Non-Singular gravitational collapse in generalized Rastall theory

Amir Hadi Ziaie*

Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragha (RIAAM), University of Maragheh, P.O. Box 55136-553, Maragheh, Iran

Received: 21.06.2020 Final revised: 03.09.2020 Accepted: 21.09.2020

Doi link: 10.22055/JRMBS.2020.15931

Abstract

In the present work we study the process of gravitational collapse of a homogeneous dust in the framework of generalized Rastall gravity. In this theory, the Rastall coupling parameter is a variable and since this parameter represents the measure of mutual interaction between matter and geometry it is expected that such an interaction affects the collapse dynamics and its end product. Motivated by this idea, we search for non-singular solutions for the interior spacetime of the collapsing dust fluid. We observe that this scenario is feasible for a suitable choice of the functionality of the coupling parameter such that the singularity present in homogeneous dust collapse is replaced by a non-singular bounce where the energy density and spacetime curvature are finite. We also observe that such a variable coupling affects the dynamics of apparent horizon so that, in comparison to the singular case where the apparent horizon covers the spacetime singularity, the apparent horizon can be delayed or failed to form providing thus the possibility of detecting the bouncing object by external observers.

Keywords: Gravitational collapse, Spacetime singularity, Singularity avoidance, Modified gravity

*Corresponding Author: ah.ziaie@maragheh.ac.ir

بررسی رمبش گرانشی غیر-تکین در نظریهٔ راستال تعمیم یافته

امیرهادی ضیائی*

گروه پژوهشی نجوم و اخترفیزیک نظری و تجربی، مرکز تحقیقات نجوم و اخترفیزیک، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

دریافت: 1399/04/01، ویرایش نهائی: 1399/06/13، پذیرش: 1399/06/31

Doi link: 10.22055/JRMBS.2020.15931

چکیده

در این مقاله، به بررسی فرایند رمبش گرانشی یک سیال غبار-گونهٔ همگن در نظریهٔ گرانشی راستال تعمیم یافته می‌پردازیم. در این نظریه پارامتر جفت شدگی راستال متغیر است و از آنجایی‌که این پارامتر نمایندهٔ میزان برهم‌کنش دوطرفه بین ماده و هندسه است، لذا انتظار می‌رود که یک چنین برهم‌کنش متغیری در دینامیک رمبش و محصول نهایی آن تأثیرگذار باشد. با الهام گرفتن از این ایده، به‌دنبال حل‌های رمبش غیر-تکین برای فضا-زمان داخلی یک غبار در حال رمبش می‌گردیم. مشاهده می‌کنیم که انتخاب مناسبی از تابعیت پارامتر جفت‌شدگی، این امکان را فراهم می‌سازد به‌طوری‌که تکینگی فضا-زمانی حاضر در مدل رمبش غبار همگن با یک جهش غیر تکین که در آن چگالی انرژی و انحنای فضا-زمان متناهی است جایگزین می‌گردد. همچنین مشاهده می‌شود که اثرات این جفت‌شدگی متغیر روی دینامیک افق ظاهری تأثیر دارد به‌گونه‌ای که برخلاف حالت تکین که در آن افق ظاهری تکینگی فضا-زمانی را می‌پوشاند، در حالت غیر-تکین تشکیل افق ظاهری به تأخیر افتاده و یا اینکه تشکیل نمی‌گردد و بنابراین امکان مشاهدهٔ توده درحال جهش توسط ناظرهای خارجی وجود دارد.

کلیدواژگان: رمبش گرانشی، تکینگی فضا-زمانی، نظریه‌های تعمیم یافته گرانش

مقدمه

مسألهٔ سرنوشت نهایی یک ستارهٔ وزین در پایان حیاتش وقتی که تحت تأثیر گرانش خود، در خود فرو می‌ریزد یکی از با اهمیت‌ترین مسائل در نظریهٔ گرانش و اختر فیزیک است و زیربنای فیزیک سیاه چاله‌ها می‌باشد. با پایان یافتن سوخت هسته‌ای ستاره که آن را برای میلیونها سال پایدار نگه داشته است، ستاره قادر نخواهد بود در مقابل جاذبهٔ گرانشی پایداری کند و تحت فرایند رمبش گرانشی قرار می‌گیرد. در چارچوب نظریهٔ نسبیت عام، نشان داده شده است که فرایند رمبش تا جایی پیش می‌رود که منجر به تشکیل تکینگی فضا-زمانی[1] شود، رویدادی در فضا-زمان که در آن چگالی‌ها و انحنای فضا-زمان به بینهایت میل می‌کنند و نسبیت عام کلاسیک قادر به پیش بینی وقایع در یک چنین رویدادهایی نیست [1و2]. از لحاظ فیزیکی، وقوع تکینگی در یک نظریهٔ کلاسیکی بدین معناست که نظریهٔ موجود فراتر از دامنهٔ اعتبار آن به‌کارگرفته شده است. بنابراین برای توصیف بهتر پدیده، بایستی نظریه‌ای جایگزین و با کاربرد وسیعتری به‌کار گرفته شود. وقوع تکینگی در نسبیت عام بدین معنی نیست

* نویسنده مسئول: ah.ziaie@maragheh.ac.ir

[1] Spacetime singularity

که این نظریه مناسب نمی‌باشد، که در واقع دامنهٔ پدیده‌های فیزیکی که این نظریه می‌تواند به آنها اعمال شود را محدود می‌کند. باور عمومی فیزیکدانها بر این است که در نواحی در مجاورت تکینگی‌های فضا-زمانی، رژیم‌های با انرژی بالا به‌همراه میدان گرانشی بسیار عظیم و مقیاس طول بسیار کوچک حاضرند، به‌طوری‌که، انتظار می‌رود اثرات گرانش کوآنتومی خود را نشان داده و تکینگی کلاسیک فضا-زمانی را رفع نمایند [3]. پرسشی که در اینجا مطرح می‌شود این است که وقوع تکینگی‌های فضا-زمانی در معادلات میدان اینشتین چقدر رایج است و چگونه می‌توان یک تکینگی انحنای حقیقی فضا-زمانی را آشکار نمود؟ در پاسخ به این پرسش می‌توان به سرشماری حل‌های دقیق معادلات میدان نسبیت عام پرداخت. اما چنین فرایندی به‌نظر نامعقول می‌رسد چرا که، برای یافتن چنین جواب‌هایی ناچار به ساده‌سازی معادلات میدان با در نظر گرفتن تقارن‌های فضا-زمانی هستیم. این به‌خودی خود از کلّیت مسأله کاسته و حالت‌های خاصی از مسأله را پیش روی ما می‌گذارد. از طرف دیگر تکینگی‌های ظاهر شده از میان همین حالت‌های خاص در حقیقت تکینگی ذاتی فضا زمان نیستند به‌عنوان مثال حل معروف شوارزشیلد[1] که با متریک زیر داده می‌شود را در نظر بگیرید

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (1)$$

که در آن G ثابت جهانی گرانش و c سرعت نور است. این حل توصیف کننده فضا-زمان اطراف یک توزیع جرم ایستا با تقارن کروی و جرم M است.

