

## Vacuum squeezing simulation in two photon lossy cavity

Mahmoud Sadeghi\*

Department of Physics, Faculty of Science, University of Hormozgan, Bandar-e-Abbas, Iran

Received: 10.11.2019    Final revised: 27.02.2021    Accepted: 26.04.2021

DOI: [10.22055/JRMBS.2021.16785](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.16785)

### Abstract

In this research, squeeze vacuum state of quantum light is simulated. For this purpose, single mode dissipative cavity with non-zero second-order susceptibility is used. Cavity nonlinear medium is driving by laser pump with known frequency, and pairs of identical photons are created, with one-half frequency of driving pump. This process known as degenerate parametric down conversion. In the absence of any dissipation, simulation shows linear time dependent squeezing parameter, which is in agreement with theoretical results. In two photon loss of cavity in contact with cold reservoir, competition between gain and two photon loss, results in stable squeezing of initial vacuum, in steady state of system.

**Keywords:** Simulation, Squeezed vacuum, Optical parametric oscillator.

---

\* Corresponding Author: m.sadeghi@hormozgan.ac.ir



## شبیه‌سازی چلانگی خلأ در یک کاواک واهلشی دو فوتونی

محمود صادقی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

دریافت: 1398/08/19 ویرایش نهائی: 1399/12/09 پذیرش: 1400/02/06

DOI: [10.22055/JRMBS.2021.16785](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.16785)

## چکیده

در این پژوهش فرایند تولید نور کوآنتومی خلأ چلانده شبیه‌سازی شده است. به این منظور، از یک کاواک واهلشی تک مد با یک محیط غیرخطی با پذیرفتاری مرتبه دوم غیر صفر استفاده شده است. محیط غیرخطی کاواک، با یک پمپ لیزر با فرکانس معین تحریک می‌شود و جفت فوتون‌های یکسان با فرکانس نصف لیزر محرک تولید می‌گردد. به این فرایند اصطلاحاً تبدیل نزولی پارامتری واگن می‌گویند. در غیاب هر نوع اتلافی، شبیه‌سازی، یک چلانگی با پارامتر تابع خطی از زمان را به دست می‌دهد که با محاسبات تحلیلی کاملاً سازگار است. در حضور اتلاف دو فوتونی ناشی از تماس سیستم با یک محیط کاملاً سرد، شبیه‌سازی نشان می‌دهد که رقابت بین بهره حاصل از لیزر محرک و اتلاف دو فوتونی، منجر به چلانگی پایدار برای خلأ اولیه در حالت پایای سیستم می‌گردد.

کلیدواژگان: شبیه‌سازی، خلأ چلانده، نوسانگر پارامتری نوری

## مقدمه

مهندسی ایجاد حالت‌های مختلف کوآنتومی نور یکی از شاخه‌های مهم اپتیک کوآنتومی است [1]. هرکدام از حالت‌های نور به دلیل ویژگی‌های خاص خود می‌تواند کاربردهای مختلفی در اپتیک کاربردی داشته باشند. حالت فوک، حالت همدوس استاندارد و غیرخطی، حالت همدوس چلانده، حالت‌های گره‌ای از جمله حالت‌های نور کوآنتومی‌اند که هم به صورت نظری و هم عملی مورد بررسی، تولید و آشکارسازی قرار گرفته‌اند [2,3]. اولین قدم جهت تولید هر کدام از حالت‌های مذکور، یافتن هامیلتونی مناسب است که با یک تحول یکانی و یا غیر یکانی، سیستم را به حالت مورد نظر برساند [4-6].

یک حالت کوآنتومی را حالت چلانده می‌گویند اگر واریانس عملگر تربیع میدان در یک جهت دلخواه  $\hat{X}_\theta = \hat{X}_1 \cos \theta + \hat{X}_2 \sin \theta$  کمتر از یک چهارم شود [7]:

$$\langle (\Delta X_\theta)^2 \rangle < 0.25. \quad 1$$

$\hat{X}_1$  و  $\hat{X}_2$  عملگرهای تربیع میدان در جهت  $x$  و  $y$  اند:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \quad 2$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger).$$

