده شده در رابطه 9 است. همچنین داریم

$$R = \rho(T) (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho(T)^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad 11$$

در معادله بالا، $\rho(T)$ ماتریس چگالی کل سیستم و $\rho(T)^*$ مزدوج ماتریس چگالی $\rho(T)$ می‌باشد.

در شکل 1 توافق حالت $\rho(T)$ با فرض $J_x = J_y = J_z = J$ رسم شده است. مشاهده می‌شود در دماهای کم و $J > 0.4$ مقدار توافق برابر با 1 است و با افزایش دما مقدار توافق کاهش می‌یابد تا به صفر می‌رسد.



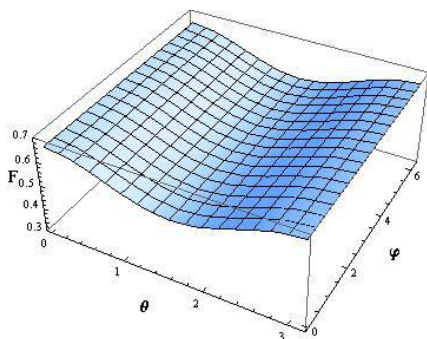
شکل 1. توافق $\rho(T)$ برحسب J-T به ازای $\Omega=1$.

نمودار توافق $\rho(T)$ با فرض $J_x \neq J_y \neq J_z$ در شکل 2 نشان داده شده است. این نمودار نیز نشان می‌دهد که در دماهای پایین مقدار توافق برابر با 1 است و با افزایش دما مقدار درهم‌تنیدگی به سمت صفر کاهش می‌یابد.

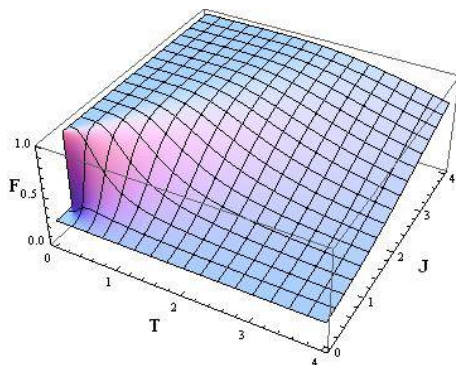
وفاداری به φ بستگی ندارد. بنابراین $|\psi_{in}\rangle$ برای $\theta = \{0, \pi\}$ بهینه می‌باشد.

شکل 5 نمودار وفاداری سیستم را بر حسب $T-J$ نشان می‌دهد. میزان وفاداری برای دماهای پایین و $J > 0.4$ عدد 1 را نشان می‌دهد، همچنین با افزایش دما وفاداری کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت برسد.

در شکل 6 وفاداری سیستمی که دو اتم تحت برهم کنش هایزنبرگ XYZ هستند، بر حسب دما ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در دماهای پایین مقدار وفاداری برابر با 1 است. سپس با افزایش دما، وفاداری سیستم کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت برسد.



شکل 4. وفاداری سیستم بر حسب $\theta - \varphi$ به ازای $\Omega = 1$ ، $J_x = 1$ ، $J_y = 2$ و $J_z = 3$.

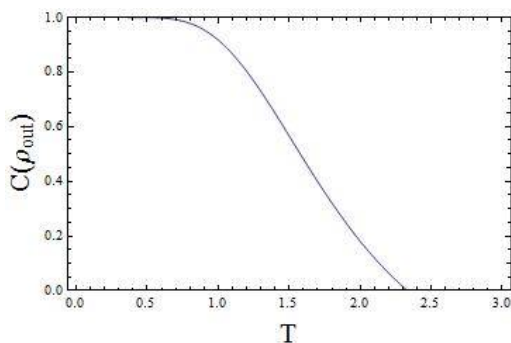


$$E^0 = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|, \sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu} = 1$$

$$E^2 = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|, E^1 = |\phi^-\rangle\langle\phi^-|$$

$$\psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), E^3 = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$$

$$\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$$



شکل 3. توافق حالت خروجی بر حسب T به ازای $\Omega = 1$ ،

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ و } \varphi = 0, J_z = 3, J_y = 2, J_x = 1$$

توافق حالت خروجی بر حسب دما در شکل 3 رسم شده است. مقدار توافق برای دماهای 0 تا 0.5 برابر 1 می‌باشد، با افزایش دما توافق به سمت صفر کاهش می‌یابد.

