

# Investigation of the entanglement entropy and entanglement spectrum behavior of the spin-1/2 chain with hexamer modulation of exchange

Javad Hasanzadeh<sup>\*1</sup>, Farzaneh Shafieinejad<sup>1</sup>, Saeed Mahdavi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Faculty of Science, Islamic azad University, Takestan Branch, Takestan, Iran

<sup>2</sup> Department of Physics, University of Guilan, 41335-1914 Rasht, Iran

Received: 18.10.2019    Final revised: 03.05.2020    Accepted: 21.09.2021

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15926](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15926)

## Abstract

The spin-1/2 Heisenberg chain is considered with hexamer modulation of exchange on the bonds. From the point of view of the entanglement entropy, the zero-temperature response of the system to a uniform magnetic field has been studied. Calculations are performed using the numerical Lanczos method on the finite chains. The ground state phase diagram consists of the three gapless Luttinger Liquid phases, two gapped plateau phases, a spin-singlet phase, and a saturated ferromagnetic phase. Previous reviews have shown that in the presence of the modulated exchange, two plateaus are seen at the magnetization process equal to 1/3 and 2/3 of the saturation value. In this paper, the numerical Lanczos calculations are presented on the entanglement entropy and the entanglement spectrum in gapped phases. Numerical results show that the entanglement entropy is four times degenerate in the spin-singlet and is two times degenerate in the gapped plateau phases.

**Keywords:** Spin-1/2 chain, Entanglement entropy, Entanglement spectrum, Degenerate

---

\* Corresponding Author: javadhasanzadeh649@gmail.com

## بررسی رفتار آتروپی درهم‌تنیدگی و طیف درهم‌تنیدگی در زنجیره اسپین- 1/2 با برهم‌کنش تبدیلی مدوله شده شش‌تایی

جواد حسن زاده<sup>1\*</sup>، فرزانه شفیعی نژاد<sup>1</sup>، سعید مهدوی فر<sup>2</sup>

<sup>1</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان، تاکستان، ایران

<sup>2</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

دریافت: 1398/07/26 ویرایش نهائی: 1399/02/14 پذیرش: 1399/06/31

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15926](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15926)

### چکیده

زنجیره هاینبرگ اسپین-1/2 با برهم‌کنش تبدیلی مدوله شده شش‌تایی روی باندها، در نظر گرفته شده است. پاسخ دمای صفر سیستم به میدان مغناطیسی یکنواخت، از نقطه نظر آتروپی درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار گرفته است. محاسبات با استفاده از روش عددی لنکشوز روی زنجیره‌های متناهی انجام شده است. نمودار فاز حالت پایه سیستم شامل سه فاز سیال لاتینجر بدون گاف، دو فاز گاف‌دار پله‌ای، یک فاز تک گانه اسپینی و یک فاز فرومغناطیس اشباع است. مطالعات قبلی نشان داده اند که در حضور برهم‌کنش تبدیلی مدوله شده فوق، در فرآیند مغناطش سیستم دو پله در مقادیر  $1/3$  و  $2/3$  مقدار اشباع دیده می‌شود. در این مقاله، محاسبات عددی لنکشوز روی آتروپی درهم‌تنیدگی و طیف درهم‌تنیدگی در فازهای گاف دار سیستم فوق ارائه شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که طیف درهم‌تنیدگی در فاز تک گانه اسپینی تبهگنی مرتبه چهار و در فازهای گاف‌دار پله‌ای، تبهگنی مرتبه دو دارد.

**کلیدواژگان:** زنجیره اسپین-1/2، آتروپی درهم‌تنیدگی، طیف درهم‌تنیدگی، تبهگنی

### مقدمه

مختلف ماده به وسیله پارامترهای نظم موضعی و شکست تقارن خود به خودی درک می‌شود. در سه دهه اخیر مشخص شده که گذارهای فاز کوآنتومی مختلفی در طبیعت روی می‌دهند که ماورای نظریه شکست تقارن لاندائو قرار دارند. برای مثال می‌توان از اثر هال کوآنتومی نام برد [4-6]. در اصل نظریه شکست تقارن لاندائو به دلیل عدم وجود پارامتر نظم و تقارن یکسان بین فازها قادر به توصیف این پدیده نیست. در واقع، اثر هال کوآنتومی نوع جدیدی از نظم را دارد که به عنوان نظم توپولوژیک شناخته می‌شود.