با تداخل‌سنج‌های لیزری مورد استفاده در آشکارسازهای امواج گرانشی-ممکن است منجر به فناوری‌هایی برای به روزرسانی لیگو<sup>4</sup> و رصدخانه‌های مشابه شود [12-14]. نور فشرده شده معمولاً در بلورهای غیرخطی تولید می‌شود که در آن یک فوتون پمپ، دو فوتون دختر تولید می‌کند. از آنجا که این دو فوتون در یک فرآیند کوآنتومی یکسان تولید می‌شوند، همبستگی‌هایی را به نمایش می‌گذارند که می‌تواند برای کاهش نوفه در ابزار اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گیرد. به‌لحاظ نظری محدودیتی در میزان افزایش چلانندگی کوآنتومی وجود ندارد اما در عمل، تلفات فوتون و نوفه آشکارساز، حداکثر چلانندگی قابل‌دستیابی را محدود می‌کند. رکورد اول این گروه در سال 2011 به ثبت رسید، آنها از طراحی با اغتشاشات دامنه استفاده کردند که حدود 19 برابر نوفه نور خروجی را کمتر از نوفه خلا (یا همدوس) به دست آوردند (معادل چلانندگی 12.7 دسی‌بل) [15]. در ادامه کار خود در سال 2016، با کاهش تلفات نوری در طرح قبلی، نسبت نوفه خروجی به نوفه خلأ را به میزان 32 برابر کاهش دادند (معادل چلانندگی 15 دسی‌بل). این چلانندگی در طول‌موج 1064 نانومتر به دست آمد، که در تداخل‌سنج‌های رصدخانه‌های امواج گرانشی فعلی استفاده می‌شود [11,12,16].

نور چلاننده در تداخل‌سنجی [7,17]، کیهان‌شناسی و آشکارسازی امواج گرانشی [12,13,16,18,19]، فیزیک ذرات [20]، حالت‌جامد [21] و حوزه‌های متنوع

زاویه‌ای که کمترین واریانس زیر 0.25 را دارد، زاویه چلانندگی<sup>1</sup>  $\theta$  می‌گویند. چلانندگی در تربیع  $\hat{X}_\theta$ ، به مفهوم کمتر بودن نوفه در عملگر تربیع میدان در جهت  $\theta$ ، نسبت به حالت خلأ (یا همدوس) است، بنابراین می‌توان عامل چلانندگی<sup>2</sup> را برحسب دسی‌بل ( $dB$ )، به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$S = -10 \log_{10} \left( \frac{\langle (\Delta X_\theta)^2 \rangle}{\langle (\Delta X_{vac})^2 \rangle} \right). \quad 3$$

در تعریف فوق  $\langle (\Delta X_{vac})^2 \rangle$  واریانس میدان خلأ (یا همدوس) است که مقدار آن 0.25 است. چلانندگی برحسب دسی‌بل بزرگ‌تر، به معنی واریانس در عملگر تربیع  $\hat{X}_\theta$  کوچک‌تر است.

نور چلاننده اولین بار در اواسط دهه‌ی هشتاد تولید شد [8,9]. در آن زمان، عامل چلانندگی در حدود دو تا سه دسی‌بل به‌دست آمد ولی امروزه این مقدار به بالای ده دسی‌بل افزایش یافته است [10,11].

حالت‌های کوآنتومی چلاننده شده نور نوفه کمتری نسبت به آن‌هایی که توسط محدودیت‌های کلاسیک توسط نوفه ضربه‌ای<sup>3</sup> ایجاد می‌شود، دارند. چنین حالتی ممکن است به محققان کمک کند تا حساسیت آشکارسازهای موج گرانشی را افزایش دهند یا طرح‌های عملی اطلاعات کوآنتومی را اجرایی کنند. اکنون تیمی از محققان انستیتوی فیزیک جاذبه در دانشگاه لایب نیتس هانوفر آلمان، روشی را برای چلانند هر چه بیشتر نوفه برای رسیدن به سطوح پایین‌تر چلانندگی، ارائه کرده‌اند. رویکرد جدید-سازگار

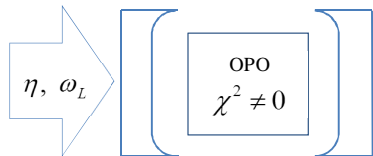
<sup>4</sup> The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)

<sup>1</sup> Squeeze angle

<sup>2</sup> Squeeze factor

<sup>3</sup> Shot noise

حالت با اتلاف، میزان چلانندگی وضعیت نهایی سیستم را با چلانندگی مرجع [11] مقایسه خواهیم نمود.



شکل 1. نمای یک کاواک تک‌مود با محیط غیرخطی در معرض یک لیزر محرک کلاسیکی با قدرت  $\eta$  و فرکانس  $\omega_L$ .

