

## Multi kinks collision in sinh-deformed $\varphi^4$ model

Aliakbar Moradi Marjaneh<sup>\*1</sup>, Mahdy Ebrahimi Loushab<sup>2</sup>, Farhad Mohammad Jafari<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Young Researchers and Elite Club, Quchan Branch, Islamic Azad University, Quchan, Iran

<sup>2</sup>Department of Physics, Faculty of Montazeri Technical and Vocational University (TVU), Khorasan Razavi, IRAN

<sup>3</sup>Department of Physics, Payam Noor University, Iran

Received: 20.09.2020    Final revised: 09.11.2020    Accepted: 19.01.2021

DOI: [10.22055/JRMBS.2021.16567](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.16567)

### Abstract

We study the kinks collisions up to five kinks and antikinks of the sinh-deformed  $\varphi^4$  model numerically. In our simulations we observe reflection and bound state formation depending on the number of kinks and their initial conditions. The results show that the energy density at the point of collision is the maximum, which for odd (even) kinks appears in the form of potential energy density (kinetic energy density). The values of total energy density and elastic strain energy density of the  $\varphi^4$  and sinh-deformed  $\varphi^4$  models are almost the same, but the values of kinetic energy density in collisions of odd number of kinks and potential energy density in collisions of even number of kinks are different for these two models.

**Keywords:** 05.45.Yv Solitons – 11.10.Lm Nonlinear or nonlocal theories and models – 45.50.Tn Collisions

---

\*Corresponding Author: moradimarjaneh@gmail.com



## برخوردهای چندکینکی در مدل تغییر شکل یافته هایپربولیک سینوسی $\varphi^4$

علی اکبر مرادی مرجانه<sup>1\*</sup>، مهدی ابراهیمی لوشاب<sup>2</sup>، فرهاد محمدجعفری<sup>3</sup>

<sup>1</sup>باشگاه پژوهشگران جوان، واحد قوچان، دانشگاه آزاد اسلامی، قوچان، ایران

<sup>2</sup>گروه فیزیک دانشکده شهید منتظری، دانشگاه فنی و حرفه‌ای خراسان رضوی، ایران

<sup>3</sup>گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، ایران

دریافت: 1399/06/30 ویرایش نهائی: 1399/08/19 پذیرش: 1399/10/30

DOI: [10.22055/JRMBS.2021.16567](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.16567)

### چکیده

در این مقاله، برخوردهای دو تا پنج کینکی مدل انتگرال‌ناپذیر هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$  که مدلی تغییر شکل یافته از مدل کاملاً شناخته شده  $\varphi^4$  است، را به صورت عددی مطالعه می‌کنیم. در این بررسی حالت‌های مقید و پراکنده رؤیت شدند که به تعداد کینک و شرایط اولیه بستگی دارند. علاوه بر آن، نتایج نشان می‌دهند که چگالی انرژی در نقطه برخورد، بیشینه است که برای تعداد فرد (زوج) بیشتر به صورت چگالی انرژی پتانسیل (چگالی انرژی جنبشی) ظاهر می‌شود. مقادیر چگالی انرژی کل و تغییر شکل در هر دو مدل  $\varphi^4$  و هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$  تقریباً یکسان هستند، اما مقادیر چگالی انرژی جنبشی در برخوردهای با تعداد فرد و چگالی انرژی پتانسیل در برخوردهای با تعداد زوج برای این دو مدل متفاوت است.

**کلیدواژگان:** سالیتون‌ها، مدل‌ها و نظریه‌های غیر موضعی یا غیر خطی، برخوردها

### مقدمه

گردیده است. نشان داده شده است که حل‌های مدل‌های بس‌ذره‌ای روی یک خط راست در هندسه‌های مختلف با دینامیک حل‌های کینک-گونه بعضی از مدل‌های شناخته شده میدان‌های غیرخطی، ارتباط بسیار نزدیکی دارد. این موضوع جای تعجب ندارد، زیرا مدل CM در واقع یک مدل انتگرال‌پذیر است و به همین دلیل روش تحلیل آن با روش‌های مرسوم در تحلیل حل‌های پایدار سامانه‌های با دینامیک غیرخطی بسیار مشابه است. روش بسیار معروف Lax در تحلیل هر دو مسأله به خوبی به کار برده شده است [3-4]. حل‌های دقیق سامانه‌های بس‌ذره‌ای کوآنتومی در یک بعد شامل جواب‌هایی هستند که رفتار دینامیکی

توصیف ریاضی سامانه‌های کلاسیکی بس‌ذره‌ای تشکیل شده از ذرات واقع بر روی یک خط راست، استوانه و یا چنبره، به کمک مدل شناخته شده Calogero–Moser (CM) امکان‌پذیر است [1-2]. این مدل در زمینه‌های دیگر فیزیک نظری و ریاضی و به خصوص در ریاضیات محض بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در واقع حل‌های این مدل یکی از اولین نمونه حل‌های غیربدیهی سیستم‌های دینامیکی یکپارچه است. ارتباط دو طرفه‌ای بین این مدل و برخی مسائل مطرح شده در فیزیک نظری، مانند نظریه سالیتون در میدان‌های کلاسیکی و کوآنتومی غیرخطی برقرار

\* نویسنده مسئول: [moradimarjaneh@gmail.com](mailto:moradimarjaneh@gmail.com)



آنها مشابه حل‌های کلاسیک بعضی مدل‌های غیرخطی با جواب‌های سالیتمونی هستند [5-6].

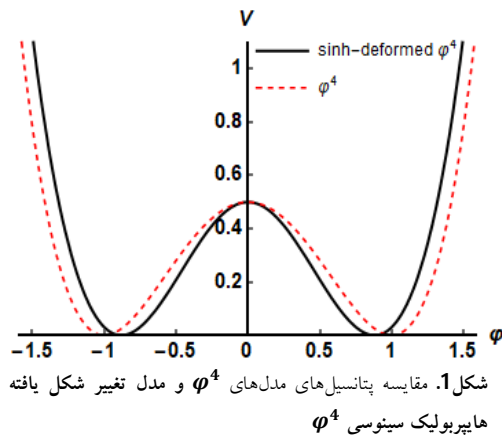
مدل‌های میدان‌های غیرخطی، گستره وسیعی از حوزه‌های مختلف فیزیک جدید را به خود اختصاص داده‌اند. که از آنها می‌توان اپتیک [7]، آرایه‌های اتصالاتی ابررسانایی جوزفسون [8]، فیزیک ذرات و فیزیک هسته‌ای [9-10]، فیزیک ماده چگال [11] و کیهان‌شناسی [12] را نام برد. در این حوزه‌ها، مدل‌های حاوی پتانسیل‌های چندجمله‌ای نیز به کرات استفاده می‌شوند و از کاربردهای آنها می‌توان به شبیه‌سازی شکست خودبه‌خودی تقارن در مدل گینزبورگ-لانداو در ابررسانایی [13-14]، گذار فاز (پی‌درپی) در مواد [15]، یا تحول میدان در عالم اولیه [16] اشاره کرد. در سال‌های اخیر، مطالعات ارزنده‌ای روی مدل‌های مختلف، چه آنهایی که حاوی پتانسیل‌های چندجمله‌ای بوده‌اند و چه آنهایی که پتانسیل‌های دیگری داشته‌اند، صورت گرفته است. در این بین، فرایند تغییر شکل [17-19] به ما اجازه می‌دهد تا ضمن یافتن مدل‌های (پتانسیل‌های) جدید، جواب‌های غیربدیهی یک‌بعدی توپولوژیکی آنها را که به کینک معروف هستند، را تعیین کنیم. امروزه درباره پراکندگی کینک‌ها و برهم‌کنش‌های چندکینکی در مدل‌هایی همچون  $\phi^4$  [20-22]،  $\phi^6$  [23-30]،  $\phi^8$ ،  $\phi^{10}$ ،  $\phi^{12}$  [31-34]، مدل سینوسی گوردون و یا اصلاح‌شده آن [35-37] و حتی مدل‌هایی که دینامیک عجیب‌تری دارند [38-47] و یا مدل‌های چندمیدانی [48-53] دانش زیادی داریم. پدیده‌های تشدید گوناگونی در پراکندگی کینک‌های برخی از مدل‌های یاد شده وجود دارد که از آن میان می‌توان به پنجره‌های فرار<sup>1</sup> و برهم‌کنش تشدید یک کینک یا آنتی‌کینک با ناخالصی اشاره کرد. ویژگی قابل