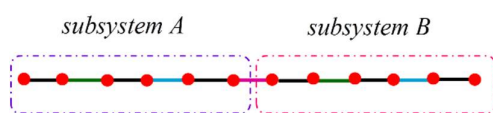
گذارهای فاز و فازهای توپولوژیک در فیزیک ماده چگال طی سال‌های گذشته توجه گسترده‌ای را به خود جلب کرده است [1-3]. در واقع، در اثرات و خیزهای کوآنتومی، گذار فاز در دمای صفر نیز روی می‌دهد که گذار فار کوآنتومی نامیده شده است. نظریه شکست تقارن لاندائو به دلیل توانایی در شناخت و توصیف گذار فازها، به نظریه‌ای اساسی در مطالعه گذار فاز تبدیل شده است. بر طبق نظریه لاندائو شناسایی فازهای

\* نویسنده مسئول: javadhasanzadeh649@gmail.com



بر این با کاربرد الگوریتم گروه بازبهنجارش ماتریس چگالی وابسته به زمان<sup>4</sup> یک ارتباط بین گاف اشمیت (به‌عنوان مثال تفاوت بین دو تا بزرگترین ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی) و پارامترهای نظم گزارش شده است [17].

در این مقاله، مدل زنجیره اسپین-1/2 با برهم‌کنش متبادله مدوله شده شش‌تایی در حضور میدان مغناطیسی خارجی مورد مطالعه قرار می‌گیرد [18]. با استفاده از روش لنگشوز، حالت پایه برای زنجیره‌هایی با تعداد ذرات  $N=12,18,24$  را محاسبه می‌کنیم. سپس با تقسیم زنجیره به دو زیر سیستم (شکل 1)، آنتروپی درهم‌تنیدگی و طیف درهم‌تنیدگی برای زیرسیستم‌هایی به تعداد  $N/2$  ذره ( $N$  تعداد کل اسپین‌ها) محاسبه شده و مورد تحلیل قرار گرفته است.



شکل 1. تصویر شماتیک از تقسیم یک سیستم زنجیره اسپین-1/2 به دو زیرسیستم.

### توصیف مدل

زنجیره‌ای شامل ذرات با اسپین-1/2 در حضور میدان مغناطیسی خارجی در نظر می‌گیریم. شرایط مرزی دوره‌ای به کار برده شده است. هامیلتونی این مدل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = J \sum_{n=1}^{N/2} \vec{S}_{2n} \cdot \vec{S}_{2n+1} + \sum_{n=1}^{N/2} J_{AF}(n) \vec{S}_{2n-1} \cdot \vec{S}_{2n} - h \sum_{n=1}^{N/2} (\vec{S}_{2n-1}^z + \vec{S}_{2n}^z) \quad (1)$$

نظم توپولوژیک نظمی کوآنومی است که با شکست تقارن همراه نیست و در نتیجه با پارامتر نظم موضعی قابل تشخیص نیست.

فاز هالدین یکی از نمونه‌های معروف فاز توپولوژیک در زنجیره‌های اسپینی است [7]. براساس حدس هالدین، زنجیره‌های اسپینی پادفرمغناطیس هایزنبرگ با اسپین صحیح دارای گاف انرژی هستند و تابع همبستگی اسپینی در آنها به صورت نمایی با افزایش فاصله بین اسپین‌ها کاهش می‌یابد. علاوه بر این، در فاز هالدین تقارن‌های وارونی فضا<sup>1</sup>، وارونی زمان<sup>2</sup> و دوران  $\pi$  حول دو محور حفظ می‌شوند [8-10].

در سال‌های اخیر استفاده از درهم‌تنیدگی کوآنومی برای تشخیص خصوصیات توپولوژیکی مورد توجه قرار گرفته است. علاوه بر این، از میان کمیت‌های مختلف برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی کوآنومی، علاقه به استفاده از آنتروپی درهم‌تنیدگی بسیار افزایش یافته است [11 و 12]. با تقسیم یک سیستم کوآنومی به دو زیر سیستم، آنتروپی درهم‌تنیدگی به‌عنوان آنتروپی فون-نیومن از ماتریس چگالی کاهش یافته هر یک از دو زیر سیستم تعریف می‌شود. در واقع طیف درهم‌تنیدگی از ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته تحت رد<sup>3</sup> گرفتن از یک زیر سیستم، دانشی کلیدی در مورد فازهای توپولوژیک ارائه می‌دهد.

زنجیره‌های اسپینی کاندیدای بسیار خوبی برای مطالعه فازهای توپولوژیک دمای صفر می‌باشند [13-15]. به‌عنوان نمونه، با تقسیم یک زنجیره هایزنبرگ متناوب اسپین-1/2 فرمغناطیس-پادفرمغناطیس به دو زیرسیستم و محاسبه عددی طیف برانگیختگی، نشان داده شده که دو فاز تحت عنوان فازهای بدیهی و تقارن-محفوظ در حالت پایه وجود دارد [16]. علاوه