وفاداری دو حالت اختیاری به صورت زیر به دست آید [13].

$$F(\rho_{in}, \rho_{out}) = \{Tr[\sqrt{\sqrt{\rho_{in}} \rho_{out} \sqrt{\rho_{in}}}]^2\}^2 \quad 13$$

که در آن ρ_{out} و ρ_{in} به ترتیب حالت‌های ورودی و خروجی کانال می‌باشند.

وفاداری سیستم بر حسب $\theta - \varphi$ در شکل 4 به ازای دمای 0.1 ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که مقدار وفاداری در $\theta = \{0, \pi\}$ بیشینه است. همچنین مقدار

مرجع‌ها

[1] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wothers, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Physical Review Letters* **70** (1993) 1895. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895>

[2] A. Naji, R. Hamzeofi, D. Afshar, Entanglement teleportation via two qubits Heisenberg interaction in Jaynes-Cummings model under intrinsic decoherence, *Iranian Journal of Physics Research* **19** (2019) 656.

[3] D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation, *Nature* **390** (1998) 575-579.

[4] M. Rafiee, Quantum thermodynamics of an atom-cavity system with Jaynes-Cummings interaction, *Journal of Research on Many-body Systems*. **8** (2018) 53-62. https://jrmb.scu.ac.ir/article_13636.html

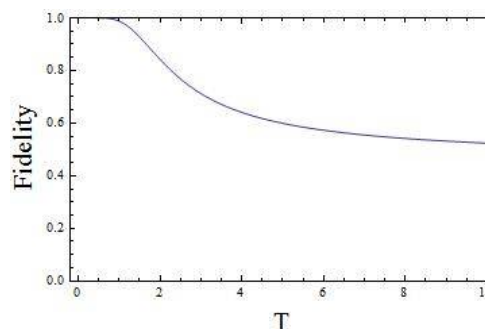
[5] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proc. IEEE*. **51** (1963) 89.

[6] A. Smirne, D. Brivio, S. Cialdi, B. Vacchini, M.G.A. Paris, Experimental investigation of initial system-environment correlations via trace distance evolution, *Physical Review A* **84** (2011) 032112. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.032112>

[7] M.F. Frenzel, Atoms and photons-their interaction dynamics, arXiv.1212.4339v1 (2012).

[8] B. Mojaveri, A. Dehghani, M.A. Fasihi, T. Mohammadpour, Thermal Entanglement Between Two Two-Level Atoms in a Two-Photon Jaynes-Cummings Model with an Added Kerr Medium, *Journal of Theoretical Physics*,

شکل 5. وفاداری سیستم برحسب T-J به‌ازای $\Omega = 1$ ، $\varphi = 0$ و $\theta = 0$.



شکل 6. وفاداری سیستم برحسب T به‌ازای $\gamma = 0.05$ ، $\theta = 0$ ، $\Omega = 1$ ، $J_x = 1$ ، $J_y = 2$ ، $\varphi = 0$.

نتیجه‌گیری

ترابرد درهم‌تنیدگی گرمایی یک حالت دو کوبیتی تحت برهم‌کنش‌های هایزنبرگ XXX و XYZ در یک کاواک با استفاده از مدل جینز-کامینگز را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در هر دو مدل XYZ و XXX درهم‌تنیدگی و وفاداری برای دماهای پایین بیشینه است، و با افزایش دما مقدار درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد، درحالی‌که مقدار وفاداری کاهش می‌یابد و به یک مقدار ثابت غیر صفر می‌رسد. همچنین برای سیستم‌های مذکور، احتمال انتقال اطلاعات کوانتومی با نرخ بیشینه وجود دارد.

سپاسگزاری

بدین وسیله از حمایت مالی دانشگاه شهید چمران اهواز (GN: SCU.SP99.12469) کمال تشکر را دارم.

- [11] D. McMahon, *Quantum computing explained*, WILEY Press, USA, (2007). **57** (2018) 3396–3409.
<https://doi.org/10.1007/s10773-018-3853-9>
- [12] A. Peres, Separability criterion for density matrices, *Physical Review Letters* **77** (1996) 1413.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>
- [13] R. Jozsa, Fidelity for mixed quantum states, *Journal of Modern Optics*. **41** (1994) 2315-2323.
<https://doi.org/10.1080/09500349414552171>
- [9] P. Lambropoulos, D. Petrosyan, *Fundamentals of quantum optics and quantum information*, Springer, Berlin Heidelberg (2007).
- [10] G.J. Liang, N. Jing, S.H. Shan, Quantum teleportation through a two-qubit Heisenberg XXZ chain, *Communications in Theoretical Physics* **49** (2008) 1435-1438.