توجه، ساختار پیچیده پراکندگی کینک-آنتی کینک است که ابتدا در سال 1970 به‌طور عددی بررسی شد و پس از آن مورد مطالعه بسیاری از دانشمندان قرار گرفت. امواج فرودی با سرعت‌های بیشتر از سرعت بحرانی پس از برخورد همراه با تابش به سمت بینهایت حرکت می‌کنند. برای سرعت‌های کمتر از سرعت حدی در حالت کلی امواج فرودی به دام می‌افتند. اما الگوی پیچیده‌ای نیز از تشدیدهای تیزی دیده می‌شود که آنها را قادر می‌سازد به بی‌نهایت فرارکنند. این ویژگی در برخی مدل‌ها از قبیل مدل اصلاح شده سینوسی گوردون، را می‌توان با امکان تبادل انرژی بین مد انتقالی و مد ارتعاشی یک کینک منفرد توضیح داد. در اولین برخورد، مقداری از انرژی جنبشی به مد داخلی کینک و آنتی‌کینک منتقل می‌شود و سپس آنها جدا می‌شوند و تقریباً به‌طور مستقل منتشر می‌شوند. اما برای سرعت‌های کمتر از سرعت حدی، آنها انرژی انتقال لازم برای فرار از جاذبه متقابل ندارند و بنابراین باز می‌گردند و برای بار دوم با یکدیگر برخورد می‌نمایند. در این لحظه مقداری از انرژی که در مد داخلی ذخیره شده بود می‌تواند به مدهای انتقالی باز گردد و اگر در بازه بین دو برخورد تشدید مناسبی با دوره تناوب مناسبی صورت پذیرد، می‌تواند سبب فرار به بینهایت گردد. تعمیم بیشتر این است که ممکن است انرژی کافی پس از سه برخورد یا بیشتر به مدهای انتقالی بازگردد و منجر به یک ساختار تشدید تودرتوی پیچیده گردد، تصویری که به‌صورت عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. با این حال مدل‌هایی مثل  $\phi^6$ ، هرچند دارای مد داخلی نیستند، از این قانون تبعیت نمی‌کنند و پراکندگی‌های تشدید را در برخورد کینک-آنتی‌کینک همراه خود دارند [25,28]. برخورد چند کینک کم انرژی در ناحیه‌ای کوچک، به‌طور غیر

<sup>1</sup> escape windows

تغییر شکل [43]  $f(\varphi) = \sinh(\varphi)$ ، پتانسیل و جواب‌های سالیتمونی مدل تغییرشکل یافته هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$  به دست می‌آیند:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\varphi) (1 - \sinh^2(\varphi))^2 \quad 5$$



$$\varphi = \pm \sinh^{-1}(\tanh(x)). \quad 6$$

پتانسیل 5 مینیموم‌هایی در  $a = \pm \sinh^{-1}(1)$  دارد و بنابراین جواب‌های 6 در بین این دو قرار می‌گیرند (شکل‌های 1 و 2). جواب‌های یک بعدی وابسته به زمان 6 به صورت 7 است:

$$\varphi = \pm \sinh^{-1}\left(\tanh\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right), \quad 7$$

که برای کینک‌های آهسته ( $v \ll 1$ ) به صورت 8 ساده می‌شوند:

$$\varphi = \pm \sinh^{-1}(\tanh(x - vt)). \quad 8$$

انرژی کل متناظر با چگالی لاگرانژی 1 از انتگرال 9 محاسبه می‌شود:

$$U = K + E + P = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + V(\varphi) \right) dx, \quad 9$$

که به ترتیب شامل سه جمله انرژی جنبشی، انرژی تغییر شکل الاستیک و انرژی پتانسیل است [37].

خطی می‌تواند باعث ایجاد مقدار انرژی زیادی و بنابراین چگالی انرژی بالایی در آن ناحیه گردد که در مطالعه برخی سیستم‌های فیزیکی که از مدل (1+1) بعدی استفاده می‌کنند، مفید است. محاسبات نشان می‌دهد که این چگالی انرژی را می‌توان با پارامترهایی نظیر تعداد، مکان و سرعت اولیه کینک‌ها کنترل کرد. در ادامه به مدل تغییر شکل یافته هایپربولیک  $\varphi^4$  می‌پردازیم، سپس نتایج عددی حاصل از برخورد دو، سه، چهار و پنج کینک در یک نقطه را بررسی می‌کنیم، توضیحاتی در خصوص مد داخلی می‌دهیم و در نهایت به مقایسه نتایج شبیه‌سازی‌های عددی با نتایج حاصل از برخوردهای چندکینکی در مدل  $\varphi^4$  می‌پردازیم.

## مدل

مدل‌های مختلف معادله کلاین گوردون در فضا-زمان (1+1) بعدی با چگالی لاگرانژی زیر توصیف می‌شوند:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - V(\varphi) \quad 1$$

که در آن  $\varphi(x, t)$  یک میدان اسکالر حقیقی است. معادله اوایلر-لاگرانژ با این چگالی لاگرانژی، ما را به سوی معادله حرکت زیر رهنمون می‌کند:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad 2$$

پتانسیل  $V(\varphi)$  برای مدل  $\varphi^4$  به صورت

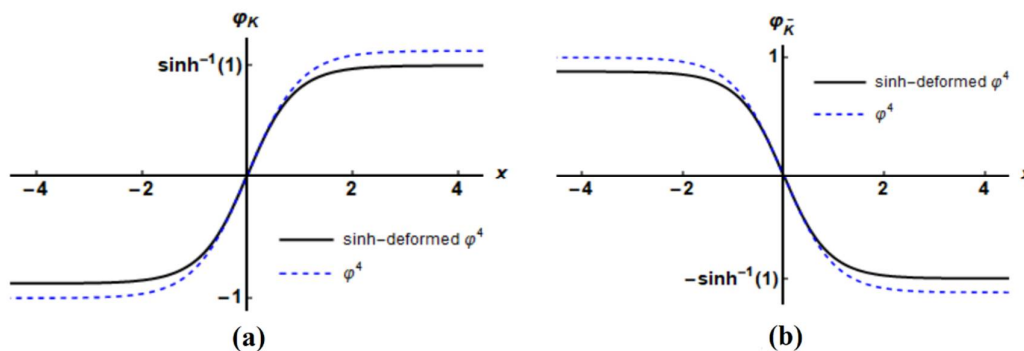
$$V_1(\varphi) = \frac{1}{2}(1-\varphi^2)^2 \quad 3$$

است. کمینه‌های این پتانسیل در  $\pm 1$  هستند (شکل 1).

از حل معادله 2 در حالت ایستا ( $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ )، جواب‌های توپولوژیکی سالیتمونی استاتیک این مدل به دست می‌آیند:

$$\varphi_1 = \pm \tanh(x) \quad 4$$

علامت مثبت جواب کینکی و علامت منفی جواب آنتی‌کینکی معادله هستند (شکل 2). با استفاده از تابع



شکل 2. مقایسه جواب‌های (a) کینکی و (b) آنتی کینکی مدل‌های  $\varphi^4$  و مدل تغییر شکل یافته هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$

سالیوتونی برای این مدل وجود ندارد، لذا از برهم‌نهی چند جواب کینک و آنتی کینک که به‌سوی هم حرکت می‌کنند استفاده می‌کنیم. مکان اولیه آنها را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که برخوردشان در یک نقطه اتفاق بیفتد. فاصله اولیه بین کینک‌ها را به‌حد کافی بزرگ در نظر می‌گیریم تا در شروع حرکت هم‌پوشانی نداشته باشند. در مرزها از تابع جاذب استفاده می‌کنیم به‌گونه‌ای که میدان و مشتق آن را صفر کند تا موجودات خلق شده ناشی از برخوردها از دیوارها انعکاسی نداشته باشند و تداخلی در بازه زمانی مورد بررسی ایجاد نشود. برای بررسی عددی تحول زمانی، از شکل گسسته معادله حرکت 2 استفاده می‌کنیم. برای این منظور مشتق دوم را به‌روش تفاضل محدود (پنج نقطه‌ای تا مرتبه چهارم) بدست می‌آوریم. بسط تیلور تابع  $f(x)$  را در نقاط  $f(x-h)$ ،  $f(x+h)$ ،  $f(x-2h)$  و  $f(x+2h)$  تا مرتبه چهارم می‌نویسیم و از مرتبه چهارم به بعد را صرف نظر می‌کنیم:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(5), \quad 15$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - O(5), \quad 16$$

به‌همین ترتیب چگالی انرژی کل  $(u(x,t))$  نیز دربردارنده چگالی انرژی جنبشی  $(k(x,t))$ ، چگالی انرژی تغییر شکل  $(e(x,t))$  و چگالی انرژی پتانسیل  $(p(x,t))$  است:

$$u = k + e + p \quad 10$$

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{1-v^2} \frac{\sinh^4 \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)}{1 + \tanh^2 \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)} \quad 11$$

$$e = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1-v^2} \frac{\operatorname{sech}^4 \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)}{1 + \tanh^2 \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)} \quad 12$$

$$p = V(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\varphi) (1 - \sinh^2(\varphi))^2 \quad 13$$

تغییر شکل الاستیک به‌صورت مشتق جزئی میدان نسبت به مکان تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 14$$

که برای کشش، مثبت و برای تراکم، منفی است.