<sup>4</sup> Time-dependent density matrix renormalization group

<sup>1</sup> Space inversion

<sup>2</sup> Time reversal

<sup>3</sup> Trace

### نتایج عددی

در این بخش، با استفاده از روش لنگشوز، آنتروپی درهم‌تنیدگی و طیف درهم‌تنیدگی را در حضور میدان مغناطیسی به دست می‌آوریم. روش لنگشوز یک روش مؤثر و دقیق برای به دست آوردن ویژه‌مقادیر ماتریس‌های پراکنده بزرگ است. لازم به ذکر است که شرایط مرزی دوره‌ای در نظر گرفته شده است. ما حالت پایه سیستم را برای زنجیره‌هایی متناهی شامل  $N=12, 18, 24$  محاسبه می‌کنیم. مطالعات خود را با در نظر گرفتن روابط زیر به ترتیب در الگوی نوع اول و دوم شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad J_{AF}^0 &= 19/3, \quad \delta = 2/19, \quad J = 1, \\ \text{(II)} \quad J_{AF}^0 &= 6, \quad \delta = 1/6, \quad J = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

با مطالعه و بررسی گاف انرژی نقاط بحرانی دقیقاً همانند مرجع 18 برای الگوی (I) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_{C_1} &= 5.61 \pm 0.01, \\ H_{C_2} &= 5.75 \pm 0.01, \\ H_{C_3} &= 6.40 \pm 0.01, \\ H_{C_4} &= 6.59 \pm 0.01, \\ H_{C_5} &= 7.61 \pm 0.01, \\ H_{C_6} &= 7.66 \pm 0.01. \end{aligned} \quad (5)$$

و نقاط بحرانی برای الگوی (II) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} H_{C_1} &= 4.87 \pm 0.01, \\ H_{C_2} &= 4.92 \pm 0.01, \\ H_{C_3} &= 6.27 \pm 0.01, \\ H_{C_4} &= 6.33 \pm 0.01, \\ H_{C_5} &= 7.60 \pm 0.01, \\ H_{C_6} &= 7.61 \pm 0.01. \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه بالا  $S_n$  عملگر اسپین-1/2 در سایت  $n$ ام از زنجیره فوق است و  $J < 0$  و  $J > 0$  به ترتیب برهم‌کنش تبدالی فرومغناطیس و پادفرومغناطیس را توصیف می‌کنند.  $h$  میدان مغناطیسی خارجی و  $J_{AF}$  ثابت تبدالی پادفرومغناطیسی مدوله شده فضایی را نشان می‌دهد.

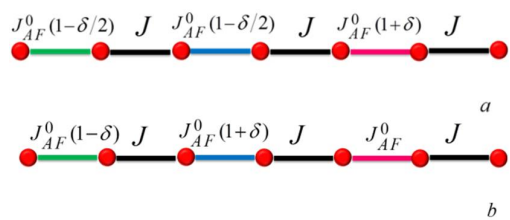
دو نوع مدولاسیون تبدالی پادفرومغناطیسی مطابق با سلول واحد شش‌تایی را در نظر می‌گیریم. الگوی نوع اول:

$$J_{AF}(n) = J_{AF}^0 \left( 1 + \delta \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \right), \quad (2)$$

و الگوی نوع دوم:

$$J_{AF}(n) = J_{AF}^0 \left( 1 - \frac{2\delta}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \right), \quad (3)$$

که به طور شماتیک در شکل 2a و 2b نشان داده شده‌اند.



شکل 2. تصویر شماتیک از یک زنجیره اسپینی با مدولاسیون شش‌تایی تبدالی اسپین a: الگو نوع اول و b: الگو نوع دوم را نشان می‌دهد.

برهم‌کنش تبدالی بین اسپین‌ها در باندهای زوج و فرد با هم متفاوت است و همچنین برهم‌کنش تبدالی فرومغناطیس و پادفرومغناطیس از برهم‌کنش تبدالی پادفرومغناطیس مدوله شده فضایی کمتر است ( $|J| = J_{AF}^0$ ). باید توجه داشت در  $\delta = 0$  و  $J > 0$  هامیلتونی مدل، به هامیلتونی زنجیره متناوب اسپین-1/2 پادفرومغناطیس-پادفرومغناطیس و در مورد  $J < 0$  به هامیلتونی زنجیره اسپینی فرومغناطیس-پادفرومغناطیس در حضور یک میدان مغناطیسی طولی یکنواخت تبدیل می‌شود.