ملاحظه می‌کنیم که رفتار متریک فوق در نقاط $a := r = \frac{2GM}{c^2}$ و $b := r = 0$ تعریف نشده است. بدین معنی که این متریک در این دو نقطه واگرا می‌شود، بنابراین ممکن است در نگاه اول بگوییم که متریک در این دو نقطه تکین است. اما با بررسی بیشتر متوجه می‌شویم که نقطه a تنها یک تکینگی مختصاتی[2] است و تکینگی مختصاتی شکل گرفته در آن را می‌توان از طریق تبدیل مختصات ادینگتون-فینکلشتین[3] رفع نمود [4]. در سال 1932 میلادی، جرج لومیتر[4] با تعریف انحنای نرده‌ای کرچمن[5] معیاری را برای تمایز بین تکینگی مختصاتی و تکینگی ذاتی فضا-زمان ارائه نمود [5]. این کمیت به‌کمک تانسور انحنای ریمان[6] به‌صورت $K = \Re^{\alpha\beta\gamma\delta}\Re_{\alpha\beta\gamma\delta}$ تعریف می‌گردد و برای متریک1 با $\frac{1}{r^6}$ متناسب است. ملاحظه می‌کنیم که این کمیت در نقطه a متناهی است درحالی‌که در نقطه b واگرا می‌شود بنابراین، این نقطه معرّف یک تکینگی ذاتی فضا-زمان است که از طریق هیچ تبدیل مختصاتی قابل رفع نیست.

در سال‌های بین 1960 تا 1970 میلادی، مسأله وجود تکینگی‌ها در چارچوب نسبیت عام کلاسیک توسط استفان هاوکینگ[7]، راجر پنروز[8] و رابرت گراچ[9] مورد بررسی قرار گرفت [1]. نتایج کار آنها در قالب قضایای معروف تکینگی نشان داد که تحت شرایط معین فیزیکی، تکینگی‌های فضا-زمانی یک جنبه عمومی از نظریهٔ نسبیت عام می‌باشند. در واقع منشأ این قضایا در بررسی دو مسألهٔ مهم ریشه دارد. مسألهٔ اول به مبدأ عالم اشاره دارد و اینکه آیا عالم از یک تکینگی آغازین (مهبانگ[10]) به‌وجود آمده و مسألهٔ دوم به سرنوشت

[1] Schwarzschild solution
[2] Coordinate singularity
[3] Eddington-Finkelstein coordinates
[4] Georges Lemaitre
[5] Kretschmann invariant
[6] Riemann curvature tensor
[7] Stephen Hawking
[8] Roger Penrose
[9] Robert Geroch
[10] Big Bang

نهایی رمبش گرانشی ستارگان وزین برمی‌گردد و اینکه آیا سرانجام یک چنین فرایندی لزوماً تشکیل تکینگی فضا-زمانی است؟

به‌عنوان یک مدل ساده شده از فرایند رمبش، اُپنهایمر[1] و اسنایدر[2] در سال1930 رمبش گرانشی یک غبار همگن را مورد مطالعه قراردادند [6]. بررسی آنها نشان داد که با پیشرفت رمبش جاذبهٔ گرانشی افزایش یافته تا جایی‌که مرحله‌ای فرا می‌رسد که ذرات مادی و فوتون‌ها اجازهٔ فرار از سطح توده رمبنده به‌سمت ناظرهای دوردست را نمی‌یابند. به‌عبارت دیگر یک افق رویداد[3] جسم رمبنده را فراگرفته و ارتباط آن را با سایر موجودات عالم قطع می‌کند. بنابراین تکینگی تشکیل شده در رمبش غبار همگن لزوماً توسط افق رویداد پوشانیده شده و به‌عبارت دیگر محصول نهایی این فرایند رمبش تشکیل یک سیاه چاله است. پرسشی که اکنون در اینجا ممکن است پیش آید این است که آیا فرایند رمبش گرانشی لزوماً منجر به تشکیل سیاه چاله می‌شود؟ در سال 1969، راجر پنروز[4] پیشنهاد کرد که جواب پرسش فوق آری است. برطبق نظر او، تشکیل تکینگی فضا-زمانی در طول فرایند رمبش گرانشی مستلزم تشکیل افق است. بنابراین طبیعت ما را از مشاهده تکینگی فضا-زمانی منع می‌کند چراکه افق رویداد همیشه آن را می‌پوشاند. فرضیهٔ پنروز که زیربنای مطالعات نوین سیاه چاله‌ها را تشکیل می‌دهد به فرضیهٔ پوشیدگی کیهانی[5] معروف است [7]. فرضیه پوشیدگی کیهانی در واقع بیانی از ساختار علّی فضا-زمان در طول فرایند رمبش گرانشی است که می گوید: تکینگ‌های ذاتی فضا-زمان در یک فضا-زمان مجانبی تخت همیشه توسط افق رویداد یک سیاهچاله پوشانیده شده‌اند. بنابراین نواحی تکین امکان ارتباط علّی با ناظرهای دوردست را ندارند. از این بیان معمولاً به‌عنوان نسخهٔ ضعیف فرضیهٔ پوشیدگی کیهانی یاد می‌شود. نسخهٔ قوی این فرضیه بیان می‌دارد تکینگی‌های فضا-زمانی تنها توسط ناظرهایی قابل مشاهده‌اند که جهان-خط[6] های یک چنین ناظرهایی به جهان-خط تکینگی برسد [8]. برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص فرضیهٔ پوشیدگی کیهانی رجوع کنید به [9 و 10].

در طول سال‌های گذشته حل‌های متعددی از معادلات میدان نسبیت عام ارائه شده است که نمایندهٔ فضا-زمان‌های دربرگیرندهٔ تکینگی می‌باشند [11]. بنابراین پرسشی که مطرح است این است که آیا در نظریه‌های تعمیم یافتهٔ نسبیت عام امکان داشتن حل‌های غیر-تکین وجود دارد؟ در پاسخ بدین پرسش نشان داده شده که در کنار مدل‌های کوآنتومی رمبش [3و12و13] که عاری از تکینگی فضا-زمانی هستند، نظریه‌های تعمیم‌یافتهٔ گرانشی این امکان را فراهم می‌سازند [18-14].