### دینامیک سیستم

یک کاواک اپتیکی که از یک محیط غیرخطی با پذیرفتاری الکتریکی مرتبه دوم غیر صفر  $\chi^2 \neq 0$  پر شده است و در معرض تابش یک لیزر کلاسیکی قرار دارد را بررسی می‌کنیم. هامیلتونی کل سیستم با فرض کوآنتومی بودن تابش‌ها و وقوع یک تبدیل نزولی پارامتری واگن، به صورت اولیه زیر است [23]:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_p b^\dagger b + i\hbar\chi^2(a^2 b^\dagger - a^{\dagger 2} b) \quad 4$$

جمله اول تابش کوآنتومی کاواک را توصیف می‌کند، جمله دوم تابش لیزر محرک پمپ است که باید حد کلاسیکی آن را تعیین کنیم (لیزر محرک یک تابش همدوس کلاسیکی فرض می‌شود) و جمله سوم جفت‌شدگی این دو را در محیط غیرخطی کاواک بیان می‌کند که برای آن نیز حد کلاسیکی باید تعیین کنیم. در تقریب کلاسیکی پمپ، عملگرهای  $b$  و  $b^\dagger$  را با

دیگری از فیزیک مورد استفاده قرار گرفته است. خلأ چلاننده یکی از چند حالت چلاننده نور است که در ادامه، توسط نواربازار کوآنتوم برای پایتون (کیوتیپ)<sup>1</sup> شبیه‌سازی و ویژگی‌های آن بیان خواهد شد. کیوتیپ یک بسته نرم‌افزار منبع‌باز به زبان پایتون است که برای شبیه‌سازی دینامیک سیستم‌های کوآنتومی باز استفاده می‌شود و به صورت آزاد جهت استفاده و یا اصلاح، در همه سیستم‌عامل‌های بزرگ مانند ویندوز، لینوکس و مک در دسترس است [22].

سیستم مورد استفاده، یک کاواک با محیط غیرخطی همراه با یک پمپ لیزر محرک کلاسیکی است که در شکل 1 نشان داده شده است. در دو وضعیت سیستم بسته بدون اتلاف و سیستم باز در تماس با یک منبع سرد که باعث اتلاف دو فوتونی سیستم گردد، شبیه‌سازی انجام می‌گیرد. روند بررسی به صورت زیر خواهد بود: در ابتدا هامیلتونی سیستم مورد نیاز تعیین خواهد شد و سپس با حل معادله مستر، تحول زمانی سیستم را در دو وضعیت بدون اتلاف و با اتلاف تعیین خواهیم کرد. در وضعیت بدون اتلاف، محاسبات تحلیلی، یک چلانندگی تابع زمان را نشان می‌دهند [23] و در وضعیت با اتلاف دوفوتونی، انتظار می‌رود رقابت بین بهره و اتلاف، منجر به یک چلانندگی پایدار در تعادل سیستم با محیط گردد. رصد<sup>2</sup> این تحول در دو وضعیت ذکر شده شبیه‌سازی می‌شوند. در حالت بدون اتلاف با محاسبات تحلیلی موجود صحت‌سنجی و در

<sup>2</sup> Monitoring

<sup>1</sup> Quantum Toolbox in Python

یک ثابت، هامیلتونی خواهد شد:  $\beta e^{i\omega_p t}$  و  $\beta^* e^{-i\omega_p t}$  جایگزین می‌کنیم، صرف‌نظر از

زمانی سیستم در غیاب محیط اتلافی، از حل معادله زیر به‌دست می‌آید [24]:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H_{eff}] \quad 8$$

$\rho$  ماتریس چگالی کاواک در دستگاه چرخنده و  $H_{eff}$  هامیلتونی مؤثر سیستم در دستگاه چرخنده، از رابطه 4 حاصل می‌شود. حالت خلأ چلانده برحسب ویژه‌حالت‌های تعداد یا فوک به‌صورت زیر می‌باشد [23]:

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} e^{im\theta} (\tanh r)^m |2m\rangle \quad 9$$

رابطه فوق اشغال شدن فقط حالت‌های زوج را برای فوتون‌های خلأ چلانده نشان می‌دهد. طبق محاسبات قسمت قبل، پمپ محرک  $i\hbar(\eta^* a^2 - \eta a^{\dagger 2})$  در غیاب وادیدگی، یک حالت خلأ چلانده تابع زمان ایجاد می‌کند  $|\xi(t)\rangle = |2\eta t\rangle = |2\chi^2 \beta t\rangle$ . البته همواره به‌دلیل وجود اتلاف هرچند کوچک در سیستم، در عمل نمی‌توان نتایج مطلوب و دقیق این قسمت را به‌جز برای بازه زمانی کوتاه پس از روشن شدن پمپ، به‌دست آورد [25]. در اینجا فرایند را از شبیه‌سازی سیستم، تحقیق خواهیم کرد.