## نتایج عددی

در این بخش به مطالعه برخوردهای دو تا پنج کینکی مدل تغییر شکل یافته هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$  می‌پردازیم. شرایط اولیه سرعت برای کینک‌ها در حد غیرنسبیتی است. با توجه به اینکه جواب تحلیلی چند

تحول زمانی در طول شبیه‌سازی با گام زمانی  $\tau = 0.005$  لحاظ شده است.

$$\left(\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}\right)_j = \frac{1}{12\tau^2}(11\varphi_{n,j+1} - 20\varphi_{n,j} + 6\varphi_{n,j-1} + 4\varphi_{n,j-2} - \varphi_{n,j-3}) \quad 21$$

### برخورد دو کینکی

کینک‌های مدل تغییر شکل یافته هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$  مشابه کینک‌های مدل  $\varphi^4$  متقارن هستند، بنابراین برخوردهای کینک و آنتی‌کینک در هر دو پیکربندی  $\varphi(a,-a,a)$  و  $\varphi(-a,a,-a)$  نتایج یکسانی دارند. برای پیکربندی  $\varphi(-a,a,-a)$  در شبیه‌سازی عددی از

$$\varphi(-a,a,-a)(x,t) = \varphi(-a,a)(x-x_1,t) + \varphi(a,-a)(x-x_2,t) - a \quad 22$$

استفاده می‌کنیم. سرعت‌های اولیه  $v_1 = -v_2$  0.1 لحاظ شده است. مراکز کینک‌های  $\varphi(-a,a)$  و  $\varphi(a,-a)$  در مکان‌های اولیه  $x_1$  و  $x_2$  قرار گرفته‌اند و با در نظر گرفتن مقادیر  $x_2 = x_1 = 10$ ، فاصله بین کینک‌ها به حدی زیاد است که شرط عدم همپوشانی در لحظه صفر، برآورده می‌شود. برای سرعت‌های اولیه بیشتر از سرعت بحرانی  $v_{cr} \approx 0.4639$  پس از برخورد، کینک‌ها جدا شده و سرعت‌های اولیه کمتر از سرعت بحرانی، حالت‌های مقید و پنجره‌های جهشی<sup>1</sup> را به وجود می‌آورد [43]. با انتخاب سرعت اولیه 0.1، پس از برخورد کینک‌ها به دام یکدیگر می‌افتند و حالتی مقید به نام بایون<sup>2</sup> ( $b$ ) ایجاد می‌شود  $b \rightarrow K\bar{K}$  (شکل 3-a) و  $K$  و  $\bar{K}$  به ترتیب معرف کینک و آنتی‌کینک هستند.

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x)$$

$$+ \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(5), \quad 17$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) - O(5). \quad 18$$

اکنون مجموع معادله‌های 17 و 18 را از 16 برابر مجموع معادلات 15 و 16 کم می‌کنیم تا مشتقات با مرتبه فرد حذف شوند و  $f''(x)$  را به دست می‌آوریم.

$$f''(x) = \frac{1}{12h^2}(-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)) \quad 19$$

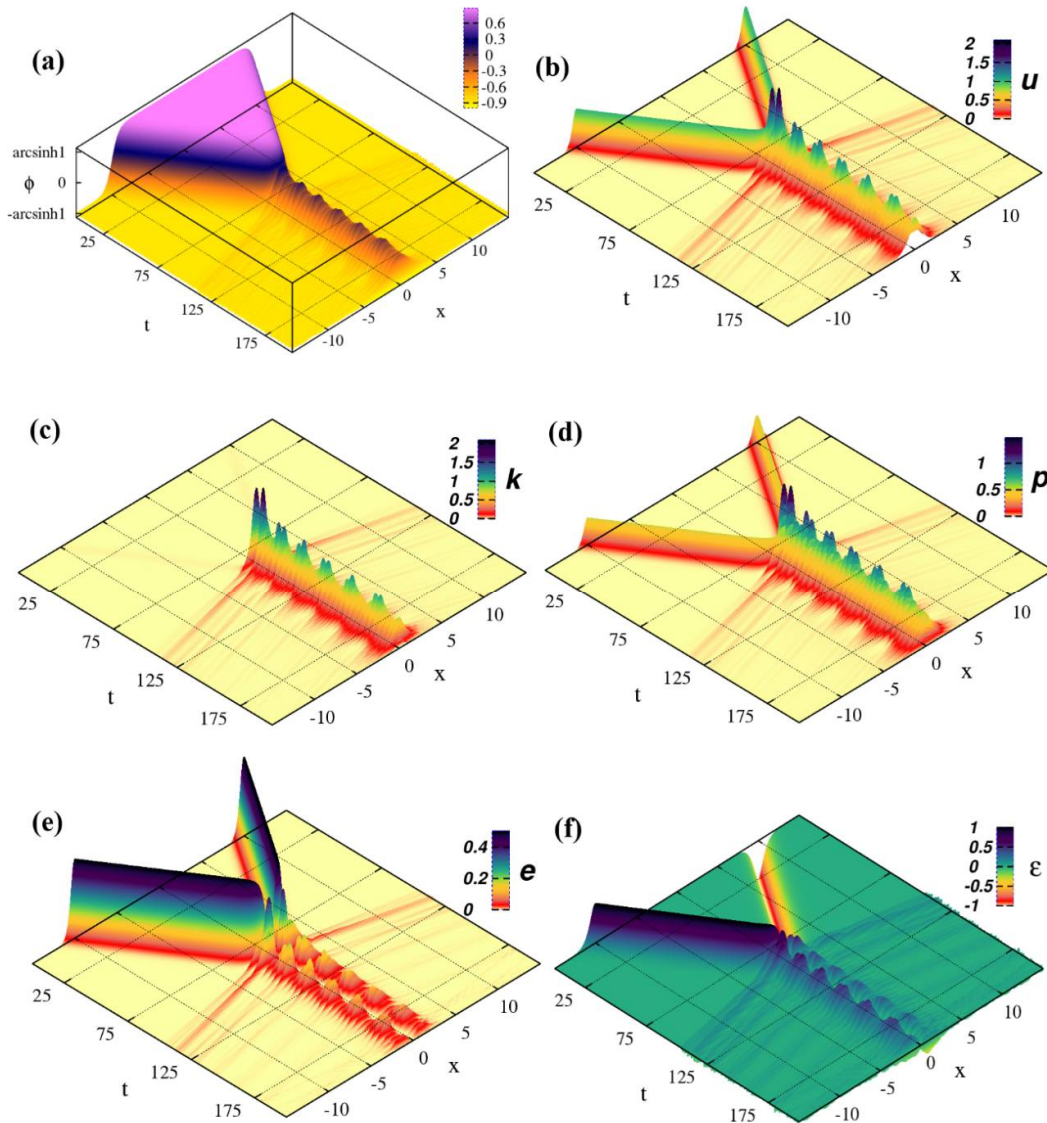
به این ترتیب شکل گسسته معادله حرکت 2 حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}\right)_j - \frac{1}{h^2}(\varphi_{n-1,j} - 2\varphi_{n,j} + \varphi_{n+1,j}) + \frac{1}{12h^2}(\varphi_{n-2,j} - 4\varphi_{n-1,j} + 6\varphi_{n,j} - 4\varphi_{n+1,j} + \varphi_{n+2,j}) - \frac{1}{2}(\sinh(2\varphi_{n,j}) - 8\operatorname{sech}^2(\varphi_{n,j})\tanh(\varphi_{n,j})) = 0 \quad 20$$

$h$  گام فضایی شبکه است،  $\varphi_n(t_j) = \varphi(nh, t_j)$ ،  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  و  $j = -3, -2, -1, 0, 1, \dots$  زمان  $t_j = jt$  است. مشتق دوم در معادله گسسته فوق از مرتبه  $O(h^4)$  است. طول شبکه دارای  $N = 8000$  نقطه است و با لحاظ کردن گام فضایی  $h = 0.025$  گستره  $-100 < x < 100$  را در بر می‌گیرد. که کینک و آنتی‌کینک را به اندازه کافی از هم دور می‌کند تا در شرایط اولیه همپوشانی نداشته باشند. به همین ترتیب

<sup>2</sup> Bion

<sup>1</sup> Bounce windows



شکل 3. برخورد دو کینکی در پیکربندی  $(-a, a, -a)$

(a) پیکربندی میدان، (b) چگالی انرژی کل، (c) چگالی انرژی جنبشی، (d) چگالی انرژی پتانسیل، (e) چگالی انرژی تغییر شکل و (f) تغییر شکل است. شکل 3-a نمای کلی از برخورد کینک-آنتی کینک در پیکربندی  $(-a, a, -a)$  را نشان می‌دهد. شکل 3-b چگالی انرژی کل  $u(x, t)$  در زمان‌ها و مکان‌های مختلف قبل و پس از برخورد را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌کنیم، دو قله چگالی انرژی به‌سوی هم حرکت می‌کنند،

بایون در نزدیکی نقطه برخورد قرار می‌گیرد و به‌صورت ریز موج‌هایی، انرژی تابش می‌کند. این تابش انرژی باعث می‌شود که دامنه نوسانی‌اش کاهش یابد. در صورتی که دامنه نوسانی‌اش برای مدت نسبتاً زیادی ثابت می‌ماند، آن را بردر<sup>4</sup> می‌نامیدیم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی در شکل 3 آورده شده

<sup>4</sup> Breather

$\varphi^4$  دارای مد داخلی است. مد داخلی، پس از برخورد برانگیخته می‌شود و تبدیل انرژی جنبشی و پتانسیل به یکدیگر را در برخوردهای متوالی فراهم می‌کند.