یکی از نظریه‌های تعمیم یافتهٔ گرانشی[7] که اخیراً در کیهان‌شناسی توجه زیادی به‌خود جلب کرده نظریهٔ گرانشی راستال است [19]. همان‌طور که می‌دانیم، یکی از زیربناهای نظریهٔ نسبیت عام، اصل پایستگی تانسور انرژی–تکانه است، به‌بیان ریاضی $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}=0$ می‌باشد. در سال 1972، پیتر راستال[8] با به چالش کشیدن اصل پایستگی تانسور انرژی-تکانه، این نکته را مطرح نمود که این اصل تنها در فضا-زمان تخت یا به‌طور خاص در حد میدان‌های گرانشی ضعیف تحقیق و بررسی شده است و تعمیم این اصل از فضا-زمان

[1] Oppenheimer
[2] Snyder
[3] Event horizon
[4] Roger Penrose
[5] Cosmic censorship conjecture
[6] World-line
[7] Modified Gravity theories
[8] Peter Rastall

تخت به خمیده لزوماً نمی‌تواند درست باشد. از طرفی، یک چنین ویژگی از تانسور انرژی-تکانه با فرایند خلق ذره سازگار نیست [20،21]. او بنابراین پیشنهاد کرد که مشتق هموردای تانسور انرژی-تکانه متناسب با گرادیان یک کمیت نرده‌ای، که راستال آن را انحنای نرده‌ای ریچی در نظر گرفت، باشد. بنابراین رابطهٔ پایستگی به‌صورت $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \lambda \nabla^\nu \Re$ در می‌آید که در آن ثابت λ پارامتر راستال نامیده می‌شود. در نتیجهٔ یک چنین تعمیمی، هندسه و ماده به‌صورت غیر کمینه با یکدیگر جفت می‌شوند و پارامتر راستال در واقع معیاری از این جفت شدگی است [22-24]. پیامدهای یک چنین تعمیمی از نسبیت عام در حوزه‌های مختلف کیهانشناسی بررسی شده است و نشان داده شده که نظریهٔ راستال در توافق خوبی با داده‌های مشاهداتی است [25-28]. همچنین، در مقایسه با کیهانشناسی استاندارد، نظریهٔ گرانشی راستال توصیف مناسبتری از دوران مادهٔ غالب[1] ارائه می‌دهد [29] و با داده‌های مربوط به سنتز هسته‌ای هلیوم[2] در توافق می‌باشد [30]. تفاوت‌های بین نظریهٔ راستال و نسبیت عام در چارچوب مدل‌های ساختار ستاره‌ای در [31،32] گزارش شده و نتایج این تحقیقات نشان می‌دهد که پارامتر جفت شدگی راستال می‌تواند به‌عنوان یک ابزار ریاضی برای جبران کمبودهای نسبیت عام عمل کند [33،34]. نیز این نظریه با داده‌های مشاهداتی از منظومهٔ شمسی از جمله انحراف نور[3]، جابه‌جایی حضیض[4] و تأخیر زمانی[5] و نیز داده‌های حاصل از اثرات لنز گرانشی[6] در توافق می‌باشد [35-38]. برای مطالعهٔ کاملتر در خصوص نظریهٔ راستال و تحقیقات انجام گرفته در چارچوب آن مراجع [28،39] را ملاحظه نمائید.

اخیراً فرایند رمبش گرانشی در چارچوب نظریهٔ راستال مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که رمبش گرانشی یک سیال کامل همگن با معادلهٔ حالت خطی، منجر به تشکیل تکینگی فضا-زمانی می‌شود. بسته به مقدار پارامتر معادلهٔ حالت و نیز پارامتر راستال این تکینگی می‌تواند برهنه و یا پوشیده شده توسط افق رویداد باشد [40]. با الهام از این مدل در این مقاله، به‌دنبال سناریوهای غیر تکین رمبش گرانشی در چارچوب نظریهٔ راستال تعمیم یافته [28] هستیم. در این نظریه، برخلاف نظریهٔ اولیهٔ راستال، پارامتر جفت‌شدگی متغیر گرفته می‌شود. نشان می‌دهیم که یک چنین تعمیمی می‌تواند دینامیک رمبش را به‌گونه‌ای تغییر دهد که از تشکیل تکینگی فضا-زمانی جلوگیری به‌عمل آید. بدین منظور، ابتدا در بخش بعدی مرور کوتاهی بر مدل اُپنهایمر-اسنایدر کرده و پس از معرفی معادلات میدان نظریهٔ تعمیم یافتهٔ راستال به بررسی امکان جلوگیری از تشکیل تکینگی در پایان فرایند رمبش می‌پردازیم. سپس به بررسی دینامیک افق ظاهری پرداخته و نتایج را با مدل تکین اُپنهایمر-اسنایدر مقایسه می‌کنیم. بخش آخر این مقاله به جمع بندی نتایج اختصاص داده شده است. در این مقاله واحد $8\pi G = c = 1$ اتخاذ شده است.

فرایند رمبش غبار همگن در نسبیت عام

فرایند رمبش گرانشی یک غبار همگن برای اولین بار توسط اُپنهایمر و اسنایدر [6] بررسی شد. آنها فرض کردند که مادهٔ تشکیل دهندهٔ جسم رمبندهٔ یک سیال بدون فشار است و عنصر خط در فضا-زمان داخل این

---

[1] Matter dominated era
[2] Helium nucleosynthesis
[3] Deflection of light
[4] Precession of perihelion
[5] Time delay
[6] Gravitational lensing effects

توده از متریک فریدمن-رابرتسون-واکر تخت به‌صورت

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \qquad 2$$

پیروی می‌کند که در آن t زمان ویژه برای ناظری است که همراه سیال حرکت می‌کند و $a(t)$ فاکتور مقیاس نامیده می‌شود. تانسور انرژی-تکانه غبار در حال رمبش به‌صورت

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta , \qquad 3$$

داده می‌شود که در آن $u^\alpha = \delta^\alpha_t$ چار-بردار سرعت سیال است و رابطهٔ $u^\alpha u_\alpha = -1$ را برآورده می‌کند. معادلهٔ میدان اینشتین، $G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$ برای متریک1 و تانسور انرژی-تکانهٔ2 به معادلات زیر تقلیل می‌یابد

$$3\frac{\dot a^2}{a^2} = \kappa\rho , \frac{\dot a^2}{a^2} + 2\frac{\ddot a}{a} = 0 , \qquad 4$$