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + i\hbar(\eta^* a^2 e^{i\omega_p t} - \eta a^{\dagger 2} e^{-i\omega_p t}) \quad 5$$

که در آن  $\eta = \chi^2 \beta$  تعریف می‌شود. در تصویر برهم‌کنش (و یا دستگاه چرخنده با سرعت  $\frac{\omega_p}{2}$ )، هامیلتونی مؤثر (که در معادله مستر ظاهر می‌شود) به‌صورت زیر خواهد شد:

$$H_{eff} = \hbar\Delta a^\dagger a + i\hbar(\eta^* a^2 - \eta a^{\dagger 2}) \quad 6$$

که در آن  $\Delta$  وادیدگی کاواک با پمپ به‌صورت  $\Delta = \omega - \frac{\omega_p}{2}$  تعریف می‌شود. تابعیت زمانی جمله برهم‌کنشی، در دستگاه چرخنده مذکور حذف شده است. در غیاب وادیدگی  $\Delta = 0$ ، تنها جمله دوم در هامیلتونی مؤثر غیر صفر است که در مقایسه با عملگر مولد یک عملگر چلانده‌ساز،

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})\right] \quad 7$$

پارامتر چلانندی آن به‌مقدار  $\xi = 2\eta t = 2\chi^2 \beta t$  به‌دست می‌آید که تابعی از زمان است. هامیلتونی 4 در دستگاه چرخنده، تحول زمانی سیستم را به‌دست می‌دهد. جهت انجام شبیه‌سازی دو حالت را در نظر می‌گیریم:

### الف- در غیاب هر نوع محیط اتلافی

توسط یک لیزر کلاسیکی با قدرت  $\eta$ ، یک کاواک که در حالت پایه (خلأ) قرار دارد و داخل آن از یک ماده غیرخطی پر شده است را تحریک می‌کنیم. تحول

### نتایج شبیه‌سازی در غیاب اتلاف

با حل معادله لیوویل ون نیومن رابطه 6، ماتریس چگالی تابش کاواک حاصل می‌شود. با معلوم شدن  $\rho(t)$  تمام اطلاعات تحول تابش معلوم می‌شود.

برای سیستم مورد بررسی، مقدار پارامتر چلانندگی  $\xi(t) = 0.1t$  است که به صورت یک عدد مختلط با فاز صفر است. شکل 3 تطابق مقادیر این دو واریانس حاصل از شبیه‌سازی را با رابطه 9 به خوبی نشان می‌دهد.

شکل 4، عامل چلانندگی  $S$  رابطه 1 را به صورت تابعی از زمان، برای عملگر تربیع  $\hat{X}_1$  نشان می‌دهد. از ترکیب تعریف 1 با رابطه 9، عامل چلانندگی یک تابع خطی از زمان به صورت زیر خواهد شد:

$$S(t) = 20|\xi(t)| \log_{10} e = (2 \log_{10} e) t \quad 12$$

شبیه‌سازی به خوبی این رابطه را در شکل 4 نشان می‌دهد. شکل 5 تابع ویگنر و نیز تابع توزیع حالت‌های فوک تابش را نشان می‌دهد. تابع ویگنر تابش اولیه خلأ که گاوسی شکل است، در صفحه دو عملگر تربیع  $(\text{Re } X_1, \text{Re } X_2)$  به شکل دایره است. با روشن شدن پمپ گذار تابش کاواک به حالت خلأ چلاننده آغاز می‌شود. چلانندگی در عملگر تربیع  $\hat{X}_1$  پس از هشت واحد زمانی در شکل کاملاً مشخص است. ردیف پایین شکل 5، پر شدن حالت‌های فوک زوج 0، 2، 4، 6، 8 و 10 را با گذشت زمان نشان می‌دهد. از رابطه 7 مشاهده شد که فوتون‌های خلأ چلاننده تنها حالت‌های زوج را اشغال می‌کنند. شبیه‌سازی با بحث تحلیلی قسمت قبل، کاملاً هماهنگ است.