### آنتروپی درهم‌تنیدگی

درهم‌تنیدگی یک پدیده کاملاً کوانتومی است که معادلی در کلاسیک ندارد. به‌عنوان یکی از مهمترین کمیت‌ها در نظریه اطلاعات کوانتومی شناخته شده و نقشی اساسی در فیزیک ماده چگال دارد. به‌خصوص، آنتروپی درهم‌تنیدگی به‌عنوان یکی از مؤثرترین کمیت‌ها برای مطالعه فازهای کوانتومی توپولوژیک در سیستم‌های ماده چگال کم‌بعد معرفی شده است. در این روش باید سیستم اصلی را به دو بخش (زیر سیستم های A و B) تقسیم کرد. اطلاعات کامل در مورد درهم‌تنیدگی بین دو زیرسیستم توسط ماتریس چگالی بیان می‌شود. آنتروپی درهم‌تنیدگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^{vN} = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log \rho_B), \quad (7)$$

که  $\rho = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$  ماتریس چگالی حالت پایه سیستم زنجیره اسپینی است و  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$  ماتریس چگالی کاهش یافته زیرسیستم A می‌باشد.

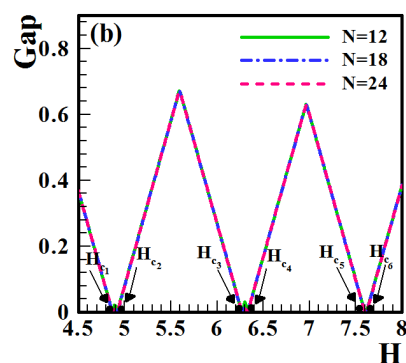
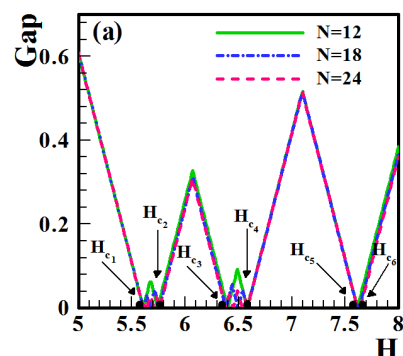
برای محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی ما سیستم زنجیره مدول شده را به دو زیرسیستم یکسان A و B تقسیم کرده و سپس آنتروپی درهم‌تنیدگی را محاسبه کردیم. در واقع کمیت آنتروپی درهم‌تنیدگی توصیف می‌کند که سیستم چه مقدار بین دو زیرسیستم A و B درهم‌تنیده است (لطفاً شکل 1 را نگاه کنید).

در شکل 4 آنتروپی درهم‌تنیدگی برحسب میدان مغناطیسی خارجی رسم شده است. نتایج برای زنجیره‌های شامل  $N=12, 24$  ذره و برهم‌کنش‌های متبادلی مختلف (الگوی (I) در 4a و الگوی (II) در 4b) ارائه شده‌اند.

همان‌طور که در شکل 4a مشاهده می‌شود در غیاب میدان مغناطیسی،  $H=0$ ، درهم‌تنیدگی زیرسیستم‌ها بسیار ناچیز است. در حضور میدان مغناطیسی و در

نمودارهای فاز برای هر دو حالت (I) و (II) از 7 فاز تشکیل شده است که در شکل 3a و 3b به‌ترتیب نشان داده شده‌اند:

- (1) فاز تک گانه اسپینی در ناحیه  $H < H_{c1}$ ,
- (2) اولین فاز سیال لاتینجر در ناحیه  $H_{c1} < H < H_{c2}$ ,
- (3) اولین فاز گاف دار پله‌ای در ناحیه  $H_{c2} < H < H_{c3}$ ,
- (4) دومین فاز سیال لاتینجر در ناحیه  $H_{c3} < H < H_{c4}$ ,
- (5) دومین فاز گاف دار پله‌ای در ناحیه  $H_{c4} < H < H_{c5}$ ,
- (6) سومین فاز سیال لاتینجر در ناحیه  $H_{c5} < H < H_{c6}$ ,
- (7) فاز فرومغناطیسی اشباع در ناحیه  $H > H_{c6}$ .



شکل 3. گاف انرژی به‌عنوان تابعی از میدان مغناطیسی برای زنجیره هایزبرگ با تناوب شش‌تایی با طول‌های  $N=12, 18, 24$  و

$$J_{AF}^0 = \frac{19}{3}, \delta = \frac{2}{19}, J = 1 \text{ (a)}, \quad J_{AF}^0 = 6, \delta = \frac{1}{6}, J = 1 \text{ (b)}, \quad [18].$$