که در آن $\equiv \frac{d}{dt}$. همچنین از اتحاد بیانکی، $\nabla_\alpha G^\alpha_\beta = 0$ به رابطهٔ

$$\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}\rho = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 , \qquad 5$$

برای تغییرات چگالی انرژی دست می‌یابیم که در آن ρ_0 مقدار اولیهٔ چگالی انرژی غبار و a_0 مقدار اولیه فاکتور مقیاس در شروع رمبش است. توجه می‌کنیم که معادلات3 و 4 از یکدیگر مستقل نیستند، به‌معنای دیگر می‌توان با مشتق‌گیری از قسمت اول معادلهٔ3 و استفاده از معادلهٔ4 به قسمت دوم معادلهٔ3 رسید. با حل قسمت دوم معادلهٔ3 به جواب زیر می‌رسیم

$$a(t) = a_0 \left[\frac{t - t_s}{t_0 - t_s}\right]^{\frac{2}{3}} , \qquad 6$$

که در آن $a_0 = a(t_0)$ مقدار اولیهٔ فاکتور مقیاس در زمان شروع رمبش است و t_s زمانی است که در آن $a(t_s) = 0$. در یک چنین زمانی چگالی انرژی به بینهایت میل می‌کند و نیز انحنای نرده‌ای کرچمان

$$K = \dot H^2 + 2H^4 + 2H^2 \dot H \propto \left(t - t_s\right)^{-4} , \qquad 7$$

واگرا می‌شوند. در نتیجه فرایند رمبش در یک زمان متناهی به تکینگی فضا-زمانی ختم می‌شود.

رمبش در نظریهٔ راستال تعمیم یافته

در نظریهٔ راستال، شرط پایستگی تانسور انرژی-تکانه در فضا-زمان خمیده برقرار نیست و در عوض رابطه

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \lambda \nabla^\nu \Re , \qquad 8$$

را داریم، که در آن $\Re$ انحنای عددی ریچی[1] بوده و λ پارامتر راستال است که معیاری از جفت شدگی بین هندسه و ماده می‌باشد. مشاهده می‌کنیم که در فضا-زمان تخت که برای آن $\Re = 0$، تانسور انرژی-تکانه پایسته می‌ماند [19]. در نظریهٔ تعمیم یافتهٔ راستال پارامتر λ دیگر ثابت نیست و بنابراین معادلهٔ7 به‌شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla^\nu (\lambda\Re), \qquad 9$$

که از آنجا به‌کمک اتحاد بیانکی به معادلهٔ میدان راستال در حضور پارامتر جفت شدگی متغیر، به‌صورت زیر می‌رسیم

$$G_{\mu\nu} + \zeta\lambda\Re g_{\mu\nu} = \zeta T_{\mu\nu} , \qquad 10$$

که در آن ζ یک ثابت است. توجه می‌کنیم که در حد $\lambda \to 0$ معادلهٔ میدان اینشتین بازیابی می‌شود. حال

[1] Ricci scalar

اجازه دهید مسألهٔ رمبش گرانشی یک غبار همگن را بررسی کنیم. به‌کمک متریک1 معادلات حاکم بر دینامیک رمبش را به‌صورت

$$\left(6\zeta\lambda(t)-3\right)\frac{\dot{a}^2}{a^2}+6\zeta\lambda(t)\frac{\ddot{a}}{a}=-\zeta\rho, \qquad 11$$

$$\left(6\zeta\lambda(t)-1\right)\frac{\dot{a}^2}{a^2}+2\left(3\zeta\lambda(t)-1\right)\frac{\ddot{a}}{a}=0, \qquad 12$$

به‌دست می‌آوریم. نیز معادلهٔ تحولی چگالی انرژی به‌صورت

$$\dot{\rho}-12\lambda(t)\frac{\dot{a}^3}{a^3}+6\left(\dot{\lambda}\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\lambda(t)\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2}\right)+\frac{3}{a}\left(\rho\dot{a}+2\dot{\lambda}\ddot{a}+2\lambda\dddot{a}\right)=0. \qquad 13$$

در می‌آید. توجه می‌کنیم که معادلات فوق از یکدیگر مستقل نیستند و می‌توان با مشتقگیری از معادلهٔ10 و جانشین کردن نتیجه در معادلهٔ12 به‌معادلهٔ11 دست یافت. حال برای بررسی مسألهٔ رمبش و امکان اجتناب از تشکیل تکینگی فضا-زمانی ابتدا نیاز داریم که پارامتر $\lambda(t)$ را تعیین کنیم. برای اینکار سناریوی زیر را در نظر می‌گیریم. الف) رمبش در لحظه $t=t_0$ از مقدار متناهی چگالی انرژی تحول خود را شروع می‌کند. ب) با گذشت زمان وارد رژیم با انرژی بالا شده به‌طوری‌که چگالی انرژی به یک مقدار بیشینه و متناهی در لحظه $t=t_b$ می‌رسد. ج) در این لحظه که از آن با عنوان زمان جهش[1] یاد می‌کنیم، فرایند رمبش از پیشرفت بیشتر باز ایستاده و متوقف می‌گردد یعنی $\dot{a}(t_b)=0$. د) رژیم تراکمی برای $t>t_b$ به یک رژیم انبساطی تبدیل شده و بدین طریق دیگر تکینگی فضا-زمانی رخ نخواهد داد. همان‌طور که فرایند رمبش پیش می‌رود انتظار داریم که اندرکنش بین ماده و هندسه رشد کرده

[1] Bounce time

به مقدار بیشینه و متناهی خود در $t=t_b$ برسد. به‌عبارت دیگر انتظار داریم که شرط $\lambda(t)<\lambda(t_b)$ برای $t<t_b$ و $t>t_b$ برقرار باشد. با در نظر گرفتن این شرط تابعیت زیر را برای پارامتر جفت شدگی در نظر می‌گیریم

$$\lambda(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2(t^2-2t_bt+t_b^2)+3\lambda_1\zeta}, \qquad 14$$

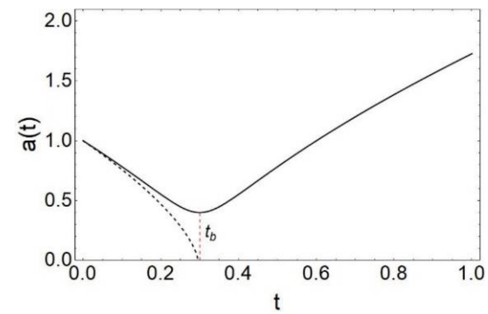
که در آن λ_1 و λ_2 ثابتند. اکنون با جانشین کردن رابطهٔ فوق در معادلهٔ11 می‌توان فاکتور مقیاس را به‌دست آورد. با انجام اینکار و حل معادلهٔ دیفرانسیل حاصل فاکتور مقیاس را به‌صورت

$$a(t)=\left[a_b^3+\left(a_0^3-a_b^3\right)\left(\frac{t-t_b}{t_0-t_b}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}, \qquad 15$$