پارامترهای شبیه‌سازی سیستم را به صورت زیر فرض می‌کنیم: بعد فضای هیلبرت تابش  $N = 60$ ، ثابت پلانک  $\hbar = 1$ ، قدرت لیزر محرک کلاسیکی  $\eta = 0.05$ ، وادندگی کاواک و پمپ  $\Delta = 0$ .

شکل 2 متوسط تعداد فوتون‌ها را ضمن تحول زمانی سیستم، از خلأ با متوسط فوتون صفر، به خلأ چلاننده که با روشن شدن پمپ دارای متوسط فوتونی تابع زمان می‌شود را نشان می‌دهد. محاسبات تحلیلی رابطه زیر را برای متوسط فوتون‌های یک تابش خلأ چلاننده به دست می‌دهد [23]:

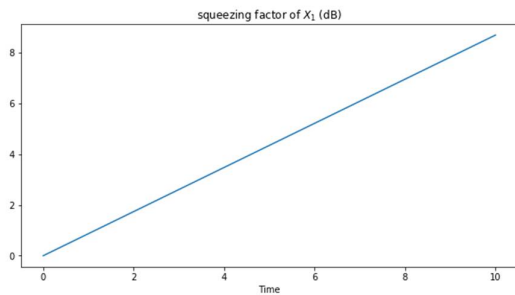
$$\bar{n} = \langle \xi(t) | a^\dagger a | \xi(t) \rangle = \sinh^2 |\xi(t)| \quad 10$$

که  $\xi(t) = 2\eta t$  پارامتر چلانندگی تابش است که برای سیستم مورد بررسی،  $0.1t$  است. مقایسه شکل رابطه 8 که با نقطه چین قرمز ترسیم شده، با مقدار متوسط فوتون‌های حاصل از شبیه‌سازی که با خط پیوسته آبی رسم شده، سازگاری کامل این دو را نشان می‌دهد.

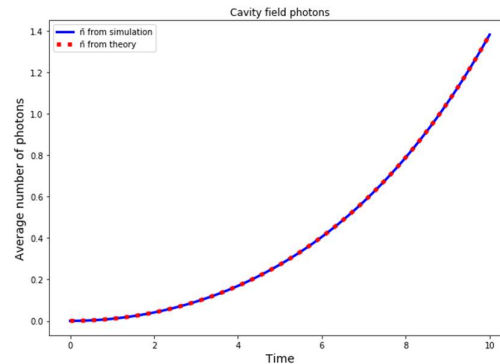
شکل 3 واریانس دو عملگر تربیع  $X_1$  و  $X_2$  حاصل از شبیه‌سازی را به صورت تابعی از زمان که با خط پیوسته نشان داده شده است، در مقایسه با مقادیر حاصل از محاسبه تحلیلی که به صورت نقطه چین قرمز رنگ مشخص شده را نشان می‌دهد. محاسبه واریانس دو عملگر مذکور نسبت به حالت چلاننده همدوس، برای پارامتر چلانندگی با فاز صفر مقادیر زیر را به دست می‌دهد [23]:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) | (\Delta \hat{X}_1)^2 | \xi(t) \rangle &= \frac{1}{4} e^{-2|\xi|} \\ \langle \xi(t) | (\Delta \hat{X}_2)^2 | \xi(t) \rangle &= \frac{1}{4} e^{2|\xi|} \end{aligned} \quad 11$$