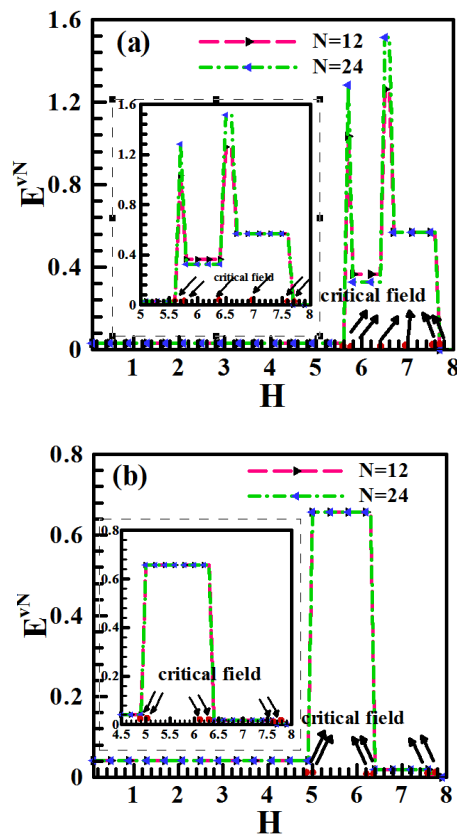
باید توجه داشت که در فاز دوم سیال لاتینجر، یعنی در ناحیه  $H_{C_3} < H < H_{C_4}$ ، آنتروپی درهم‌تنیدگی رفتار در پایان، همان‌طور که در فاز فرومغناطیسی اشباع،  $H > H_{C_6}$ ، پیش‌بینی می‌شود هیچ درهم‌تنیدگی بین زیرسیستم‌های  $A$  و  $B$  دیده نمی‌شود.

در شکل 4b به‌وضوح رفتار مشابهی مانند شکل 4a تا اولین نقطه بحرانی مشاهده می‌شود. با افزایش میدان مغناطیسی، آنتروپی درهم‌تنیدگی نیز روند افزایشی را طی می‌کند و به حداکثر مقدار خود در نقطه بحرانی دوم،  $H_{C_2}$ ، می‌رسد. در فاز گاف دار پله اول،  $H_{C_2} < H < H_{C_3}$ ، آنتروپی درهم‌تنیدگی همچنان ثابت باقی می‌ماند که مستقل از تعداد ذرات اسپین‌ها است و در این حالت درهم‌تنیدگی بیشترین مقدار خود را دارد و سپس روند کاهشی سریعی را طی می‌کند و در نقطه بحرانی،  $H_{C_4}$ ، متوقف می‌شود. در دومین فاز گاف دار پله‌ای، یعنی در ناحیه  $H_{C_4} < H < H_{C_5}$ ، مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی بسیار ناچیز است. باید توجه داشت در فاز سوم سیال لاتینجر، مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی کاملاً به مقدار صفر می‌رسد. نهایتاً در فاز فرومغناطیسی اشباع،  $H > H_{C_6}$ ، هیچ درهم‌تنیدگی مشاهده نمی‌شود.

### طیف درهم‌تنیدگی

در سال 2008 لی<sup>1</sup> و هالدین<sup>2</sup> پیشنهاد کردند [19] یک کمیت مناسب برای توصیف فازهای توپولوژیک تقارن-محفوظ و فازهای با نظم توپولوژیک درهم‌تنیدگی است. در واقع در فازهای توپولوژیک تقارن-محفوظ درهم‌تنیدگی کوتاه برد و در دیگری بلندبرد می‌باشد.

ناحیه فاز تک گانه اسپینی، درهم‌تنیدگی زیر سیستم‌ها همچنان ناچیز باقی می‌ماند. به‌محض اینکه میدان مغناطیسی از اولین مقدار بحرانی عبور می‌کند، آنتروپی درهم‌تنیدگی نیز افزایش پیدا کرده و با عبور از حداکثر مقدار خود شروع به کاهش می‌کند. روند کاهشی تا دومین نقطه بحرانی  $H_{C_2}$  که محل ورود سیستم به اولین فاز گاف دار پله‌ای است ادامه پیدا می‌کند. در فاز گاف دار پله اول،  $H_{C_2} < H < H_{C_3}$ ، زیرسیستم‌ها درهم‌تنیده هستند.



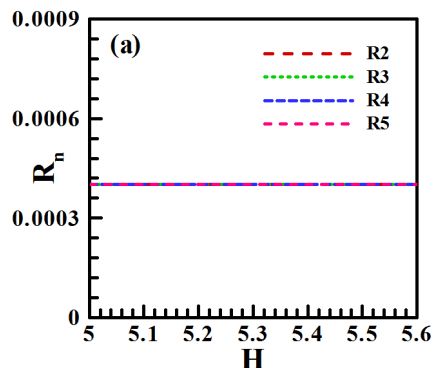
شکل 4. آنتروپی درهم‌تنیدگی بین زیرسیستم  $A$  و  $B$  زنجیره اسپینی با طول  $N=12, 24$  و برهم‌کنش تبدیلی مختلف. زیرسیستم  $A$  شامل a: برهم‌کنش تبدیلی  $J=1$ ,  $\delta = \frac{2}{19}$ ,  $J_{AF}^0 = \frac{19}{3}$ ; b: برهم‌کنش تبدیلی  $J=1$ ,  $\delta = \frac{1}{6}$ ,  $J_{AF}^0 = 6$ .

