

Cosmic future singularities in Rastall cosmology

Hooman Moradpour*

Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragha (RIAAM), University of Maragheh, P.O. Box 55136-553, Maragheh, Iran

Received: 16.11.2019 Final revised: 27.04.2020 Accepted: 21.09.2020

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15927](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15927)

Abstract

In this paper, after addressing various future singularities, predicted for Cosmos, an introductory note on Rastall theory is provided. Thereinafter, considering a flat Universe, the Friedmann equations of Rastall theory are derived, and the possibility of obtaining various singularities are studied in two cases. In the first case, the cosmic fluid is an isotropic and homogenous fluid while the ratio of its pressure and density is constant. In the second case, the mentioned ratio is not always constant and Universe evolves with a specified rate. The study claims that whereas it is not predicted any future singularity for the first model of cosmos, some types of future singularities may be inevitable in the second one.

Keywords: Cosmology, Singularity, Rastall theory

* hn.moradpour@maragheh.ac.ir



تکینگی‌های آتی کیهانی در کیهان‌شناسی راستال

هومان مرادپور*

گروه پژوهشی نجوم و اخترفیزیک نظری و تجربی، مرکز تحقیقات نجوم و اخترفیزیک، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

دریافت: 1398/08/25 ویرایش نهایی: 1399/02/08 پذیرش: 1399/06/31.....

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15927](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15927)

چکیده

در این مقاله، پس از معرفی انواع تکینگی‌هایی که برای آینده کیهان پیش‌بینی می‌شوند، درآمدی مختصر بر نظریه راستال ارائه می‌شود. در ادامه، با استفاده از معادلات فریدمان متناظر با جهانی تخت در نظریه راستال، امکان حصول تکینگی‌های آتی مختلف را در دو حالت بررسی می‌کنیم. ابتدا زمانی که کیهان با سیالی همگن و همسانگرد که نسبت فشار به چگالی انرژی آن ثابت است و سپس در حالتی که این نسبت همواره ثابت نیست و کیهان با آهنگ خاصی تحول می‌یابد. در حالی که در حالت اول تکینگی‌ای برای آینده کیهان پیش‌بینی نمی‌شود، در حالت دوم برخی از انواع تکینگی امکان وقوع خواهند داشت.

کلیدواژگان: کیهان‌شناسی، تکینگی، تئوری راستال

مقدمه

بررسی کیهان و تحولات آن مبتنی بر درک انسان از گرانس می‌باشد.

به دنبال ارائه نظریه نسبیت عام⁴ توسط آلبرت اینشتین⁵، کیهان‌شناسی متناظر با این نظریه مورد بررسی قرار گرفت که موفقیت‌های چشمگیری نیز در پی داشت [1]. آنچه از آن امروزه به عنوان کیهان‌شناسی استاندارد یاد می‌شود، مبتنی بر نظریات نسبیت عام و ذرات بنیادی⁶ (که خود متکی بر نظریه میدان‌های کوانتومی⁷ می‌باشد) است و متریک⁸ فریدمان-لومتر-رابرتسون-

آنچه از سقف آسمان که تاکنون در تیررس بشر قرار گرفته است حکایت از آن دارد که این بخش از کیهان¹ حدود 10^{12} کهکشان² را شامل می‌شود که بسته به ابعادشان، تعداد 10^7 تا 10^{15} ستاره را در بر می‌گیرند. به عنوان مثال، تعداد ستارگان کهکشان راه شیری³، که خورشید ما تنها یکی از ستارگان آن است، از مرتبه 10^{11} می‌باشد. گرانس ستون فقرات تحول کیهان به عنوان یک سیستم پیچیده بس‌ذره‌ای است و لذا از این منظر،

* نویسنده مسئول: hn.moradpour@maragheh.ac.ir

¹ Cosmos

² Galaxy

³ Milky Way

⁴ General Relativity

⁵ A. Einstein

⁶ Particle Physics

⁷ Quantum Field Theory

⁸ Metric



گرفته بشود و بنابراین تکینگی را به صورت زیر تعریف می‌کند تا تأکیدی باشد بر اینکه تکینگی (در صورت وجود) همواره بخشی از فضا-زمان است و نباید از آن جدا گردد [5]:

یک فضا-زمان دارای ژئودوزیک‌های⁶ زمان-مانند⁷ و نور-مانند⁸ ناکامل⁹ تکین است، چنانچه نتوان آن را در یک فضا-زمان بزرگتر غوطه ور کرد.