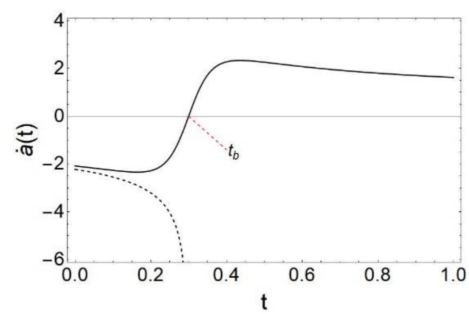
به‌دست می‌آوریم که در آن ثابت‌های λ_1 و λ_2 با توجه به شرایط $a(t_0)=a_0$ و $a(t_b)=a_b<a_0$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\lambda_1=\frac{a_b^3}{3\zeta},\ \lambda_2=\frac{a_0^3-a_b^3}{3(t_0-t_b)^2}. \qquad 16$$

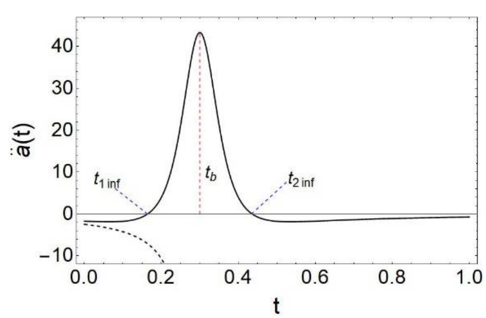
در شکل‌های 1 تا 3 رفتار فاکتور مقیاس، سرعت رمبش ($\dot{a}$) و شتاب آن ($\ddot{a}$) را رسم کرده‌ایم.



شکل1. رفتار زمانی فاکتور مقیاس در حضور پارامتر جفت شدگی راستال (منحنی توپُر) و در غیاب آن (منحنی خط چین) برای مقادیر $a_0 = 1, a_b = 0.4, t_b = t_s = 0.3, t_0 = 0$



شکل2. رفتار زمانی سرعت رمبش در حضور پارامتر جفت شدگی راستال (منحنی توپُر) و در غیاب آن (منحنی خط چین) برای مقادیر مشابه شکل1.



شکل3. رفتار زمانی شتاب رمبش در حضور پارامتر جفت شدگی راستال (منحنی توپُر) و در غیاب آن (منحنی خط چین) برای مقادیر مشابه شکل1.

در شکل1 ملاحظه می‌کنیم که تودهٔ رمبنده بعد از مدتی به بیشینهٔ تراکم خود در $t = t_b$ رسیده جایی‌که فرایند رمبش متوقف می‌گردد یعنی $\dot{a}(t_b) = 0$، شکل2 را ببینید. از شکل‌های2 و 3 ملاحظه می‌کنیم که جسم در حال رمبش چهار فاز متفاوت را در بازه‌های زمانی زیر تجربه می‌کند:

الف $t_0 < t < t_{1\inf}, \dot{a}(t) < 0, \ddot{a}(t) < 0,$

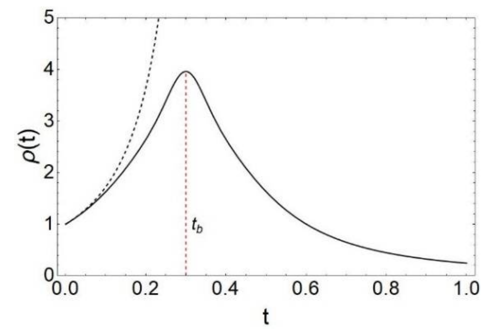
ب $t_{1\inf} < t < t_b, \dot{a}(t) < 0, \ddot{a}(t) > 0,$

ج $t_b < t < t_{2\inf}, \dot{a}(t) > 0, \ddot{a}(t) > 0,$

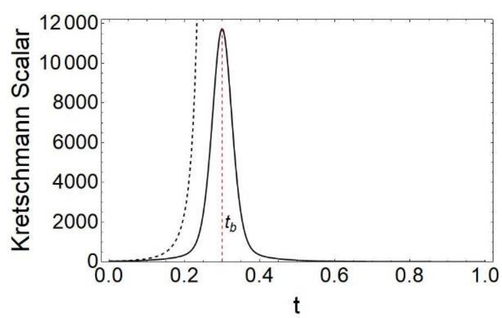
د $t_{2\inf} < t, \dot{a}(t) > 0, \ddot{a}(t) < 0.$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، در بازهٔ زمانی (الف) فرایند رمبش در یک رژیم تراکمی تند شونده به‌سر می‌برد تا اینکه به اولین نقطهٔ عطف که در آن $a(t_{1\inf}) = 0$ و سرعت رمبش مقدار بیشینه $|\dot{a}|_{\max} = |\dot{a}(t_{1\inf})|$ را به‌خود می‌گیرد، برسد. از این لحظه به بعد رمبش وارد فاز تراکمی کند شونده (ب) می‌گردد به‌طوری‌که از سرعت آن کاسته شده تا در لحظه $t = t_b$ متوقف گردد. در این لحظه فاکتور مقیاس به کمینهٔ مقدار خود رسیده، $a_{\min} = a(t_b)$ و شتاب رمبش به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد. بعد از این لحظه، فاز انبساطی تند شونده (ج) را در پیش رو داریم به‌طوری‌که فرایند تراکم تبدیل به یک انبساط شتابدار با شتاب مثبت می‌شود. با گذشت زمان از شتاب انبساط کاسته شده تا به دومین نقطهٔ عطف برسیم جایی‌که $\ddot{a}(t_{2\inf}) = 0$. سرانجام فرایند وارد فاز انبساطی کند شونده شده و توده‌ای که در ابتدا در حال رمبش بود، با گذشت زمان پراکنده می‌گردد. با این حال نمودارهای خط چین نشان می‌دهند که در غیاب پارامتر راستال، فرایند رمبش در مدت زمانی متناهی به تشکیل تکینگی فضا-زمان ختم می‌شود. به‌کمک معادلهٔ12 می‌توان رفتار

چگالی انرژی را به‌دست آورد. حل این معادله از طریق روش‌های عددی در شکل4 رسم شده است. نیز در شکل5 رفتار انحنای نرده‌ای کرچمن را رسم کرده‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، در حالت غیر-تکین (منحنی توپُر) چگالی انرژی و انحنای نرده‌ای کرچمن مقادیر متناهی به‌خود می‌گیرند، اما در حالتی که تکینگی فضا-زمانی رخ می‌دهد هردو این کمیت‌ها واگرا می‌شوند (منحنی‌های خط‌چین).