### برخورد سه کینکی

برخوردهای سه کینکی کینک-آنتی کینک-کینک و آنتی کینک-کینک-آنتی کینک، نتایج یکسانی به همراه دارند. در اینجا از پیکربندی که کینک-آنتی کینک-کینک در  $(-a, a, -a, a)$  جای می‌گیرند، استفاده شده است. از برهم‌نهی سه جواب تک کینکی می‌توانیم جواب سه کینکی را شبیه‌سازی نماییم و از

$$\varphi_{(-a,a,-a,a)}(x,t) = \varphi_{(-a,a)}(x-x_1,t) + \varphi_{(a,-a)}(x-x_2,t) + \varphi_{(-a,a)}(x-x_3,t). \quad 26$$

استفاده نماییم. آنتی کینک، ساکن و در مرکز  $x_2 = 0$  قرار داده شده است و کینک‌های چپ و راست، سرعت‌های اولیه  $v_1 = -v_3 = 0.1$  دارند و در مکان‌های اولیه  $x_1 = x_3 = 10$  قرار داده شده‌اند. این انتخاب شرایط اولیه باعث می‌شود که برخورد در یک نقطه و در مرکز اتفاق می‌افتد. از شکل 4- $a$  مشاهده می‌کنیم که یک کینک و آنتی کینک نابود می‌شوند و لامپ<sup>5</sup> نوسانی که سرعت بسیار بالایی دارد ایجاد می‌شود. علاوه بر آن کینک سمت چپ با سرعت بیشتری  $v \approx 0.14$  نسبت به قبل از برخورد باقی می‌ماند. می‌توان برخورد سه کینکی را به صورت  $Kb \rightarrow K\bar{K}K$  نمایش داد. مشابه قسمت قبلی، شکل 4- $b$  تا 4- $e$  چگالی‌های انرژی و شکل 4- $f$  تغییر شکل را نشان می‌دهد. مقادیر بیشینه چگالی‌های انرژی کل، جنبشی، پتانسیل و تغییر شکل الاستیک برای این برخورد (شکل 4- $b$  تا  $e$ ) که به صورت عددی محاسبه شده‌اند به شرح زیر هستند:

$$u_{max}^{(3)} \approx 4.964, \quad k_{max}^{(3)} \approx 1.417,$$

برخورد کرده، مقید می‌شوند و در نقطه برخورد ریزموج‌هایی گسیل می‌کنند. در شکل‌های 3- $c$  تا  $e$  تصویر فضا-زمانی چگالی‌های انرژی جنبشی، پتانسیل و تغییر شکل الاستیک نشان داده شده است. شکل 3- $c$  نمایش چگالی انرژی جنبشی است. ملاحظه می‌کنیم که قبل از برخورد، چگالی انرژی جنبشی دامنه بسیار کمی دارد در حالی که به دلیل نوسانات میدان در حالت مقید ایجاد شده پس از برخورد، دامنه آن زیاد است. بیشترین سهم چگالی انرژی کل مربوط به چگالی انرژی جنبشی است. بر خلاف چگالی انرژی جنبشی، تغییر شکل الاستیک (شکل 3- $e$ ) پس از برخورد کاهش می‌یابد. تغییر شکل که همان مشتق میدان است، پس از برخورد، ساختاری نوسانی به خود می‌گیرد (شکل 3- $f$ ). مقادیر بیشینه چگالی‌های انرژی کل، جنبشی، پتانسیل و تغییر شکل الاستیک برای این برخورد (شکل 3- $b$  تا  $e$ ) که به صورت عددی محاسبه شده‌اند به شرح زیر هستند:

$$u_{max}^{(2)} \approx 2.0103, \quad k_{max}^{(2)} \approx 2.0103,$$

$$e_{max}^{(2)} \approx 0.505, \quad p_{max}^{(2)} \approx 1.484 \quad 23$$

همچنین مقادیر اکسترمم تغییر شکل (شکل 3- $f$ ):

$$\varepsilon_{max}^{(2)} \approx 1.005, \quad \varepsilon_{min}^{(2)} \approx -1.005 \quad 24$$

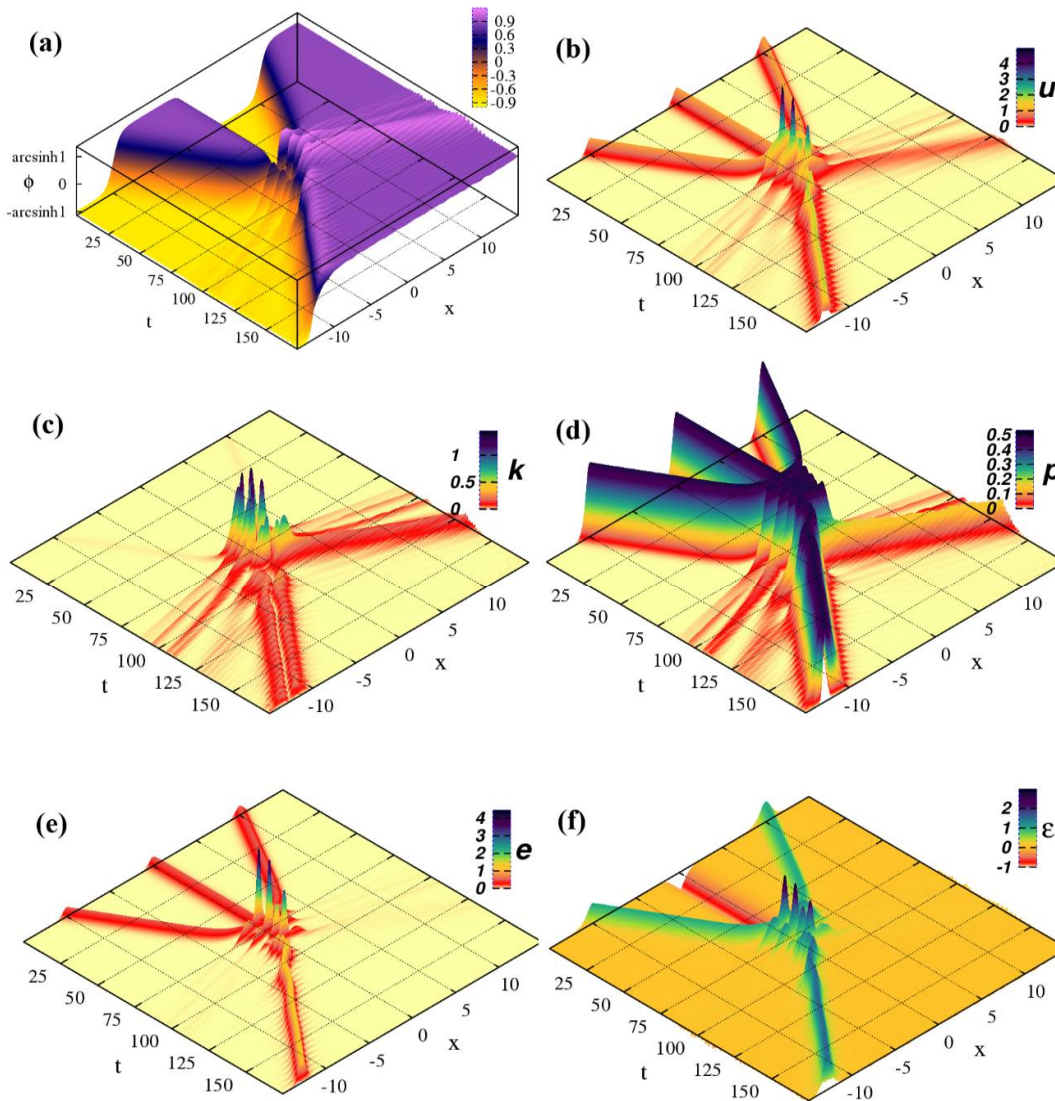
از شکل 3 واضح است که

$$k_{max}^{(2)} + e_{max}^{(2)} + p_{max}^{(2)} > u_{max}^{(2)} \quad 25$$

هرچند چگالی انرژی کل از مجموع چگالی‌های انرژی جنبشی، پتانسیل و تغییر شکل الاستیک به دست می‌آید، اما الزامی نیست که بیشینه چگالی انرژی کل هم از مجموع بیشینه‌های چگالی‌های انرژی جنبشی، پتانسیل و تغییر شکل الاستیک به دست آید. توجه داریم که مدل هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$  مشابه مدل

<sup>5</sup> Lump





شکل 4. برخورد سه کینکی در پیکربندی  $(-a, a, -a, a)$

(a) پیکربندی میدان، (b) چگالی انرژی کل، (c) چگالی انرژی جنبشی، (d) چگالی انرژی پتانسیل، (e) چگالی انرژی تغییر شکل و (f) تغییر شکل

### برخورد چهار کینکی

پیکربندی کینک-آنتی کینک-کینک-آنتی کینک در  $(-a, a, -a, a, -a)$  برای برخورد چهار کینک در نظر گرفته شده است و در شبیه‌سازی نیز از برهم‌نهی چهار جواب تک کینکی استفاده شده است:

$$\varphi_{(-a,a,-a,a,-a)}(x,t) = \varphi_{(-a,a)}(x-x_1,t) + \varphi_{(a,-a)}(x-x_2,t) + \varphi_{(-a,a)}(x-x_3,t)$$

$$e_{max}^{(3)} \approx 4.464, \quad p_{max}^{(3)} \approx 0.5 \quad 27$$

همچنین مقادیر اکسترمم تغییر شکل (شکل 4-f)