<sup>2</sup> Haldane

<sup>1</sup> Li

پله اول، دومین مقدار طیف درهم‌تنیدگی تبهگنی مرتبه دو دارد (با سومی برابر است) و چهارمین مقدار طیف درهم‌تنیدگی نیز دو مرتبه تبهگن است (با پنجمی برابر است). برای ناحیه گاف‌دار پله دوم، دومین مقدار طیف درهم‌تنیدگی دو مرتبه تبهگن (با سومی یکسان است) و باقی غیر تبهگن هستند.

در شکل 6a تا 6c طیف درهم‌تنیدگی برحسب میدان مغناطیسی برای پارامتر تبدلی  $N=24$  و  $J_{AF}^0 = 6$ ,  $\delta = 1/6$ ,  $J = 1$  و زنجیره اسپینی  $N=24$  برای هر سه ناحیه فاز تک گانه اسپینی a، فاز گاف دار پله اول (b) و ناحیه پله دوم (c) نمایش داده شده است. همانند شکل 5 بزرگترین مقدار طیف درهم‌تنیدگی به دلیل اختلاف گاف زیاد حذف شده و چهار مقدار بعدی گزارش شده‌اند. همان‌طور که به‌وضوح مشاهده می‌شود ناحیه فاز تک‌گانه اسپینی چهارمرتبه تبهگن است. در ناحیه پله اول، دومین بزرگترین ویژه‌مقدار تبهگنی مرتبه دو (با سومی برابر است) و برای چهارمین و پنجمین بزرگترین ویژه‌مقادیر، تبهگنی مشاهده نمی‌شود. در حالت پله دوم، ویژه‌مقادیر دوم و چهارم دو مرتبه تبهگن می‌باشند (به ترتیب با ویژه‌مقدار سوم و پنجم یکسان هستند).



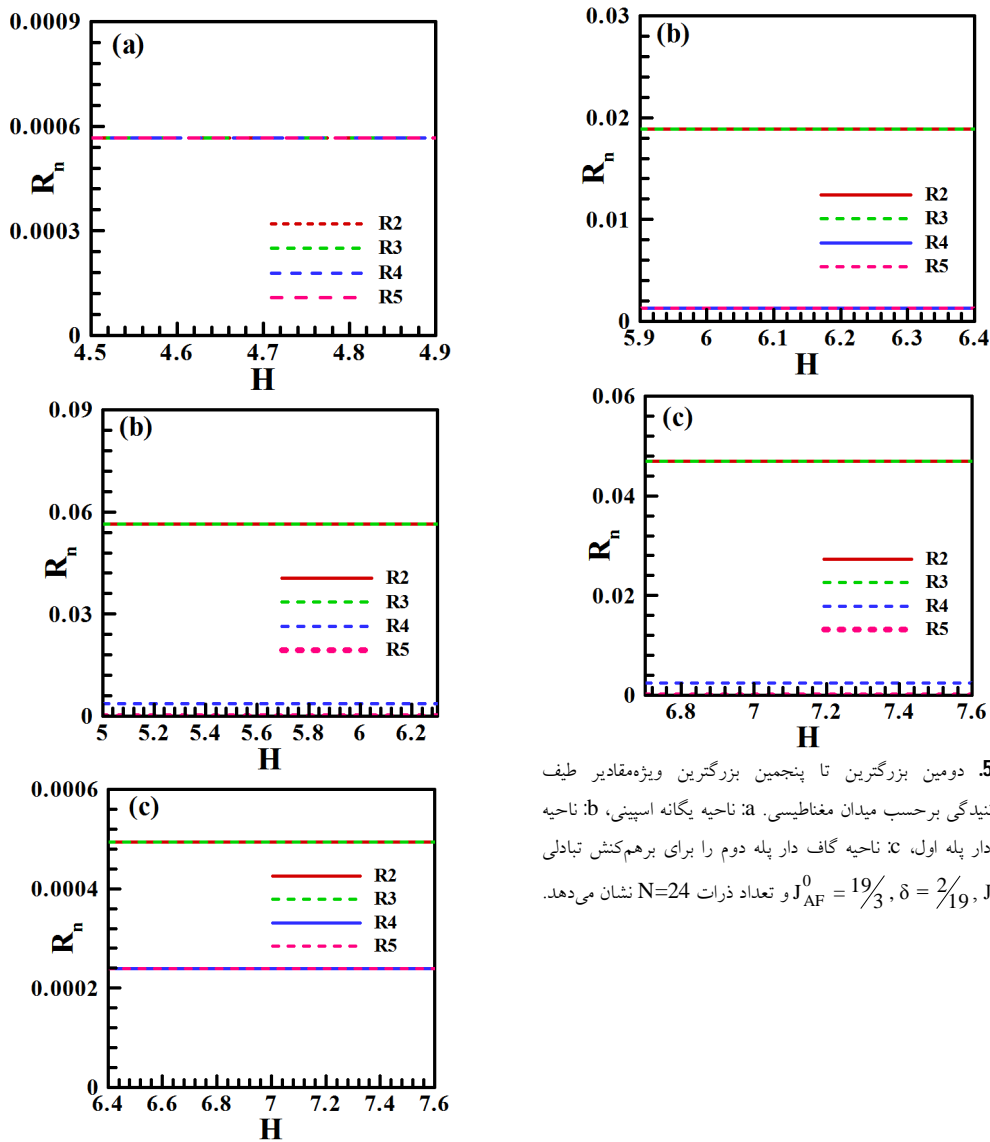
در این بخش ما نتایج عددی طیف درهم‌تنیدگی را گزارش می‌کنیم. همانند آنتروپی درهم‌تنیدگی، برای به‌دست آوردن طیف درهم‌تنیدگی ما نیاز به ماتریس چگالی کاهش یافته زیر سیستم A داریم که به‌عنوان  $\rho_A$  شناخته شده است. ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های ماتریس چگالی کاهش یافته توسط معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_A |\alpha_n\rangle_A = R_n |\alpha_n\rangle_A, \quad (8)$$