این بیان از تکینگی همخوان با نظر تیپلر¹⁰ درباره اجتناب ناپذیر بودن تکینگی در جواب‌های (فضا-زمان) واقعی می‌باشد [6]. بنا به نظریات تکینگی هاوکینگ و پن روز¹¹، وجود یک تکینگی در فضا-زمان حداقل محصول یکی از سه شرط زیر است [5]:

1- شرایط انرژی.

2- شرایط کلی حاکم بر فضا-زمان از قبیل اینکه نباید در آن ژئودوزیک بسته زمان-مانند وجود داشته باشد.

3- گرانش در ناحیه‌ای از فضا-زمان به اندازه‌ای قوی است که چیزی از آن منطقه نمی‌تواند فرار کند.

نکات فراوانی پیرامون ارتباط تکینگی با آنتروپی و مکانیک کوآنتومی وجود دارد و حتی امید می‌رود تا با درک بهتر تکینگی‌ها (به‌عنوان مناطقی که قوانین جاری فیزیکی در آنها برقرار نیست)، خواص و شرایط حصولشان، بتوانیم به درک ارتباط بین گرانش و مکانیک کوآنتومی نائل شویم یا حداقل نزدیکتر شویم [5].

در سایه ویژگی‌های تکینگی‌های رخ داده در کیهان و همچنین آن دسته از تکینگی‌هایی که ممکن است در

واکر¹ (FLRW) به‌عنوان یک جواب دینامیکی²، همگن³ و همسانگرد⁴ نسبت عام نقشی محوری در آن ایفا می‌کند [1].

از سوی دیگر، مشاهدات مختلف نشان می‌دهند که جهان در حال تجربه یک انبساط تند شونده می‌باشد [2-4] و با وجود تمام توفیقات کیهان‌شناسی استاندارد، در عمل نزدیک به 95% کیهان (در این چارچوب) هنوز ناشناخته مانده است [1]. این بخش ناشناخته خود به دو قسمت ماده و انرژی تاریک تقسیم می‌شود که چون برهم‌کنش گرانشی محسوسی با بقیه اجزاء کیهان ندارند، تاکنون به‌طور مستقیم مشاهده و اندازه‌گیری نشده‌اند [1]. در چارچوب کیهان‌شناسی استاندارد، انبساط تند شونده جهان با در نظر گرفتن منبعی از انرژی با چگالی ρ که فشار آن (p) شرط

$\rho < -\frac{1}{3}\rho$ را ارضا می‌کند، قابل حصول است [1].

شایان ذکر است که، در این چارچوب، مشاهدات در مورد شرایط کنونی کیهان الزام می‌دارد که انرژی تاریک باید در شرط $p \leq -\frac{2}{3}\rho$ صدق کند تا بتواند با وضعیت کنونی انبساط تند شونده کیهان همخوان باشد [1]. در کیهان‌شناسی استاندارد، شرایط انرژی توسط سیال حمایت کننده انبساط تند شونده برآورده نمی‌شوند [1].

به باور بسیاری، تکینگی به‌عنوان ناحیه‌ای انگاشته می‌شود که در آن، انحناء بسیار بزرگ و عموماً واگرا می‌گردد [5]. بنا به نظر هاوکینگ⁵ این تعریف باعث می‌شود تا در بسیاری از موارد فقط قسمت‌های غیر تکین یک فضا-زمان، به‌عنوان کل فضا-زمان در نظر

⁷ Time like

⁸ Null

⁹ Incomplete

¹⁰ Tipler

¹¹ Penrose

¹ Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

² Dynamic

³ Homogenous

⁴ Isotropic

⁵ Hawking

⁶ Geodesics

عام [19] و بدین شیوه تعابیر و منابع دیگری برای انرژی تاریک و در کل، قسمت تاریک کیهان ارائه شده است [19 و 20]. یکی از شالوده‌های نظریه نسبیت عام، تعمیم پایستگی تانسور انرژی-تکانه به فضا-زمان خمیده می‌باشد، اصلی که تا پیش از آن، تنها در آزمایشگاه (فضا-زمان تخت) تحقیق و بررسی شده بود [19-26].