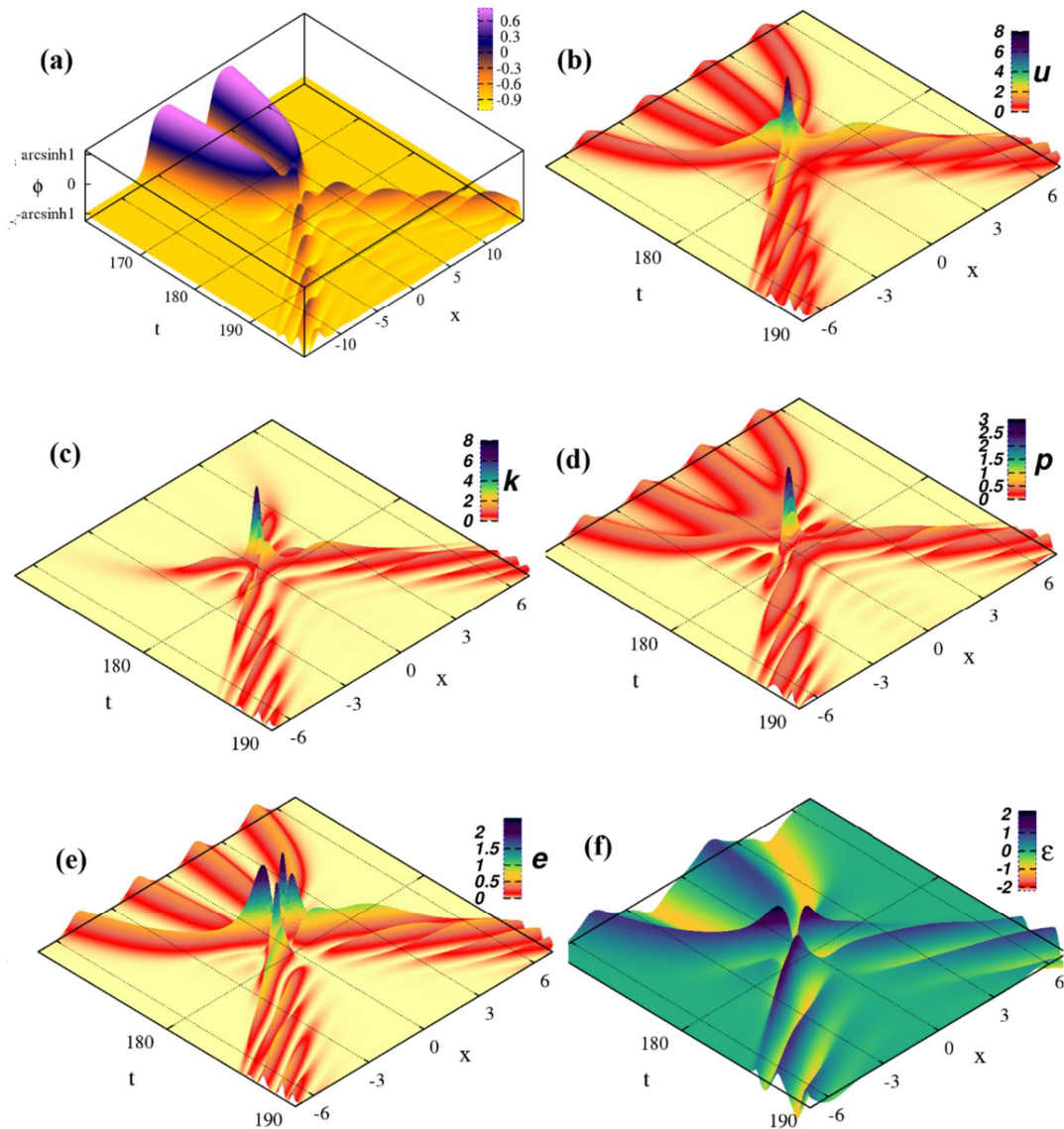
$$\varepsilon_{max}^{(3)} \approx 2.988, \quad \varepsilon_{min}^{(3)} \approx -1.005 \quad 28$$

است.

یکدیگر را جذب می‌کنند، بنابراین برای رخدادن برخورد در یک نقطه، با فرض سرعت‌های فوق، باید شرایط مکان اولیه صحیحی در نظر گرفته شوند.

$$+ \varphi_{(a,-a)}(x - x_4, t) - a \quad 29$$

در این برخورد برای کینک و آنتی کینک میانی سرعت  $v_2 = -v_3 = 0.05$  و برای کینک و آنتی کینک طرفین سرعت  $v_1 = -v_4 = 0.1$  در نظر گرفته شده‌است. توجه داریم که کینک و آنتی کینک



شکل 5. برخورد چهارکینکی در پیکربندی  $(-a, a, -a, a, -a)$

(a) پیکربندی میدان، (b) چگالی انرژی کل، (c) چگالی انرژی جنبشی، (d) چگالی انرژی پتانسیل، (e) چگالی انرژی تغییر شکل و (f) تغییر شکل

برای این موضوع مکان اولیه کینک و آنتی کینک میانی در  $x_2 = x_3 = 10$  ثابت نگه داشته شده است و مکان اولیه کینک‌های طرفین وردش داده شده است و در نهایت مکان‌های اولیه  $-x_1 = x_4 = 22.504991$  به دست آمده است. نتایج شبیه‌سازی عددی در شکل 5 نشان داده شده است. مخصوصاً از شکل‌های 5- $a$  و  $b$  واضح است که پس از برخورد چهارکینک در یک نقطه، کینک‌ها نابود می‌شوند و دو بایون با سرعت بیشتر از کینک‌های قبل از برخورد ایجاد می‌شود  $bb \rightarrow K\bar{K}K\bar{K}$ . مقادیر بیشینه چگالی‌های انرژی کل، جنبشی، پتانسیل و تغییر شکل

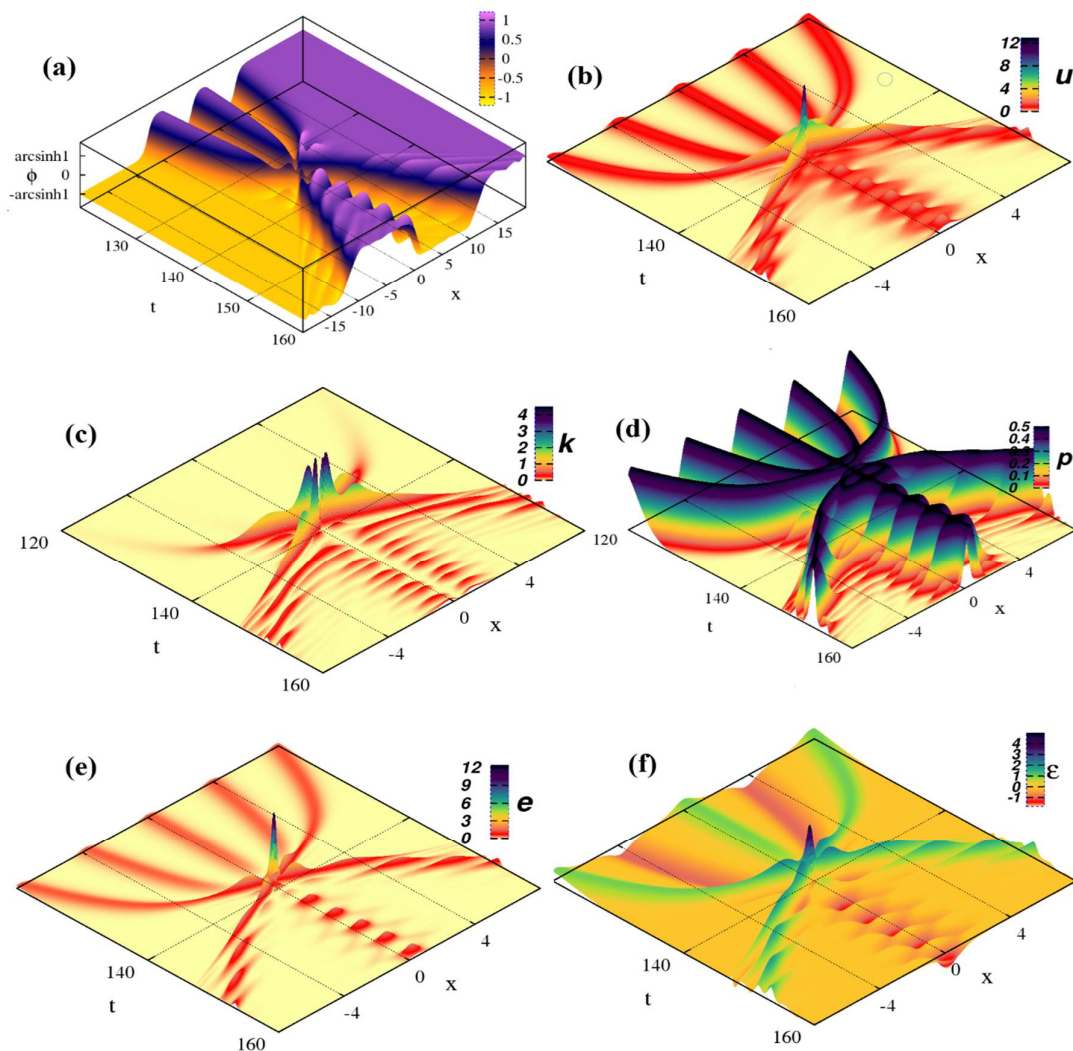
الاستیک برای این برخورد (شکل 5- $b$  تا  $e$ ) که به صورت عددی محاسبه شده‌اند به شرح زیر هستند:

$$u_{max}^{(4)} \approx 7.984, \quad k_{max}^{(4)} \approx 7.98145,$$

$$e_{max}^{(4)} \approx 2.407, \quad p_{max}^{(4)} \approx 2.863 \quad 30$$

$$\varepsilon_{max}^{(4)} \approx 2.196, \quad \varepsilon_{min}^{(4)} \approx -2.196 \quad 31$$