$$\rho_B |\alpha_n\rangle_B = R_n |\alpha_n\rangle_B, \quad (9)$$

که  $R_n$  و  $|\alpha_n\rangle_{A(B)}$  ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ماتریس چگالی کاهش یافته زیرسیستم A(B) را تعیین می‌کنند. مجموعه ویژه‌مقادیر  $\{R_n\}$ ، طیف درهم‌تنیدگی حالت پایه سیستم زنجیره اسپینی را مشخص می‌کند. ما برای محاسبه طیف درهم‌تنیدگی، زنجیره اسپینی را به دو زیرسیستم A و B با تعداد ذرات  $N/2$  تقسیم کرده‌ایم.

در شکل 5a تا 5c طیف درهم‌تنیدگی برحسب میدان مغناطیسی برای پارامتر تبدلی  $N=24$  و  $J_{AF}^0 = 19/3$ ,  $\delta = 2/19$ ,  $J = 1$  و زنجیره اسپینی به‌طول  $N=24$  برای فازهای تک گانه اسپینی (a)، ناحیه گاف دار پله اول (b)، ناحیه گاف دار پله دوم (c)، رسم شده است. نتایج عددی لنگشوز برای پنج تا از بزرگترین ویژه‌مقادیر طیف درهم‌تنیدگی گزارش شده است. در ابتدا باید به این نکته توجه داشت که بزرگترین ویژه‌مقدار طیف درهم‌تنیدگی، درهم‌تنیده نیست و با یک گاف بزرگ از چهار مقدار دیگر جدا شده است. به‌همین دلیل بزرگترین مقدار طیف درهم‌تنیدگی را در شکل نشان نداده‌ایم و چهار مقدار بعدی در نظر گرفته شده است. از مقایسه نتایج طیف درهم‌تنیدگی در این نواحی گاف‌دار مشاهده می‌کنیم که طیف درهم‌تنیدگی برای ناحیه تک گانه اسپینی با هم یکسان و تبهگنی مرتبه چهار دارد. برای ناحیه گاف‌دار



شکل 5. دومین بزرگترین تا پنجمین بزرگترین ویژه‌مقادیر طیف درهم‌تنیدگی برحسب میدان مغناطیسی. a: ناحیه یگانه اسپینی، b: ناحیه گاف دار پله اول، c: ناحیه گاف دار پله دوم را برای برهم‌کنش تبدیلی  $J_{AF}^0 = 19/3$ ,  $\delta = 2/19$ ,  $J = 1$  و تعداد ذرات  $N=24$  نشان می‌دهد.

شکل 6. دومین بزرگترین تا پنجمین بزرگترین ویژه‌مقادیر طیف درهم‌تنیدگی برحسب میدان مغناطیسی. a: ناحیه یگانه اسپینی، b: ناحیه گاف دار پله اول، c: ناحیه گاف دار پله دوم را برای برهم‌کنش تبدیلی  $J_{AF}^0 = 6$ ,  $\delta = 1/6$ ,  $J = 1$  و تعداد ذرات  $N=24$  نشان می‌دهد.

### نتیجه‌گیری

به‌طور خلاصه، ما طیف درهم‌تنیدگی را برای یک زنجیره هاینبرگ اسپین-1/2 با برهم‌کنش تبدیلی اسپینی متناوب در حضور برهم‌کنش مدوله شده اضافی روی باندهای فرد بررسی کردیم. روش عددی لنگشوز



[6] B.A. Bernevig, T.L. Hughes, S.C. Zhang, Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells, *Science* **314** (2006) 1757.