در گرانش راستال⁶ (بر خلاف نسبیت عام) فضا-زمان و ماده به صورت غیر کمینه جفت می‌شوند و این باعث می‌شود که تانسور انرژی-تکانه در فضا-زمان خمیده پایسته نماند [22]. البته برای تعمیم‌های آن این امکان برقرار است [25]. نشان داده شده است که جمله تصحیحی راستال به توزیعی توانی برای جرم منجر می‌شود که از مشاهدات مربوط به اثر لنز قوی گرانشی⁷ انتظار می‌رود و نتیجتاً این جمله می‌تواند نقش ماده تاریک را بر عهده بگیرد [27]. در کل، این نظریه با داده‌های مربوط به لنز گرانشی سازگار است [29 و 28]. این نظریه همچنین با داده‌های مختلف مربوط به منظومه شمسی از قبیل انحراف نور⁸، جابجایی حضیض⁹ و تأخیر زمانی¹⁰ در توافق می‌باشد و تمام این داده‌ها تصحیح راستال بر نظریه نسبیت عام را تأیید می‌کنند [30].

ذکر این نکته لازم است که در چارچوب راستال، در حالی که تورم اولیه¹¹ را می‌توان به جمله راستال نسبت داد (بدون نیاز به یک میدان تورمی¹²) [25]، کماکان به انرژی تاریک برای توصیف فاز کنونی کیهان نیاز داریم [31 و 32]. البته یک تعمیم ساده از این نظریه این امکان را می‌دهد که فاز شتابدار کنونی عالم را نیز مدیون جمله

آینده کیهان حادث شوند، می‌توان درباره رفتار و معادلات حاکم بر تحول کیهان پیش‌بینی بهتری داشت و به مدل مقبول‌تری برای کیهانشناسی دست یافت [5-7]. در چارچوب کیهانشناسی استاندارد، به نظر می‌رسد که در صورت تداوم روند کنونی انبساط تند شونده کیهان، انرژی تاریک جهان را به سمت تکنیکی‌هایی سوق دهد [8-18].

تکنیکی‌های آتی کیهانی که با تکیه بر متریک FLRW با عامل مقیاس $a(t)$ ، پیش‌بینی شده‌اند عبارتند از:

1- مه چاک¹: این تکنیکی زمانی حاصل می‌شود که چگالی انرژی، اندازه فشار و عامل مقیاس در زمان محدودی چون t_s واگرا می‌شوند [8].

2- آتی ناگهانی²: در این حالت، در زمان محدود t_s ، تنها اندازه فشار واگرا می‌شود [9].

3- انجماد بزرگ³: که نتیجه واگرا شدن چگالی انرژی و اندازه فشار (برخلاف عامل مقیاس) در زمان محدود t_s می‌باشد [10].

4- توقف بزرگ⁴: چگالی انرژی و فشار به صفر میل می‌کنند، در حالی که زمان مقدار محدود t_s را اختیار می‌کند و عامل مقیاس نیز محدود می‌ماند [11].

5- آتی ناگهانی تعمیم یافته⁵: زمانی رخ می‌دهد که مشتقات پارامتر هابل واگرا شوند، در حالی که فشار، چگالی، زمان و عامل مقیاس محدود مانده‌اند [17 و 18].

6- پارامتر حالت: هنگامی که شرایط توقف بزرگ برقرار شود، چنانچه پارامتر $w = \frac{p}{\rho}$ واگرا شود، آنگاه این تکنیکی رخ می‌دهد. [13].