همچنین مقادیر اکسترمم تغییر شکل (شکل 5- $f$ ) است. در اینجا هم همانند برخورد دو کینکی سهم چگالی انرژی جنبشی از چگالی انرژی کل بیشتر است.



شکل 6. برخورد پنج کینکی در پیکربندی  $(-a, a, -a, a, -a, a)$

(a) پیکربندی میدان، (b) چگالی انرژی کل، (c) چگالی انرژی جنبشی، (d) چگالی انرژی پتانسیل، (e) چگالی انرژی تغییر شکل و (f) تغییر شکل.

0.05 و در مکان اولیه  $x_2 = -x_3 = 10$  قرار داده

شده‌اند.

$$\begin{aligned} \varphi_{(-a,a,-a,a,-a,a)}(x,t) = & \varphi_{(-a,a)}(x-x_1,t) + \varphi_{(a,-a)}(x-x_2,t) \\ & + \varphi_{(-a,a)}(x-x_3,t) + \varphi_{(a,-a)}(x-x_4,t) \\ & + \varphi_{(-a,a)}(x-x_5,t) \end{aligned} \quad 32$$

با این شرایط اولیه، برخورد در یک نقطه اتفاق می‌افتد. مطابق شکل 6 پس از برخورد دو کینک در

### برخورد پنج کینکی

برای برخورد پنج کینکی، سه کینک و دو آنتی کینک در  $(-a, a, -a, a, -a, a)$  قرار داده شده‌اند. کینک میانی در مرکز و در ابتدا ساکن  $v_3 = 0$ ، کینک‌های طرفین دارای سرعت اولیه  $v_1 = -v_5 = 0.1$  و در مکان اولیه  $-x_1 = x_5 = 20.170733$  و آنتی کینک‌ها دارای سرعت اولیه  $v_2 = -v_3 =$

اکنون می‌توانیم متغیرهای  $x$  و  $t$  را تفکیک کنیم؛ یا به عبارتی دیگر، حلی برای معادله

$$\delta\varphi(x, t) = \psi(x)\cos\omega t. \quad 37$$

بیابیم. بنابراین، از معادله 36 به مسئله ویژه‌مقداری

$$H\psi(x) = \omega^2\psi(x), \quad 38$$

می‌رسیم که مشابه معادله شرودینگر یک‌بعدی با هامیلتونی است.

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad 39$$

تابع  $U(x)$  پتانسیل پایایی است که می‌توان آن را پتانسیل «کوانتومی» نامید. «ترازهای انرژی» طیف گسسته در چاه پتانسیل  $U(x)$ ، چیزی جز ویژه‌مقدارهای  $\omega_i^2$  نیستند و ما هم به دنبال همین‌ها می‌گردیم. به‌سادگی می‌توان دید

$$U(x) = \frac{d^2V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi_K(x)}. \quad 40$$

همچنین می‌توان نشان داد که همواره تراز صفر در طیف برانگیختگی کینک وجود دارد. به‌علاوه، تمامی ویژه‌مقدارهای عملگر  $H$  نامنفی هستند.

برای اینکه ویژه‌مقدارهای  $(\omega_i)$  طیف گسسته را به‌صورت عددی بیابیم، از نسخه اصلاح‌شده «روش پرتابی»<sup>1</sup> (یا «روش تطبیق»<sup>2</sup>) استفاده می‌کنیم [54]. در ادامه، این روش را به‌اختصار توضیح می‌دهیم. ابتدا معادله دیفرانسیل معمولی<sup>38</sup> را به‌ازای مقدار خاصی از  $\omega$ ، به‌طور عددی حل می‌کنیم. بدین منظور  $x < 0$  و  $x > 0$  را جداگانه در نظر می‌گیریم و به ترتیب از  $-\infty$

طرفین با سرعت‌های بیشتر از سرعتشان قبل از برخورد پراکنده می‌شوند و یک آنتی‌کینک در مرکز به‌حالت سکون قرار می‌گیرد. مد داخلی کینک‌ها برانگیخته می‌شود و ریزموج‌هایی پس از برخورد در بین آنها ایجاد می‌شود. نتایج شبیه‌سازی عددی در شکل 6 نشان داده شده است. مقادیر بیشینه چگالی انرژی‌ها

$$u_{max}^{(5)} \approx 12.907, \quad k_{max}^{(5)} \approx 4.492, \quad 33$$

$$e_{max}^{(5)} \approx 12.407, \quad p_{max}^{(5)} \approx 0.500$$

و مقادیر اکسترمم تغییر شکل:

$$\varepsilon_{max}^{(5)} \approx 4.981, \quad \varepsilon_{min}^{(5)} \approx -1.789 \quad 34$$

است. ملاحظه می‌کنیم که در اینجا به‌مانند برخورد سه کینکی، بیشترین سهم چگالی انرژی کل مربوط به چگالی انرژی تغییر شکل است.

### طیف‌های برانگیختگی کینک

با در اختیار داشتن فرمول صریح کینک‌ها، می‌توان طیف برانگیختگی آنها را مطالعه کرد. این مسأله به‌شکل زیر فرمول‌بندی می‌شود (برای مثال [31,32] را ببینید). ابتدا اختلال کوچک  $\delta\varphi(x, t)$  را به کینک ایستایی که می‌خواهیم طیف برانگیختگی‌اش را حساب کنیم،  $\varphi_K(x)$ ، اضافه می‌کنیم:

$$\varphi(x, t) = \varphi_K(x) + \delta\varphi(x, t), \quad 35$$

$$\|\delta\varphi\| \ll \|\varphi_K\|.$$

با جایگذاری این  $\varphi(x, t)$  در معادله حرکت<sup>2</sup> تقریبی خطی برای  $\delta\varphi$  به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial x^2} + \frac{d^2V}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi_K(x)} \cdot \delta\varphi = 0. \quad 36$$

<sup>2</sup> matching

<sup>1</sup> shooting

هر دوی آنها مجانب‌های یکسانی دارند.

$$U_1(\pm\infty) = U(x \pm \infty) = 4 \quad 43$$

لذا طیف گسسته عملگر  $H$  در بازه  $0 \leq \omega^2 \leq 4$  جای دارد. با این حال کمینه آنها که در  $x = 0$  است، متفاوت است:

$$U_{1,min}(x = 0) = -2 \quad 44$$

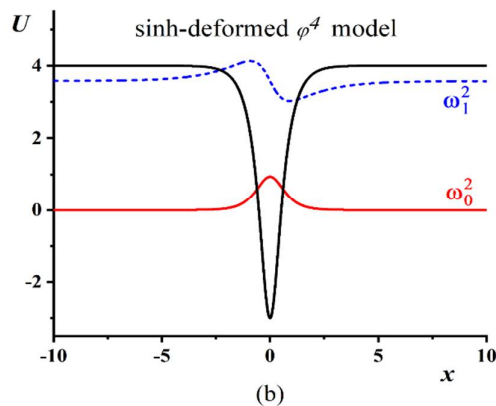
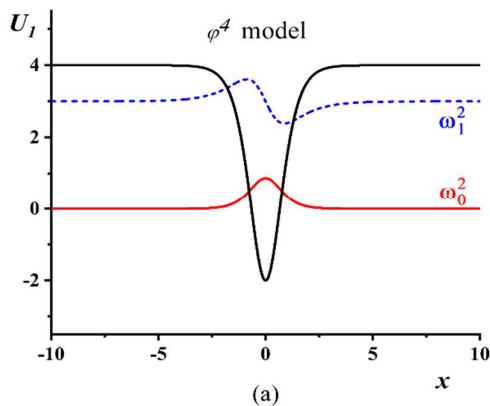
$$U_{min}(x = 0) = -3 \quad 45$$

با روش عنوان شده جست‌وجویی عددی را برای ترازهای گسسته در چاه پتانسیل  $U$  صورت دادیم و مشابه [43] برای تنها تراز غیر صفر  $\omega_1^2 \approx 3.5786$  به دست آوردیم (برای پتانسیل  $U_1$  این مقدار برابر 3.0 است). با مشخص شدن مقادیر ویژه، به روش عددی می‌توان توابع ویژه متناظر مدهای صفر و غیر صفر پتانسیل‌های  $U$  و  $U_1$  را رسم نمود (شکل 7).