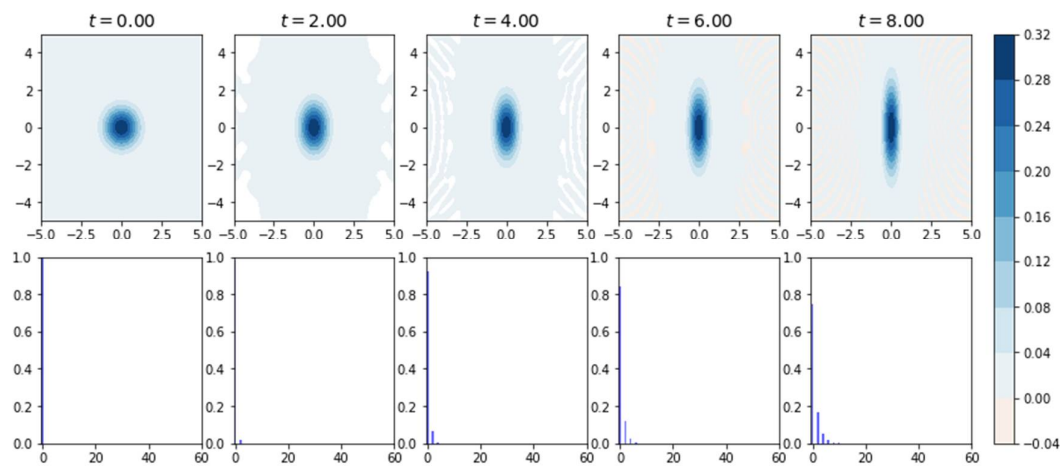
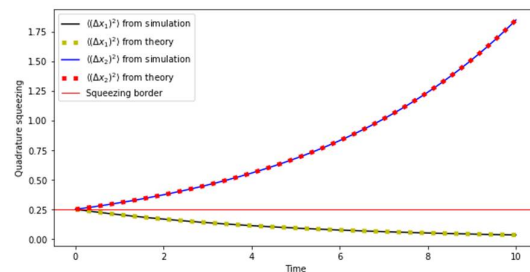
**شکل 3.** واریانس عملگرهای تربیع  $\hat{X}_1$  و  $\hat{X}_2$  برای تابش کاواک بدون اتلاف به صورت تابعی از زمان و مقایسه آن با مقادیر رابطه تحلیلی 9 خط افقی قرمز، واریانس میدان خلأ (مرز چلانندگی) را نشان می‌دهد.



**شکل 4.** عامل چلانندگی عملگر تربیع  $\hat{X}_1$  برحسب دسی‌بل که به صورت تابعی خطی از زمان به شکل رابطه 10 تغییر می‌کند.



**شکل 2.** مقادیر میانگین تعداد فوتون‌های کاواک بدون اتلاف، پس از روشن شدن پمپ، تابعی از زمان که با خط پیوسته آبی مشخص شده و مقایسه آن با رابطه تحلیلی 8 که با نقطه‌چین قرمز نشان داده شده است.



**شکل 5.** تابع ویگنر و همچنین توزیع فوک فوتون‌های تابش کاواک، در حالت بدون اتلاف، در پنج لحظه مختلف. چلانندگی  $\hat{X}_1$  از لحظه روشن شدن پمپ شروع می‌شود.

چگالی سیستم  $\rho(t)$ ، در این لحظات تعیین شده و سپس متوسط تعداد فوتون‌ها از رابطه زیر تعیین شده‌اند:

$$\langle a^\dagger a \rangle = \text{tr}(\rho(t) a^\dagger a) \quad 14$$

مطابق شکل، در حدود پنج واحد زمانی طول می‌کشد که سیستم به تعادل با محیط برسد. شبیه‌سازی مقدار متوسط فوتون‌های تابش نهایی را  $\bar{n}_{ss} \approx 0.23$  به دست می‌دهد که در این شکل با خط افقی نشان داده شده است. با توجه به رابطه متوسط فوتون‌ها و پارامتر چلانندگی، رابطه 8، مقدار نهایی این پارامتر حدود  $\xi_{ss} = 0.46$  حاصل شده است. پارامترهای استفاده شده در شبیه‌سازی سیستم مانند مورد بدون اتلاف‌اند، به اضافه اینکه ضریب واهش سیستم توسط محیط مقدار  $\kappa = 0.4$  فرض شده است.

شکل 7، واریانس دو عملگر تربیع  $X_1$  و  $X_2$  را از لحظه روشن شدن پمپ تا تعادل نهایی سیستم را نشان می‌دهد. واریانس دو عملگر تربیع  $\hat{X}_{1,2}$ ، برای این شکل، از رابطه زیر تعیین شده‌اند:

$$\begin{aligned} (\Delta X_{1,2})^2 &= \langle \hat{X}_{1,2}^2 \rangle - \langle \hat{X}_{1,2} \rangle^2 \\ &= \text{tr}(\rho(t) \hat{X}_{1,2}^2) - (\text{tr}(\rho(t) \hat{X}_{1,2}))^2 \end{aligned} \quad 15$$

تابش در تمام لحظات دارای چلانندگی  $X_1$  است و این از ویژگی‌های خلأ چلاننده با فاز پارامتر چلانندگی صفر یا  $\frac{\pi}{2}$  است. شبیه‌سازی مقدار نهایی واریانس را برای دو عملگر تربیع به مقدار  $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle_{ss} = 0.12$  و  $\langle (\Delta X_2)^2 \rangle_{ss} = 0.61$  را به دست می‌دهد.