از سوی دیگر، عدم مشاهده مستقیم انرژی و ماده تاریک، انگیزه‌ای شده است برای تعمیم نظریه نسبیت

⁷ Strong gravitational lensing

⁸ Deflection of light

⁹ Precession of perihelion

¹⁰ Time delay

¹¹ Primary inflation

¹² Inflationary field

¹ Big Rip

² Sudden future

³ Big freeze

⁴ Big brake

⁵ Generalized sudden future

⁶ Rastall

راستال با به چالش کشیدن پایستگی تانسور انرژی-
تکانه در فضا-زمان خمیده، پیشنهاد داد که

$$T_{\mu\nu}^{;\mu} = \lambda R_{,\nu} \quad 1$$

که در آن R ، λ و $T_{\mu\nu}$ به ترتیب بیانگر عدد ریچی³، پارامتر راستال و تانسور انرژی-تکانه می‌باشند. صراحتاً در فضا-زمان تخت که برای آن $R=0$ ، تانسور انرژی-تکانه پایسته می‌ماند [22]. در نهایت معادلات میدان راستال شکل زیر را به خود می‌گیرد [22]

$$G_{\mu\nu} + k\lambda R g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad 2$$

که در آن k ، ثابت گرانشی راستال نام دارد، $G_{\mu\nu}$ تانسور اینشتین است و $g_{\mu\nu}$ متریک فضا-زمان می‌باشد.

تکینگی‌های آتی در کیهانشناسی راستال

از آنجا که داده‌های WMAP به جهانی تخت اشاره می‌کنند [1]. در این قسمت متریک FLRW تخت را در نظر می‌گیریم که توسط سیالی همگن و همسانگرد با چگالی انرژی ρ و فشار p پر شده است. در این

حالت، با تعریف $\gamma \equiv k\lambda$ و $H = \frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}$ (پارامتر هابل)، معادلات کیهانشناختی نظریه راستال به صورت زیر به دست می‌آیند [24]

$$(12\gamma - 3)H^2 + 6\gamma\dot{H} = -k\rho, \quad 3$$

$$(12\gamma - 3)H^2 + (6\gamma - 2)\dot{H} = kp$$

برای معادله پیوستگی نیز خواهیم داشت:

$$\frac{3\gamma - 1}{4\gamma - 1}\dot{\rho} + \frac{3\gamma}{4\gamma - 1}\dot{p} + 3H(\rho + p) = 0 \quad 4$$

برای سیالی با پارامتر حالت ثابت و مخالف -1 ، معادلات بالا منجر به جواب‌های زیر می‌شوند:

راستال بدانیم [25]. در واقع، مادامی که کیهان را اشباع شده از سیال‌هایی با پارامتر حالت ثابت تصور کنیم، توصیف راستال از کیهان کنونی تا مرتبه اول اختلال با توصیف کیهانشناسی استاندارد یکسان است و تنها در مرتبه‌های بعدی اختلال، اختلافات واضح می‌شوند [32 و 33]، نتیجه‌ای که با مشاهدات مختلف کیهانی نیز سازگار است [34] و در رابطه با تشکیل ساختار در مقیاس‌های مختلف نیز تکرار می‌شود [33 و 35].

همچنین، این نظریه نسبت به کیهانشناسی استاندارد توصیف بهتری از دوران ماده غالب¹ ارائه می‌دهد [36] و با داده‌های مربوط به سنتز هسته‌ای هلیوم² در توافق می‌باشد [37]. در مقام قیاس با کیهانشناسی استاندارد، عدم وجود مسئله آنتروپی و سن نکات جالب توجه دیگر کیهانشناسی راستال است [38]. می‌توان خلاصه‌ای مفید از این نظریه و مراجع مناسب دیگری در رابطه با کارهای پیشین صورت گرفته در چارچوب راستال را یافت [26].

در این مقاله، با توجه به موفقیت‌های کیهانشناسی راستال [26]، هدف بررسی تکینگی‌های آتی در کیهانشناسی متناظر با نظریه راستال می‌باشد. در واقع، به دنبال پاسخی برای این پرسش هستیم که در قیاس با کیهانشناسی استاندارد، چه نوعی از تکینگی‌های آتی در کیهانشناسی راستال محتمل هستند؟ بدین منظور، پس از معرفی معادلات میدان راستال در بخش بعد، به بررسی امکان حصول تکینگی در کیهان تبعیت کننده از معادلات راستال (بخش سوم) می‌پردازیم. بخش آخر نیز به جمع‌بندی اختصاص داده شده است. در این مقاله واحد $8\pi G = c = 1$ اتخاذ شده است که در آن G ثابت جهانی گرانش و c سرعت نور می‌باشد.