شکل1. رفتار چگالی انرژی در حضور پارامتر جفت‌شدگی راستال (منحنی توپُر) و در غیاب آن (منحنی خط چین) برای مقادیر مشابه شکل1.



شکل2. رفتار انحنای نرده‌ای کرچمن در حضور پارامتر جفت‌شدگی راستال (منحنی توپُر) و در غیاب آن (منحنی خط چین) برای مقادیر مشابه شکل1.

بررسی دینامیک افق ظاهری[1]

مسأله‌ای که همواره پرداختن به آن در فرایند رمبش گرانشی از اهمیت زیادی برخوردار است مطالعهٔ دینامیک افق ظاهری و امکان ارتباط علّی نواحی با چگالی و انحنای بالا با سایر نواحی در فضا-زمان است. برای اینکه ببینیم آیا رمبش غیر تکین لزوماً توسط افق پوشیده است یا خیر بایستی دینامیک افق ظاهری را بررسی کنیم. با پیشرفت فرایند رمبش و افزایش جاذبهٔ گرانشی، مرحله‌ای از این فرایند فرا می‌رسد که جاذبهٔ گرانشی به‌قدری شدید می‌شود که اجازهٔ انتشار پرتوهای نوری از مرز معینی در فضا-زمان را نمی‌دهد. این مرز که می‌تواند با گذشت زمان تغییر کند افق ظاهری نام دارد. هنگامی‌که فرایند رمبش آرام گرفت، در حالت تشکیل سیاه چاله، افق ظاهری بر افق رویداد[2] سیاه چاله منطبق می‌گردد [11]. برای بررسی دینامیک افق ظاهری، متریک1 را با معرفی مختصات دوتایی تهی[3]

$$d\eta^{+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-dt + a dr\right], \quad d\eta^{-} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[dt + a dr\right], \qquad 17$$

به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$ds^2 = 2d\eta^{+}d\eta^{-} + R(t,r)d\Omega^2. \qquad 18$$

که در آن $R(t,r) = ra(t)$ می‌باشد. ژئودزی‌های نورگونه با شرط $ds^2 = 0$ داده می‌شوند. در این‌صورت دو دسته ژئودزی نورگونه شعاعی که با شرایط $\eta^{+} = cte$ و $\eta^{-} = cte,$ داده می‌شوند در اختیار داریم که می‌توان کمیت های انبساط[4] در راستای این ژئودزی‌ها را به‌صورت زیر تعریف کرد [41-43]

$$\Theta_{\pm} = \frac{2}{R(t,r)}\partial_{\pm}R(t,r), \qquad 19$$

به‌طوری‌که

[1] Apparent horizon
[2] Event horizon
[3] Double null coordinates
[4] Expansion parameters

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_t \pm \frac{\partial_r}{a}\right). \quad (20)$$

فضا-زمان را به دام افتاده[1]، به دام نیافتاده[2] و به دام افتاده مرزی[3] گوییم هرگاه به‌ترتیب

$$\Theta_+\Theta_- > 0, \quad \Theta_+\Theta_- < 0, \quad \Theta_+\Theta_- = 0, \quad (21)$$

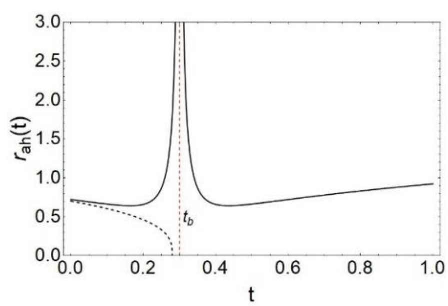
که حالت سوم، افق ظاهری که در واقع بیرونی‌ترین مرز ناحیه به دام افتاده است را ترسیم می‌کند. حال از معادلهٔ18 و شرط تساوی در 20 داریم

$$\dot{R}^2\Big|_{ah} = r_{ah}^2 \dot{a}^2 = 1. \quad (22)$$

رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$r_{ah}(t) = \frac{1}{|\dot{a}(t)|}, \quad (23)$$

که در واقع به دام افتادگی لایه با مختصات همراه $r = r_{ah}(t)$ توسط جاذبهٔ گرانشی را نشان می‌دهد [44]. شکل6 رفتار منحنی افق ظاهری را نمایش می‌دهد.



شکل3. رفتار منحنی افق ظاهری در حضور پارامتر جفت شدگی راستال (منحنی توپُر) و در غیاب آن (منحنی خط چین) برای مقادیر مشابه شکل1.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، تحول افق ظاهری (منحنی توپُر) در حالت $\lambda(t) \neq 0$ از مقدار اولیهٔ خود شروع می‌شود و با پیشرفت رمبش، شعاع افق ظاهری برای مدتی کاهش یافته و سپس افزایش یافته تا در زمان جهش واگرا شود. بعد از این زمان شعاع افق ظاهری مجدداً کاهش یافته ولی به صفر نمی‌رسد. سرانجام در زمان‌های بعد از جهش شعاع افق به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد و در نتیجه امکان ارتباط علّی فرایند رمبش غیر-تکین با ناظرهای موجود در عالم وجود داشته باشد. در حالت $\lambda(t) = 0$، (منحنی خط چین) مشاهده می‌کنیم که شعاع افق ظاهری به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد تا سرانجام با تشکیل تکینگی فضا-زمانی آن را پوشانیده و از دسترس عالم خارج پنهان نماید.