## ب- در حضور محیط اتلافی دوفوتونی

با فرض اتلاف دوفوتونی برای واهلش کاواک، تحول زمانی سیستم از حل معادله مستر زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H_{\text{eff}}] + \frac{\kappa}{2} (2a^2 \rho a^{\dagger 2} - a^{\dagger 2} a^2 \rho - \rho a^{\dagger 2} a^2) \quad 13$$

$\kappa$  ضریب واهلش کاواک، ناشی از تماس با محیط است. دمای محیط صفر فرض شده است. در این وضعیت، انتظار می‌رود رقابت بین بهره حاصل از پمپ محرک و اتلاف محیط، در نهایت منجر به یک چلانندگی پایدار برای خلأ اولیه کاواک گردد؛ به عبارت دیگر، یک تابش خلأ چلاننده در حالت پایای نهایی حاصل شود. این فرایند را نیز از شبیه‌سازی تحول سیستم تحقیق می‌کنیم.

## نتایج شبیه‌سازی در محیط اتلافی

حال سیستم شکل 1 را در تماس با یک محیط کاملاً سرد، با دمای صفر  $T = 0$  قرار می‌دهیم. برای خلأ اولیه متوسط تعداد فوتون‌های کاواک، صفر است و کاواک و محیط سرد در تعادل‌اند. با روشن شدن لیزر محرک، سیستم به سمت چلانندگی حرکت می‌کند. شکل 6، مقادیر میانگین محاسبه‌شده تعداد فوتون‌های کاواک  $\langle a^\dagger a \rangle = \bar{n}_{ss}$  را تابعی از زمان، در ضریب واهلش کاواک برابر  $\kappa = 0.4$  را نشان می‌دهد. در تمام محاسبات  $\hbar = 1$  فرض شده است. محور زمان در شکل‌های 7.6 و 8، بین 0 تا 40 واحد زمانی به 101 قسمت تقسیم شده، از حل معادله مستر، ماتریس



مورد بررسی ما، واریانس تربیع  $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle$  و  $\langle (\Delta X_2)^2 \rangle$ ، به صورت تابعی از زمان، در شکل 7 نشان داده شده است. برای تابش خلأ و همدوس این مقدار برای هردو عملگر تربیع دقیقاً 0.25 است. با روشن شدن پمپ، عدم قطعیت در عملگر  $X_2$  زیاد می‌شود ولی برای عملگر  $X_1$  در تمام لحظات بعدی کمتر از مقدار کمینه 0.25 می‌شود. به این ترتیب تابش از لحظه روشن شدن پمپ تا رسیدن به حالت پایایی نهایی، از حالت‌هایی با چلانندگی  $X_1$  عبور می‌کند و در نهایت از رقابت بین بهره پمپ و اتلاف محیط، یک تابش خلأ چلاننده  $\hat{X}_1$  حاصل می‌گردد. شکل 8 وضعیت چلانندگی تربیع این عملگر را برحسب دسی‌بل تا رسیدن به تعادل نهایی سیستم، به مقدار حدود 3.35 دسی‌بل را نشان می‌دهد.

### پارامتر مندل<sup>8</sup> و تابع همدوسی مرتبه دو

آمار شمارش فوتون‌ها، تابعی از زمان از پارامتر مندل تابش تعیین می‌گردد که به صورت زیر تعریف می‌شود [26]:

$$Q(t) = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle - \langle a^{\dagger} a \rangle^2}{\langle a^{\dagger} a \rangle} \quad 17$$

برای توزیع پواسونی فوتون‌ها مقدار فوق صفر خواهد شد. مقدار مثبت  $Q$  بیانگر توزیع ابرپواسونی فوتون‌های تابش است (فوتون‌های گروه<sup>9</sup>) و مقدار منفی آن بیانگر آمار زیرپواسونی (فوتون‌های پادگروه<sup>10</sup>) است. شکل 12 مقدار این کمیت را تابع

شکل 8، مقدار عامل چلانندگی عملگر تربیع  $\hat{X}_1$  را برحسب دسی‌بل نشان می‌دهد. مطابق شکل، مقدار چلانندگی نهایی حدود 3.35 dB را برای حالت تعادل سیستم، نشان می‌دهد.