مروری بر معادلات راستال

³ Ricci scalar

¹ Matter dominant era

² Helium nucleosynthesis

حصول تکینگی در آینده محتمل است [15 و 17 و 18].
برای پارامتر هابل و مشتق زمانی آن، با محاسبات ساده خواهیم داشت:

$$H = \frac{m}{t} - \frac{n}{t_s} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{n-1}, \quad 7$$

$$\dot{H} = -\frac{m}{t^2} + \frac{n(n-1)}{t_s^2} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{n-2}$$

تلفیق این رابطه با معادلات فریدمان متناظر با نظریه راستال 3، به روابط

$$\rho(t) = 3\left[\frac{m}{t^2}(2\gamma(1-2m) + m) - \frac{2mn(1-4\gamma)}{tt_s} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{n-1}\right] \quad 8$$

$$+ \frac{n}{t_s^2} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{n-2} (2\gamma(1-n) + (1-4\gamma)n \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^n) \frac{6\gamma-1}{4\gamma-1}$$

و

$$p(t) = \frac{6\gamma-1}{4\gamma-1} \left[\frac{m}{t^2} (3m(4\gamma-1) - 2(3\gamma-1)) + \frac{6mn(1-4\gamma)}{tt_s} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{n-1} + \frac{n}{t_s^2} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{n-2} (3n(4\gamma-1) \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^n + 2(3\gamma-1)(n-1)) \right] \quad 9$$

برای به ترتیب چگالی انرژی و فشار سیال کیهانی منجر می‌شود.

در روابط بالا، با استفاده از حد نیوتنی معادلات میدان راستال [22]، k را به صورت $\frac{4\gamma-1}{6\gamma-1}$ جای گذاری کرده‌ایم. حال برای تکینگی‌های آتی احتمالی کیهان در زمان t_s خواهیم داشت:

$$H^2 = \frac{k(3\gamma(1+w)-1)}{3(4\gamma-1)} \rho, \quad 5$$

$$\rho = \rho_0 a^{\frac{3(1+w)(4\gamma-1)}{3\gamma(1+w)-1}},$$

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2(3\gamma(1+w)-1)}{3(1+w)(4\gamma-1)}}$$

که در آن ρ_0 ، a_0 و t_0 ثوابت انتگرال‌گیری هستند و ρ_0 ، a_0 به ترتیب مقدار چگالی و عامل مقیاس را در زمان t_0 نشان می‌دهند. برای حالتی که $w = -1$ ، چگالی و پارامتر هابل H مقادیر ثابتی را اتخاذ می‌کنند

که چنانچه $\rho > 0$ $\frac{k}{3(1-4\gamma)}$ آنگاه با جهان دوسپته¹

روبرو خواهیم بود. با توجه به حد نیوتنی نظریه راستال

$$[22]، می‌توان شرط آخر را به رابطه $\frac{\rho}{6\gamma-1} > 0$$$

تقلیل داد که صراحتاً ادعا می‌کند که برخلاف کیهانشناسی استاندارد، چگالی منفی نیز (بسته به مقدار γ) می‌تواند فاز دوسپته را در چارچوب راستال پشتیبانی کند. برای حالت $w \neq -1$ ، $\rho, p \propto t^{-2}$ ، صراحتاً بیان می‌کند که در زمان محدودی در آینده، هیچکدام واگرا یا صفر نخواهند شد.

برای ادامه کار، عامل مقیاس

$$a(t) = a_s \left(\frac{t}{t_s}\right)^m \exp\left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^n, \quad 6$$

را در نظر می‌گیریم که اولین بار در [39] معرفی شده است. این عامل مقیاس در کیهانشناسی‌های برآمده از نظریات مختلف گرانشی توجه زیادی را به خود جلب کرده است و تکینگی‌های متناظر با آن در چارچوب‌های مختلف کیهانی بررسی شده‌اند [15 و 17 و 18]. در این حالت t_s و a_s مقادیر محدود زمان و عامل مقیاس می‌باشند که به‌ازای آنها و بسته به مقادیر n و m ،

¹ de-Sitter

استاندارد، این حالت در کیهان‌شناسی استاندارد از یک تکینگی نوع ششم به‌ازای $t \rightarrow t_s$ پرده بر می‌دارد.