و  $+\infty$  شروع می‌کنیم. سپس دو حل به دست آمده  $\psi_L(x)$  و  $\psi_R(x)$  را در نقطه  $x = x_{match}$  که نزدیک مبدأ است، بر یکدیگر تطبیق می‌دهیم. اگر مقداری که برای  $\omega$  انتخاب کرده بودیم، ویژه مقدار هامیتونی 39 باشد، حل‌های چپ و راست بخش‌هایی از یک ویژه تابع  $H$  خواهند بود. در نتیجه رونسکین توابع  $\psi_L(x)$  و  $\psi_R(x)$  در  $x = x_{match}$  صفر خواهد شد. ما برای یافتن توابع  $\psi_L(x)$  و  $\psi_R(x)$ ، معادله دیفرانسیل معمولی 38 را با استفاده از روش قدیمی رانگ-کوتای مرتبه چهارم با گام  $h = 10^{-5}$  حل کردیم. پس از جای‌گذاری فرمول صریح کینک در معادله 40، می‌توانیم پتانسیل «کوآنتومی» هر کینک را حساب کنیم. برای کینک‌های معادلات 4 و 7، پتانسیل کوآنتومی مدل‌های  $\phi^4$  و هایپربولیک سینوسی  $\phi^4$  به صورت شکل 7 است.

$$U_1(x) = -2 + 6 \operatorname{Tanh}(x)^2 \quad 41$$

$$U(x) = 2 - 2 \operatorname{Sech}(2x) - 3 \operatorname{Sech}(2x)^2 + 2 \operatorname{Tanh}[x]^2 \quad 42$$



شکل 7. پتانسیل کوآنتومی (خط مشکی)، مد صفر (خط قرمز) و اولین مد (خط چین آبی) برای مدل‌های (a)  $\phi^4$  و (b) هایپربولیک سینوسی  $\phi^4$

## بحث و نتیجه‌گیری

$\phi^4$  در برخورد نقطه‌ای تعداد  $N$  کینک-آنتی کینک کم سرعت، به صورت عددی محاسبه شد. برای اینکه برخورد در یک نقطه و یا به عبارت دقیق‌تر در ناحیه

در این مقاله، مقادیر حدی چگالی‌های انرژی و تغییر شکل، برای مدل تغییر شکل یافته هایپربولیک سینوسی



چگالی انرژی پتانسیل دارای مقادیر 1.75 و 3.5 و در برخوردهای سه و پنج کینکی چگالی انرژی جنبشی دارای مقادیر 1.7 و 5.0 است. مدل‌های  $\varphi^4$  و هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$ ، هر دو دارای یک مد داخلی هستند [43] و برای برخورد کینک-آنتی کینک در این مدل‌ها، سرعت حدی مشخصی وجود دارد که در سرعت‌های کمتر از آن، حالات مقید و پنجره‌های فرار به وجود می‌آید. در سرعت‌های کمتر از سرعت حدی حالات تشدید و وجود دارد که انرژی از مد داخلی به انرژی در مد انتقالی تبدیل می‌شود و پس از یک یا چند برخورد از یکدیگر جدا شده و تا بینهایت به حرکت ادامه می‌دهند.

کوچکی رخ دهد، کینک‌ها و آنتی کینک‌ها به گونه‌ای که سالیون‌های همسایه از یک نوع نباشند چیده شدند. این چینش باعث می‌شود همواره نیرو از نوع جاذبه باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی در جدول 1 گردآوری شده است. از مقایسه این نتایج با آنچه در مرجع [21] برای مدل  $\varphi^4$  به دست آمده است، متوجه می‌شویم که تغییر ایجاد شده در پتانسیل، تقریباً مقادیر یکسانی در چگالی انرژی کل و همچنین چگالی انرژی تغییر شکل در تمام برخوردها حاصل می‌کند. اما چگالی انرژی پتانسیل (جنبشی) در برخوردهای با تعداد زوج (فرد) کینک، کمتر از مقادیرشان در مدل  $\varphi^4$  است. به طور دقیق‌تر در مدل  $\varphi^4$ ، در برخوردهای دو و چهار کینکی

جدول 1. مقادیر چگالی‌های انرژی و تغییر شکل حاصل از مطالعه برخوردهای چند کینکی برای دو مدل  $\varphi^4$  و تغییر شکل یافته هایپربولیک سینوسی  $\varphi^4$

<i>N</i>	<i>model</i>	<i>initial position</i>	<i>initial velocity</i>	$u_{max}$	$k_{max}$	$e_{max}$	$p_{max}$	$\epsilon_{max}$	$\epsilon_{min}$
1	shd - $\varphi^4$	$x_0 = 0$	$v = 0.10$	1.010	0.005	0.505	0.500	1.005	0.000
	$\varphi^4$	$x_0 = 0$	$v = 0.10$	1.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0
2	shd - $\varphi^4$	$-x_1 = x_2 = 10$	$v_1 = -v_2 = 0.10$	2.103	2.103	0.505	1.484	1.005	1.005
	$\varphi^4$	$-x_1 = x_2 = 10$	$v_1 = -v_2 = 0.10$	2.0	2.0	0.5	1.75	1.0	-1.0
3	shd - $\varphi^4$	$-x_1 = x_3 = 10$ $x_2 = 0$	$v_1 = -v_3 = 0.10$ $v_2 = 0$	4.964	1.417	4.464	0.500	2.988	1.005
	$\varphi^4$	$-x_1 = x_3 = 20$ $x_2 = 0$	$v_1 = -v_3 = 0.10$ $v_2 = 0$	5.0	1.7	4.5	0.5	2.5	-1.0
4	shd - $\varphi^4$	$-x_1 = x_4 = 22.505$ $-x_2 = x_3 = 10$	$v_1 = -v_4 = 0.10$ $v_2 = -v_3 = 0.05$	7.984	7.981	2.407	2.863	2.196	2.196
	$\varphi^4$	$-x_1 = x_4 = 22.276$ $-x_2 = x_3 = 10$	$v_1 = -v_4 = 0.05$ $v_2 = -v_3 = 0.025$	8.0	8.0	2.4	3.5	2.2	-2.2
5	shd - $\varphi^4$	$-x_1 = x_5 = 20.1707$ $-x_2 = x_4 = 10$ $x_3 = 0$	$v_1 = -v_5 = 0.10$ $v_2 = -v_4 = 0.05$ $v_3 = 0$	12.91	4.492	12.41	0.500	4.981	1.789
	$\varphi^4$	$-x_1 = x_5 = 28.1929$ $-x_2 = x_4 = 14$ $x_3 = 0$	$v_1 = -v_5 = 0.05$ $v_2 = -v_4 = 0.025$ $v_3 = 0$	13.0	5.0	12.5	0.5	1.5	-5.0

این جهات، رفتار مشابهی در مدل‌های انتگرال ناپذیری از این دست وجود دارد. هر چند در جزییاتی مانند مقادیر چگالی انرژی‌ها، سرعت اولیه مورد نیاز برای

در سرعت‌های بیشتر از سرعت حدی کینک و آنتی کینک پس از برخورد بدون ایجاد حالت‌های تشدید و یا پنجره‌های فرار به بینهایت می‌روند و از

[10] H. Weigel. *Chiral soliton models for baryons*, vol. 743. Springer, (2007).

[11] A. Moradi Marjaneh, D. Saadatmand, I. Evazzade, R.I. Babicheva, E.G. Soboleva, N. Srikanth, Kun Zhou, E.A. Korznikova, S.V. Dmitriev. Mass transfer in Frenkel-Kontorova chain initiated by molecule impact, *Physical Review E* **98** (2018) 023003.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.023003>

[12] V. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* Cambridge U.K, Cambridge, 2000.

[13] L.D. Landau, *Theory of Phase Transitions, Journal of Experimental and Theoretical physics* **7** (1937) 19.

[14] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, *Theory of Superconductivity, Journal of Experimental and Theoretical physics* **20** (1950) 1064.

[15] A. Khare, I.C. Christov, A. Saxena, Successive phase transitions and kink solutions in  $\phi^8$ ,  $\phi^9$  and  $\phi^{12}$  field theories, *Physical Review E* **90** (2014) 023208.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.023208>

[16] V.A. Gani, A.A. Kirillov, S.G. Rubin, Classical transitions with the topological number changing in the early Universe, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **04** (2018) 042.  
<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/04/042>

[17] D. Bazeia, L. Losano, J.M.C. Malbouisson, Deformed defects, *Physical Review D* **66** (2002) 101701.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.101701>

[18] C. A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, New results for deformed defects, *Physical Review D* **69** (2004) 067702.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.067702>

[19] D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, J. Mateos Guilarte, Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions, *Physical Review D* **73** (2006) 10008.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.105008>

ایجاد حالت‌های دو، سه، چهار و یا  $n$  جهشی<sup>1</sup> متفاوت عمل می‌کنند.