بحث و نتیجه‌گیری

در نسبیت عام کلاسیک، محصول نهایی فرایند رمبش گرانشی تشکیل تکینگی فضا-زمانی است جایی‌که چگالی‌ها به‌همراه انحنای فضا-زمان واگرا شده و ساختار نظریه قابلیت پیش‌بینی رخدادها را از دست می‌دهد. اما، وقوع تکینگی فضا-زمانی در نسبیت عام کلاسیک به‌معنای نامناسب بودن این نظریه نمی‌باشد، که درواقع، دامنهٔ پدیده‌های فیزیکی که این نظریه می‌تواند آنها را توصیف کند محدود می‌کند. باور عمومی بر این است که در مراحل نهایی رمبش که رژیم‌های با انرژی بسیار بالا، میدان گرانشی بسیار عظیم و مقیاس طول بسیار کوچک حاضرند، آثار گرانش کوآنتومی پا به عرصهٔ ظهور گذاشته و در نهایت تکینگی کلاسیک فضا-زمانی را رفع می‌کنند [3]. در کار حاضر تلاش کردیم یک سناریوی غیر-تکین از رمبش گرانشی در چارچوب گرانش تعمیم یافتهٔ راستال ارائه دهیم. در نسخهٔ اولیهٔ نظریهٔ راستال، پارامتر جفت‌شدگی ثابت است. نشان داده شده که رمبش یک سیال کامل همگن در این نظریه منجر به تشکیل تکینگی فضا-زمانی می‌شود که بسته به پارامترهای مدل، این تکینگی می‌تواند برهنه باشد یا توسط افق پوشانیده باشد [40]. با توجه به اینکه در نسخهٔ تعمیم یافتهٔ نظریهٔ راستال، پارامتر جفت‌شدگی متغیر است، این سؤال پیش می‌آید

[1] Trapped
[2] Untrapped
[3] Marginally trapped

که آیا در قالب یک چنین تعمیمی از نظریهٔ راستال می‌توان یک سناریوی غیر-تکین برای فرایند رمبش گرانشی داشت؟ با بررسی بیشتر این سوال به این نتیجه رسیدیم که با انتخاب تابعیت مناسبی برای پارامتر جفت شدگی، این امکان فراهم می‌شود. به این گونه که رمبش گرانشی از شرایط اولیهٔ معینی تحول خود را آغاز کرده، با گذشت زمان آثار ناشی از حضور پارامتر جفت شدگی متغیر، از پیشرفت بیشتر رمبش جلوگیری کرده و در لحظهٔ معینی، رژیم تراکمی پس از توقف وارد یک رژیم انبساطی می‌گردد. از آنجایی که پارامتر جفت شدگی معیاری از برهم‌کنش ماده با هندسه است، مشاهده کردیم که یک چنین برهم کنش دینامیکی می‌تواند سرنوشت نهایی فرایند رمبش را به‌کلی تغییر داده و یک جهش غیر تکین را جایگزین تکینگی فضا-زمانی کند. این اتفاق می‌تواند بدون توسل به تصحیحات ناشی از گرانش کوآنتومی رخ دهد.

در پایان، توجه می‌کنیم که، فضا-زمان خارج از یک ستاره به‌دلیل وجود میدان تابشی ستاره نمی‌تواند از فضا-زمان شوارزشیلد تبعیت کند. این نکته برای اولین بار توسط ریاضیدان و فیزیکدان هندی بنام پراهالاد چانیلال وایدیا[1] مورد بررسی قرار گرفت. او متریک

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r}\right) dv^2 + 2dvdr - r^2 d\Omega^2, \quad 24$$

را برای توصیف فضا-زمان خارج از یک ستاره در حال تابش با تقارن کروی پیشنهاد داد که در آن v مختصه تأخیری نورگونه[2] است و $m(v)$ جرم وایدیا نامیده می‌شود که بیانگر جرم کل محصور شده در شعاع r است [45،46]. در حالتی‌که $m(v)$ ثابت باشد، متریک فوق به متریک شوارزشیلد در مختصات تأخیری نورگونه تقلیل می‌یابد. تعمیم این متریک به حالتی که جرم ناهمگن باشد، یعنی به‌صورت $m(r,v)$ در نظر گرفته شود، در [47] انجام شده است. برای پیدا کردن فضا-زمان خارج از توده در حال رمبش می‌توان کلی‌ترین فرم متریک تعمیم یافتهٔ وایدیا [47] را برای فضا-زمان خارجی در نظر گرفت و آن را از طریق فرمول بندی شرایط پیوند[3] به متریک توصیف کنندهٔ فضا-زمان داخل توده رمبنده ربط داد [48]. در چارچوب کار حاضر، می‌توان نشان داد که حتی اگر کلی‌ترین فرم متریک تعمیم یافته وایدیا را در نظر بگیریم، جرم وایدیا به‌صورت یک ثابت درمی‌آید [40،49]. به‌عبارت دیگر در حضور تقارن کروی، برای رمبش گرانشی یک غبار همگن، قضیهٔ برکهوف[4] تضمین می‌کند که فضا-زمان خارج از توده در حال رمبش یک فضا-زمان شوارزشیلد البته با مرز دینامیک است [50].

مرجع‌ها

[1] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

[2] J.M.M. Senovilla, D. Garfinkle, The 1965 Penrose singularity theorem, *Classical and Quantum Gravity* **32** (2015) 124008 1-45. https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124008

[3] D.C. Moore, *Trends in Quantum Gravity Research*, Nova Science Publishers, New York, (2006).

[4] J. Plebanski, A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[1] Prahalad Chunnilal Vaidya
[2] Retarded null coordinate
[3] Junction conditions
[4] Birkhoff's theorem

[5] H. Kragh, M. Longair, *The Oxford Handbook of the History of Modern Cosmology*, Oxford, (2019).

[6] J.R. Oppenheimer, H. Snyder, On Continued Gravitational Contraction, *Physical Review* **56** (1939) 455-459. https://doi.org/10.1103/PhysRev.56.455

[7] R. Penrose, Gravitational collapse: The role of general relativity, *Rivista del Nuovo Cimento* **1** (1969) 252-276; https://doi.org/10.1023/A:1016578408204

[8] C.J.S. Clarke, *Singularities: Global and Local Aspects*. In: P.G. Bergmann V. De Sabbata (eds) *Topological Properties and Global Structure of Space-Time*. NATO ASI Series (Series B: Physics). Springer, Boston, MA (1986).

[9] R.M. Wald, *Gravitational Collapse and Cosmic Censorship*, arXiv:gr-qc/9710068.

[10] R.M. Wald, *Black Holes and Relativistic Stars*, University of Chicago Press (1998).

[11] P.S. Joshi, *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities,* Cambridge University Press, (2007).

[12] A. Ashtekar, J. Stachel, *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, Birkhauser Boston, (1991).