4- تکینگی نوع ششم نیز حاصل نخواهد شد مگر آنکه $m=0$ ، $2 < n$ و $\gamma=0$ که فی‌الواقع چارچوب کیهان‌شناسی استاندارد است و همچون حالت قبل می‌باشد [17].

5- به‌ازای مقادیر $n < 0$ نیز، هرگاه $t \rightarrow t_s$ ، تکینگی مه‌چاک حاصل می‌شود و در این حد خواهیم داشت $w \rightarrow -1$. این نتیجه مستقل از مقدار γ می‌باشد و برای کیهان‌شناسی استاندارد نیز برقرار است.

جمع‌بندی

پس از معرفی انواع تکینگی‌های آتی کیهانی، به مرور معادلات میدان راستال، که در آن برخلاف نظریه نسبیت عام، هندسه و ماده به‌طور غیر کمینه جفت می‌شوند، پرداخته شد. مشاهده کردیم که اگر سیالی ایده‌آل (با پارامتر حالت ثابت) در پس زمینه کیهانی وجود داشته باشد، آنگاه آینده کیهان میرا از هرگونه تکینگی خواهد بود. همچنین نتایج گواه بر این نکته هستند که چنانچه متریکی با عامل مقیاس 6 را در نظر بگیریم، آنگاه پارامتر حالت سیال کیهانی (که همگن و هسانگرد است) ثابت نخواهد شد و برخی از انواع تکینگی‌ها در آتیه کیهان ممکن خواهند بود. در هر مورد، تفاوت با پیش‌بینی‌های مبتنی بر کیهان‌شناسی استاندارد نیز حدالامکان اشاره شد. طبیعتاً شناخت بهتر از فاز انبساط تند شونده کنونی کیهان و عامل آن می‌تواند ما را در انتخاب نظریه گرانشی کامل تر و نتیجتاً دست‌یابی به پیشگویی بهتر و دقیق‌تر از رفتار آتی کیهان و تکینگی‌های آن یاری رساند.

1- زمانیکه $0 < n \leq 1$: در این حالت مستقل از مقدار m ، چگالی انرژی، اندازه فشار و مشتق پارامتر هابل (برخلاف پارامتر حالت) واگرا خواهند شد که بیانگر این موضوع است که تکینگی نوع سوم و یا همان انجماد بزرگ اتفاق خواهد افتاد. این تکینگی در کیهان‌شناسی استاندارد ($\gamma=0$) نیز در همین شرایط اتفاق خواهد افتاد، البته با این تفاوت که باید $n \neq 1$. تفاوت دیگر آنها در این است که در کیهان‌شناسی راستال سرعت واگرایی در این کمیات بیشتر و از مرتبه $(1 - \frac{t}{t_s})^{n-2}$ است در حالی که در حالت استاندارد از مرتبه $(1 - \frac{t}{t_s})^{n-1}$ می‌باشد. همچنین در حالی که در حالت استاندارد علامت ρ و p وقتیکه $t \rightarrow t_s$ به‌مقدار m وابسته است، در راستال، این علامت تابع مقدار γ است. اما این موضوع تغییری در ماهیت تکینگی مزبور ایجاد نمی‌کند [15 و 17].

2- $1 < n < 2$: درحالی که در کیهان‌شناسی استاندارد، این مقادیر به‌طور مستقل از m به تکینگی آتی ناگهانی منجر می‌شوند [17]، در چارچوب راستال تکینگی نوع سوم یا همان انجماد بزرگ حاصل خواهد شد.