## مرجع‌ها

[1] F. Calogero. Solution of the one-dimensional  $N$ -body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, *Journal of Mathematical Physics* **12** (1971) 419-436.  
<https://doi.org/10.1063/1.1665604>

[2] F. Calogero. Exactly solvable one dimensional many-body problems, *Lettere al Nuovo Cimento* **13** (1975) 411-416.  
<https://doi.org/10.1007/BF02790495>

[3] P.D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **28** (1968) 141-188.

[4] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider: A new class of integrable systems and its relation to solitons, *Annals of Physics* **170** (1986) 370-405.  
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(86\)90097-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(86)90097-7)

[5] B. Sutherland: Exact results for a quantum many-body problem in one dimension I, *Physical Review A* **4** (1971) 2019-2021.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.4.2019>

[6] B. Sutherland: Exact results for a quantum many-body problem in one dimension.II, *Physical Review A* **5** (1972) 1372-1376.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.5.1372>

[7] S.V. Suchkov, A.A. Sukhorukov, J. Huang, S.V. Dmitriev, C. Lee, Y.S. Kivshar. Nonlinear switching and solitons in  $pt$ -symmetric photonic systems. *Laser and Photonics Reviews* **10** (2016) 2:177-213.  
<https://doi.org/10.1002/lpor.201500227>

[8] J. Pfeiffer, M. Schuster, A.A. Abdumalikov, A.V. Ustinov. Observation of soliton fusion in a josephson array. *Physical Review Letter* **96** (2006)034103.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.034103>

[9] N. Manton, P. Sutcliffe. *Topological solitons*, Cambridge University Press, (2004).

<sup>1</sup> n-bounce



- [29] A. Demirkaya, R. Decker, P.G. Kevrekidis, I.C. Christov, A. Saxena, Kink dynamics in a parametric  $\phi^6$  system: A model with controllably many internal modes, *Journal of High Energy Physics* **12** (2017) 071.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP12\(2017\)071](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2017)071)
- [30] F.C. Lima, F.C. Simas, K.Z. Nobrega, A.R. Gomes, Boundary scattering in the  $\phi^6$  model, *Journal of High Energy Physics* **10** (2019) 147.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2019\)147](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2019)147)
- [31] V.A. Gani, V. Lensky, M.A. Lizunova, Kink excitation spectra in the (1+1)-dimensional  $\phi^8$  model, *Journal of High Energy Physics* **08** (2015) 147.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2015\)147](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2015)147)
- [32] I.C. Christov, R.J. Decker, A. Demirkaya, V.A. Gani, P.G. Kevrekidis, R.V. Radomskiy, Long-range interactions of kinks, *Physical Review D* **67** (2019) 414.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.016010>
- [33] I.C. Christov, R.J. Decker, A. Demirkaya, V.A. Gani, P.G. Kevrekidis, A. Khare, A. Saxena, Kink-Kink and Kink-Antikink Interactions with Long-Range Tails, *Physical Review Letter* **122** (2019) 171601.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.171601>
- [34] V.A. Gani, A. Moradi Marjaneh, P.A. Blinov, Explicit kinks in higher-order field theories, *Physical Review D* **101** (2020) 125017.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.125017>
- [35] M. Peyrard, D.K. Campbell, Kink-antikink interactions in a modified sine-Gordon model, *Physica D* **9** (1983) 33.  
[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90290-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90290-7)
- [36] V.A. Gani, A.E. Kudryavtsev, Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies, *Physical Review E* **60** (1999) 3305.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.3305>
- [37] A. Moradi Marjaneh, A. Askari, D. Saadatmand, S.V. Dmitriev, Extreme values of elastic strain and energy in sine-Gordon multi-kink collisions, *The European Physical Journal B* **91** (2018) 22.  
<https://doi.org/10.1140/epjb/e2017-80406-y>
- [38] V.A. Gani, A. Moradi Marjaneh, D. Saadatmand, Multi-kink scattering in the double
- [20] R.H. Goodman, R. Haberman, Kink-Antikink Collisions in the  $\phi^4$  equation: The n-Bounce Resonance and the Separatrix Map, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **4** (2005) 1195.  
<https://doi.org/10.1137/050632981>
- [21] A. Moradi Marjaneh, D. Saadatmand, K. Zhou, S.V. Dmitriev, M.E. Zomorrodian, High energy density in the collision of N kinks in the  $\phi^4$  model, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **49** (2017) 30.  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.01.022>
- [22] P. Dorey, A. Halavanau, L. Mercer, T. Romanczukiewicz, Y. Shnir, Boundary scattering in the  $\phi^4$  model, *Journal of High Energy Physics* **05** (2017) 107.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2017\)107](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2017)107)
- [23] P. Dorey, T. Romanczukiewicz, Resonant kink-antikink scattering through quasinormal modes, *Physics Letter B* **779** (2018) 117.  
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.02.003>
- [24] S. Hoseinmardy, N. Riazi, Inelastic collision of kinks and antikinks in the  $\phi^6$  system, *International Journal of Modern Physics A* **25** (2010) 3261.  
<https://doi.org/10.1142/S0217751X10049712>
- [25] P. Dorey, K. Mersh, T. Romanczukiewicz, Y. Shnir, Kink-antikink collisions in the  $\phi^6$  model, *Physical Review Letter* **107** (2011) 091602.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.091602>
- [26] V.A. Gani, A.E. Kudryavtsev, M.A. Lizunova, Kink interactions in the (1+1)-dimensional  $\phi^6$  model, *Physical Review D* **89** (2014) 125009.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.125009>
- [27] I. Takiy, H. Weigel, Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited, *Physical Review D* **94** (2016) 085008.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.085008>
- [28] A. Moradi Marjaneh, V.A. Gani, D. Saadatmand, S.V. Dmitriev, K. Javidan, Multi-kink collisions in the  $\phi^6$  model, *Journal of High Energy Physics* **07** (2017) 028.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2017\)028](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2017)028)

- [47] Y. Zhong, X.-L. Du, Z.-C. Jiang, Y.-X. Liu, Y.-Q. Wang, Collision of two kinks with inner structure, *Journal of High Energy Physics* **02** (2020) 153.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2020\)153](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2020)153)
- [48] A. Alonso-Izquierdo, D. Bazeia, L. Losano and J. Mateos Guilarte, New models for two real scalar fields and their kinklike solutions, *Advances in High Energy Physics* **2013** (2013) 183295.  
<https://doi.org/10.1155/2013/183295>
- [49] H. Katsura, Composite-kink solutions of coupled nonlinear wave equations, *Physical Review D* **89** (2014) 085019.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.085019>
- [50] A. Alonso-Izquierdo, Reflection, transmutation, annihilation, and resonance in two-component kink collisions, *Physical Review D* **97** (2018) 045016.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.045016>
- [51] A. Alonso-Izquierdo, Kink dynamics in the MSTB Model, *Physica Scripta* **94** (2019) 085302.  
<https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab1184>
- [52] A. Alonso-Izquierdo, Asymmetric kink scattering in a two-component scalar field theory model, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **7** (2019) 200.  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.04.001>
- [53] V.A. Gani, M.A. Lizunova, R.V. Radomskiy, Scalar triplet on a domain wall: an exact solution, *Journal of High Energy Physics* **04** (2016) 043.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2016\)043](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2016)043)
- [54] J. Izaac, J. Wang, *Computational Quantum Mechanics* (Part of the Undergraduate Lecture Notes in Physics book series), Springer, (2018).  
sine-Gordon model, *The European Physical Journal C* **79** (2019) 620.  
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7125-5>
- [39] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, R. da Rocha, Study of models of the sine-Gordon type in flat and curved spacetime, *The European Physical Journal C* **73** (2013) 2499.  
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2499-2>
- [40] Y. Zhong, Y.-X. Liu, K-field kinks: stability, exact solutions and new features, *Journal of High Energy Physics* **10** (2014) 041.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2014\)041](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2014)041)
- [41] T.S. Mendonca, H.P. de Oliveira, The collision of two-kinks defects, *Journal of High Energy Physics* **09** (2015) 120.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2015\)120](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)120)
- [42] F.C. Simas, A.R. Gomes, K.Z. Nobrega, J.C. R.E. Oliveira, Suppression of two-bounce windows in kink-antikink collisions, *Journal of High Energy Physics* **09** (2016) 104.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2016\)104](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2016)104)
- [43] D. Bazeia, E. Belendryasova, V.A. Gani, Scattering of kinks of the sinh-deformed  $\phi^4$  model, *The European Physical Journal C* **78** (2018) 340.  
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5815-z>
- [44] D. Bazeia, A.R. Gomes, K.Z. Nobrega, F.C. Simas, Kink scattering in a hybrid model, *Physics Letter B* **793** (2019) 26.  
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.013>
- [45] Y. Zhong, R.-Z. Guo, C.-E. Fu, Y.-X. Liu, Kinks in higher derivative scalar field theory, *Physics Letter B* **782** (2018) 346.  
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.05.048>
- [46] D. Bazeia, A.R. Gomes, K.Z. Nobrega, F.C. Simas, Kink scattering in hyperbolic models, *International Journal of Modern Physics A* **34** (2019) 1950200.  
<https://doi.org/10.1142/S0217751X19502002>