<https://science.sciencemag.org/content/314/5806/1757.abstract>

[7] F.D.M. Haldane, Nonlinear Field Theory of Large-Spin Heisenberg Antiferromagnets: semiclassically Quantized Solitons of the One-Dimensional Easy-Axis Neel State, *Physical Review Letter* **50** (1983) 1153.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.1153>

[8] F. Pollmann, A.M. Turner, E. Berg, M. Oshikawa, Entanglement spectrum of a topological phase in one dimension, *Physical Review B* **81** (2010) 064439.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.064439>

[9] A.M. Turner, F. Pollmann, E. Berg, Topological Phases of One-Dimensional Fermions: An Entanglement Point of View, *Physical Review B* **83** (2011) 075102.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.075102>

[10] F. Pollmann, E. Berg, A.M. Turner, M. Oshikawa, Symmetry protection of topological phases in one-dimensional quantum spin systems *Physical Review B* **85** (2012) 075125.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.075125>

[11] A. Kitaev, J. Preskill, Topological entanglement entropy, *Physical Review Letter* **96**, (2006) 110404.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.110404>

[12] M. Levin, X.G. Wen, Detecting topological order in a ground state wave function, *Physical Review Letter* **96** (2006) 110405.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.110405>

برای قطری‌سازی زنجیره با تعداد محدود تا  $N=24$  به‌کار بردیم و حالت پایه سیستم محاسبه گردید.

سپس، آنتروپی درهم‌تنیدگی و طیف درهم‌تنیدگی را محاسبه کردیم. برای به‌دست آوردن آنتروپی و طیف درهم‌تنیدگی ما سیستم را به دو زیرسیستم  $A$  و  $B$  تقسیم کردیم. سپس ماتریس چگالی کاهش یافته محاسبه گردید. پنج تا از بزرگترین ویژه‌مقادیر طیف درهم‌تنیدگی در نظر گرفته شدند. برای ناحیه فاز تک‌گانه اسپینی در هر دو حالت برهم‌کنش تبادلی مختلف، تبهگنی مرتبه چهارم و برای ناحیه پله اول و پله دوم تبهگنی مرتبه دوم گزارش شد.

#### مرجع‌ها

[1] M.Z. Hasan, C.L. Kane, Topological Insulators, *Reviews of modern Physics* **82** (2010) 3045.

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.3045>

[2] X.L. Qi, S.C. Zhang, Topological insulators and superconductors, *Reviews of modern Physics* **83** (2010) 1057.

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.1057>

[3] C.K. Chiu, J.C.Y. Teo, A.P. Schnyder, S. Ryu, Classification of topological quantum matter with symmetries, *Reviews of modern Physics* **88** (2016) 035005.

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.035005>

[4] N. Read, D. Green, Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries, and the fractional quantum Hall effect, *Physical Review B* **61** (2000) 10267.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.10267>

[5] C. Kane, E. Mele, Quantum Spin Hall Effect in Graphene, *Physical Review Letter* **95** (2005) 226801.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.226801>

ction, *Journal Of Physics Society Of Japan* **85** (2016) 124712.

<https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.124712>

[17] G. Torlai, L. Tagliacozzo, G. De Chiara, Dynamics of the entanglement spectrum in spin chains, *Journal Of Statistical Mechanics* **2014** (2014) 06001.

<https://arxiv.org/abs/1311.5509>

[18] M.S. Naseri, G.I. Japaridze, S MahdaviFar, and SF Shayesteh, Magnetic properties of the spin  $S= 1/2$  Heisenberg chain with hexamer modulation of exchange, *Journal Of Physics: Condensed Matter* (2012) 116002.

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-8984/24/11/116002/meta>

[19] H. Li, F.D. M. Haldane, Entanglement Spectrum as a Generalization of Entanglement Entropy: Identification of Topological Order in Non-Abelian Fractional Quantum Hall Effect States, *Physical Review Letter* **101** (2008) 010504.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.010504>

[13] K. Hida, K. Takano, H. Suzuki, Topological Phases of the Spin-1/2 Ferromagnetic-Antiferromagnetic Alternating Heisenberg Chain with Frustrated Next-Nearest-Neighbour Interaction, *Journal Of Physics Society Of Japan* **82**, (2013) 064703.

<https://doi.org/10.7566/JPSJ.82.064703>

[14] H.H. Tu, R. Or'us, Intermediate Haldane phase in spin-2 quantum chains with uniaxial anisotropy, *Physical Review B* **84**, (2011) 140407.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.140407>

[15] W. Li, A. Weichselbaum, J.V. Delft, Identifying Symmetry-Protected Topological Order by Entanglement Entropy, *Physical Review B* **88** (2013) 245121.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.245121>

[16] K. Hida, Topological Phases of Spin-1/2 Ferromagnetic–Antiferromagnetic Alternating Heisenberg Chains with Alternating Next-Nearest-Neighbour Intera-