3- هرگاه $m=0$ و $n=2$ ، تکینگی نوع چهارم یا همان توقف بزرگ اجتناب‌ناپذیر خواهد بود و در این حالت خواهیم داشت:

$$w = \frac{3(4\gamma - 1)(1 - \frac{t}{t_s})^2 + (3\gamma - 1)}{3[(1 - 4\gamma)(1 - \frac{t}{t_s})^2 - \gamma]}$$

10

که صراحتاً به‌ازای $t \rightarrow t_s$ واگرا نخواهد شد. در مقام قیاس با کیهان‌شناسی مبتنی بر معادلات فریدمان مستخرج از نظریه نسبیت عام یا همان کیهان‌شناسی

مرجع‌ها

- [8] R.R. Caldwell, A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state, *Physics Letters B* **545** (2002) 23-29.
[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)02589-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02589-3)
- [9] J.D. Barrow, Sudden future singularities, *Classical and Quantum Gravity* **21** (2004) L79-L82.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/11/L03>
- [10] S. Nojiri, S.D. Odintsov, Final state and thermodynamics of a dark energy universe, *Physical Review D* **70** (2004) 103522.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.103522>
- [11] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, Tachyons, scalar fields, and cosmology, *Physical Review D* **69** (2004) 123512.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.123512>
- [12] J.D. Barrow, C.G. Tsagas, New Isotropic and Anisotropic Sudden Singularities, *Classical and Quantum Gravity* **22** (2005) 1563-1571.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/9/006>
- [13] M.P. Dabrowski, T. Denkiwicz, Barotropic index w-singularities in cosmology, *Physical Review D* **79** (2009) 063521.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.063521>
- [14] D. Pavon, W. Zimdahl, A thermodynamic characterization of future singularities? *Physics Letters B* **708** (2012) 217.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.01.074>
- [15] F. Shojai, A. Shojai, M. Sanati, Regularizing future cosmological singularities with varying speed
- [1] M. Roos, *Introduction to Cosmology*, John Wiley and Sons, UK, (2003).
- [2] A.G. Riess et al., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *The Astronomical Journal* **116** (1998) 1009-1038.
<https://doi.org/10.1086/300499>
- [3] S. Perlmutter et al., Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, *The Astrophysical Journal* **517** (1999) 565-586.
<https://doi.org/10.1086/307221>
- [4] P.A.R. Ade et al., *Planck* 2013 results. XVI. Cosmological parameters, *Astronomy and Astrophysics* **571** (2014) A16.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321591>
- [5] S.W. Hawking, R. Penrose, *The Nature of Space and Time*. Princeton University Press, (2010).
- [6] F.J. Tipler, On the nature of singularities in general relativity, *Physical Review D* **15** (1997) 942-945.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.942>
- F.J. Tipler, Singularities in conformally flat spacetimes, *Physics Letters A* **64** (1977) 8-10.
[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(77\)90508-4](https://doi.org/10.1016/0375-9601(77)90508-4)
- [7] C.J.S. Clarke, A. Krolak, Conditions for the occurrence of strong curvature singularities, *Journal of Geometric and Physics* **2** (1985) 127-143.
[https://doi.org/10.1016/0393-0440\(85\)90012-9](https://doi.org/10.1016/0393-0440(85)90012-9)
- A Krolak, Towards the proof of the cosmic censorship hypothesis, *Classical and Quantum Gravity* **3** (1986) 267-280.
<https://doi.org/10.1007/BF00762469>

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.6.3357>

[23] T. Koivisto, A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities, *Classical and Quantum Gravity* **23** (2006) 4289.

<https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/12/N01>

[24] O. Bertolami, C.G. Boehmer, T. Harko, F.S.N. Lobo, Extra force in f(R) modified theories of gravity, *Physical Review D* **75** (2007) 104016.

<https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/4/046902>

[25] H. Moradpour, Y. Heydarzade, F. Darabi, I.G. Salako, A generalization to the Rastall theory and cosmic eras, *The European Physical Journal C* **77** (2017) 259.

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4811-z>

[26] F. Darabi, H. Moradpour, I. Licata, Y. Heydarzade, C. Corda, Einstein and Rastall theories of gravitation in comparison, *The European Physical Journal C* **78** (2018) 25.