[13] C. Bambi, D. Malafarina, L. Modesto, Non-singular quantum-inspired gravitational collapse, *Physical Review D* **88** (2013) 044009. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.044009

[14] A.H. Ziaie, P.V. Moniz, A. Ranjbar, H.R. Sepangi, Einstein-Cartan gravitational collapse of a homogeneous Weyssenhoff fluid, *European Physical Journal C* **74** (2014) 3154. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3154-2

[15] M. Hashemi, S. Jalalzadeh, A.H. Ziaie, Collapse and dispersal of a homogeneous spin fluid in Einstein-Cartan theory, *European Physical Journal C* **75** (2015) 53. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3276-1

[16] Y. Tavakoli, C.E.-Rivera, J.C. Fabris, The final state of gravitational collapse in Eddington-inspired Born-Infeld theory, *Annalen der Physik*, **529** (2017) 1600415.

https://doi.org/10.1002/andp.201600415

[17] L.R. Abramo, I. Yasuda, P. Peter, Nonsingular bounce in modified gravity, *Physical Review D* **81** (2010) 023511. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.023511

[18] C. Bambi, D. Malafarina, A. Marciano, L. Modesto, Singularity avoidance in classical gravity from four-fermion interaction, *Physics Letters B* **734** (2014) 27-30. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.05.013

[19] P. Rastall, Generalization of the Einstein Theory, *Physical Review D* **6** (1972) 3357. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.6.3357

[20] N.D. Birrell, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space,* Cambridge University Press, (1984).

[21] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation, *Physical Review D* **15** (1977) 2738. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2738

[22] O. Minazzoli, Conservation laws in theories with universal gravity/matter coupling, *Physical Review D* **88** (2013) 027506. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.027506

[23] T. Koivisto, Covariant conservation of energy momentum in modified gravities,

[31] S. Hansraj, A. Banerjee, P. Channuie, Impact of the Rastall parameter on perfect fluid spheres, *Annals of Physics* **400** (2019) 320-345. https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.12.003

[32] A.M. Oliveira, H.E.S. Velten, J.C. Fabris, L. Casarini, Neutron Stars in Rastall Gravity, *Physical Review D* **92** (2015) 044020. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.044020

[33] G. Abbas, M.R. Shahzad, A new model of quintessence compact stars in the Rastall theory of gravity, *European Physical Journal A* **54** (2018) 211. https://doi.org/10.1140/epja/i2018-12642-y

[34] G. Abbas, M.R. Shahzad, Comparative analysis of Einstein gravity and Rastall gravity for the compact objects, *Chinese Journal of Physics* **63** (2020) 1-12. https://doi.org/10.1016/j.cjph.2019.10.011

[35] T. Manna, F. Rahaman, M. Mondal, Solar system tests in Rastall gravity, *Modern Physics Letters A* **35** (2020) 2050034. https://doi.org/10.1142/S0217732320500340

[36] A.-M.M. Abdel-Rahman, M.H.A. Hashim, Gravitational Lensing in A Model With Non-Interacting Matter and Vacuum Energies *Astrophysics and Space Science* **298** (2005) 519-523. https://doi.org/10.1007/s10509-005-5839-3

[37] A.-M.M. Abdel-Rahman, Gravitational Lensing Effects in a Modified General Relativity Model, *Astrophysics and Space Science* **278** (2001) 385. https://doi.org/10.1023/A:1013151416526

[38] R. Li, J. Wang, Z. Xu, X. Guo, Constraining the Rastall parameters in static space–times with galaxy-scale strong gravitational lensing, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **486** (2019) 2407-2411. https://doi.org/10.1093/mnras/stz967

Classical and Quantum Gravity **23** (2006) 4289-4296. https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/12/N01

[24] H. Shabani, A.H. Ziaie, A connection between Rastall-type and f(R,T) gravities, *Europhysics Letters* **129** (2020) 20004. https://orcid.org/0000-0002-2309-3591

[25] C.E.M. Batista, M.H. Daouda, J.C. Fabris, O.F. Piattella, D.C. Rodrigues, Rastall cosmology and the ΛCDM model, *Physical review D* **85** (2012) 084008. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.084008

[26] A.-M.M. Abdel-Rahman, Modified General Relativity and Cosmology, *General Relativity and Gravitation* **29** (1997) 1329-1343. https://doi.org/10.1023/A:1018872015607

[27] C.E.M. Batista, J.C. Fabris, O.F. Piattella, A.M.V.-Toribio, Observational constraints on Rastall's cosmology, *European Physical Journal C* **73** (2013) 2425. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2425-7

[28] H. Moradpour, Y. Heydarzade, F. Darabi, Ines G. Salako, A Generalization to the Rastall Theory and Cosmic Eras, *European Physical Journal C* **77** (2017) 259. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4811-z

[29] A.S. Al-Rawaf, M.O. Taha, Cosmology of general relativity without energy-momentum conservation, *General Relativity and Gravitation* **28** (1996) 935–952. https://doi.org/10.1007/BF02113090

[30] A.S. Al-Rawaf, Modified GR and Helium Nucleosynthesis, *International Journal of Modern Physics D* **14** (2005) 1941-1945. https://doi.org/10.1142/S021827180500753X

[39] F. Darabi, H. Moradpour, I. Licata, Y. Heydarzade, C. Corda, Einstein and Rastall theories of gravitation in comparison, *European Physical Journal C* **78** (2018) 25. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5502-5

[40] A.H. Ziaie, H. Moradpour, S. Ghaffari, Gravitational Collapse in Rastall Gravity, *Physics Letters B* **793** (2019) 276. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.055

[41] S.A. Hayward, Quasi-Local Gravitational Energy, *Physical Review D* **49** (1994) 831-839. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.831

[42] S.A. Hayward, General laws of black-hole dynamics, *Physical Review D* **49** (1994) 6467. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.6467

[43] S.A. Hayward, Gravitational energy in spherical symmetry, *Physical Review D* **53** (1996) 1938. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.1938

[44] C. Bambi, *Astrophysics of Black Holes: From Fundamental Aspects to Latest Developments*, Springer, (2016).

[45] P.C. Vaidya, An Analytical Solution for Gravitational Collapse with Radiation, *Astrophysical Journal* **144** (1966) 943. https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1966ApJ...144..943V/doi:10.1086/148692

[46] J.B. Griffiths, J. Podolsky, *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, Cambridge University Press (2009).

[47] A. Wang, Y. Wu, Generalized Vaidya Solutions, *General Relativity and Gravitation* **31** (1999) 107-114. https://doi.org/10.1023/A:1018819521971

[48] W. Israel, Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity, *Nuovo Cimento B* **44**, (1966) 1–14. https://doi.org/10.1007/BF02710419

[49] M. Hashemi, S. Jalalzadeh, A.H. Ziaie, Collapse and dispersal of a homogeneous spin fluid in Einstein–Cartan theory, *European Physical Journal C* **75** (2015) 53. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3276-1

[50] F. Haardt, V. Gorini, U. Moschella, A. Treves, M. Colpi, *Astrophysical Black Holes*, Springer, (2015).