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5502-5>

[27] R. Li, J. Wang, Z. Xu, X. Guo, Constraining the Rastall parameters in static space–times with galaxy-scale strong gravitational lensing, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **486** (2019) 2407.

<https://doi.org/10.1093/mnras/stz967>

[28] A.M.M. Abdel-Rahman, Gravitational Lensing Effects in a Modified General Relativity Model, *Astrophysics and Space Science* **278** (2001) 383.

<https://doi.org/10.1023/A:1013151416526>

[29] A.M.M. Abdel-Rahman, M.H.A. Hashim, Gravitational Lensing in A Model With Non-Interacting Matter and Vacuum Energies, *Astrophysics and Space Science* **298** (2005) 519-523.

<https://doi.org/10.1007/s10509-005-5839-3>

of light, *The European Physical Journal C* **75** (2015) 568.

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3796-8>

[16] H. Moradpour, R.C. Nunes, E.M. Abreu, J.A. Neto, A note on the relations between thermodynamics, energy definitions and Friedmann equations, *Modern Physics Letters A* **32** (2017) 1750078.

<https://doi.org/10.1142/S021773231750078X>

[17] M. Szydłowski, A. Stachowski, Singularities in particle-like description of FRW cosmology, *The European Physical Journal C* **78** (2018) 552.

<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6036-1>

[18] M.P. Dabrowski, K. Marosek, A. Balcerzak, Standard and exotic singularities regularized by varying constants, arXiv:1308.5462.

[19] S. Capozziello, V. Faraoni, Beyond Einstein Gravity, Springer, Dordrecht, (2010); K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, S.D. Odintsov, Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests, *Astrophysics and Space Science* **342** (2012) 155-228.

<https://doi.org/10.1007/s10509-012-1181-8>

[20] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury, M. Trodden, Beyond the Cosmological Standard Model, *Physics Report* **568** (2015) 1-98.

<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.12.002>

[21] K. Koyama, Cosmological tests of modified gravity, *Reports on Progress in Physics* **79** (2016) 046902.

<https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/4/046902>

[22] P. Rastall, Generalization of the Einstein theory, *Physical Review D* **6** (1972) 3357.

- [35] A.H. Ziaie, H. Moradpour, S. Ghaffari, Gravitational Collapse in Rastall gravity, *Physics letters B* **793** (2019) 276.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.055>
- [36] A.S. Al-Rawaf, O.M. Taha, Cosmology of general relativity without energy-momentum conservation, *General Relativity and Gravitation* **28** (1996) 935-952.
<https://doi.org/10.1007/BF02113090>
- [37] A.S. Al-Rawaf, Modified GR and Helium Nucleosynthesis, *International Journal of Modern Physics D* **14** (2005) 1941-1945.
<https://doi.org/10.1142/S021827180500753X>
- [38] J.C. Fabris, R. Kerner, J. Tossa, Perturbative analysis of generalized Einstein's theories, *International Journal of Modern Physics D* **9** (2000) 111-125.
<https://doi.org/10.1142/S0218271800000116>
- [39] M.P. Dabrowski, K. Marosek, Regularizing cosmological singularities by varying physical constants, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **02** (2013) 012.
<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/012>
- [30] T. Manna, F. Rahaman, M. Mondal, Solar System test in Rastall gravity, *Modern Physics Letters A* **35**, (2019) 2050034.
<https://doi.org/10.1142/S0217732320500340>
- [31] M. Capone, V.F. Cardone, M.L. Ruggiero, The possibility of an accelerating cosmology in Rastall's theory, *Journal of Physics; Conference Series* **222** (2010) 012012.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/222/1/012012>
- [32] C.E.M. Batista et al., Rastall cosmology and the Λ CDM model, *Physical Review D* **85** (2012) 084008.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.084008>
- [30] A.H. Ziaie, S. Ghaffari, H. Shabani, Effects of Rastall parameter on perturbation of dark sectors of the Universe, arXiv: 1909.12085.
- [34] Akarsu Ö. et al., Rastall gravity extension of the standard Λ CDM model: Theoretical features and observational constraints, *The European Physical Journal C* **80** (2020) 1050.
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-08586-4>