شکل 9، چلانندگی سیستم را با رسم تابع ویگنر و نیز تابع توزیع حالت‌های فوک تابش، از لحظه روشن شدن پمپ تا بیست واحد زمانی پس از آن را رصد می‌کند. تابع ویگنر در لحظه صفر مربوط به خلأ است که گاوسی شکل است، به تدریج در راستای افقی ( $X_1$ ) چلاننده شده است. همچنین توزیع فوک اولیه فوتون‌ها که همگی در حالت پایه بودند، با شروع پمپاژ، حالت‌های زوج 2 و 4 را هم به تدریج اشغال کرده‌اند. شکل‌های 10 و 11 وضعیت نهایی سیستم را بعد از رقابت بین بهره پمپ محرک و محیط اتلاف دهنده فوتونی نشان می‌دهند. توزیع فوک فوتون‌های نهایی را که تنها حالت‌های زوج را اشغال کرده‌اند، نشان‌دهنده خلأ چلاننده نهایی است. همچنین چلانندگی  $X_1$  تابش نهایی، به وضوح از فشردگی تابع ویگنر در امتداد افقی مشخص است.

### ویژگی‌های آماری تابش پایایی نهایی

چلانندگی دو عملگر تربیع<sup>7</sup>  $X_1$  و  $X_2$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle (\Delta X_i)^2 \rangle < \frac{1}{4}, \quad i=1,2 \quad 16$$

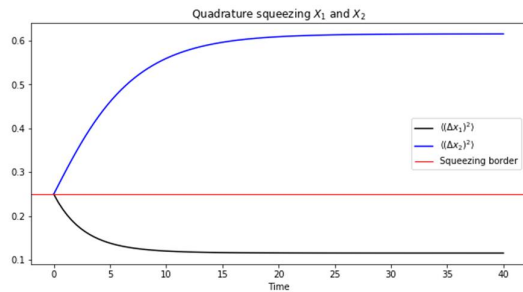
به این معنی که تابشی که توان دو عدم قطعیت هرکدام از دو عملگر تربیع آن کمتر از مقدار 0.25 باشد، اصطلاحاً چلاننده تربیع آن عملگر است. برای سیستم

<sup>9</sup> Bunching photons

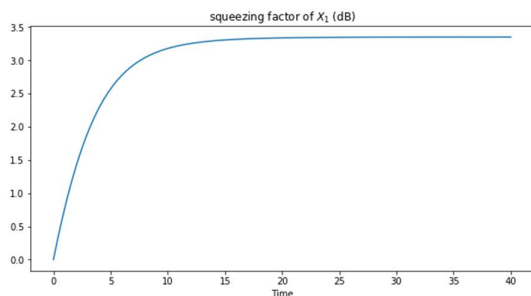
<sup>10</sup> Anti-bunching photons

<sup>7</sup> Quadrature squeezing

<sup>8</sup> Mandel parameter



شکل 7. واریانس دو عملگر تربیع به صورت تابعی از زمان. خط قرمز مرز چلانگی را نشان می‌دهد.



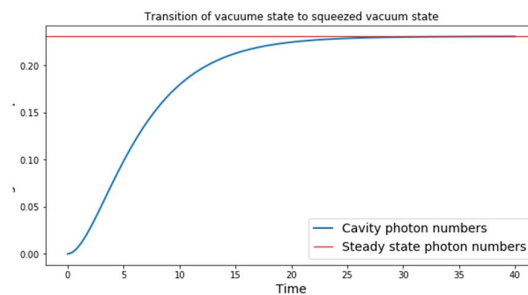
شکل 8. عامل چلانگی عملگر تربیع  $\hat{X}_1$  بر حسب دسی‌بل، تابعی از زمان.

زمان، برای سیستم مورد بررسی ما نشان می‌دهد. از لحظه روشن شدن پمپ، فوتون‌های کاواک از حالت‌های با آمار ابرپواسونی عبور می‌کنند و حرکت آن‌ها به صورت گروهه است. شکل 13 تحول زمانی تابع همدوسی مرتبه 2،  $g^{(2)}(0)$  را نشان می‌دهد. بزرگ‌تر از 1 بودن این تابع باز دلیلی بر توزیع ابرپواسونی فوتون‌های کاواک و حرکت گروهه آنهاست. مقدار تعادل نهایی تابع مندل و تابع  $g^{(2)}(0)$  از روی شکل 12 و 13 برابر:

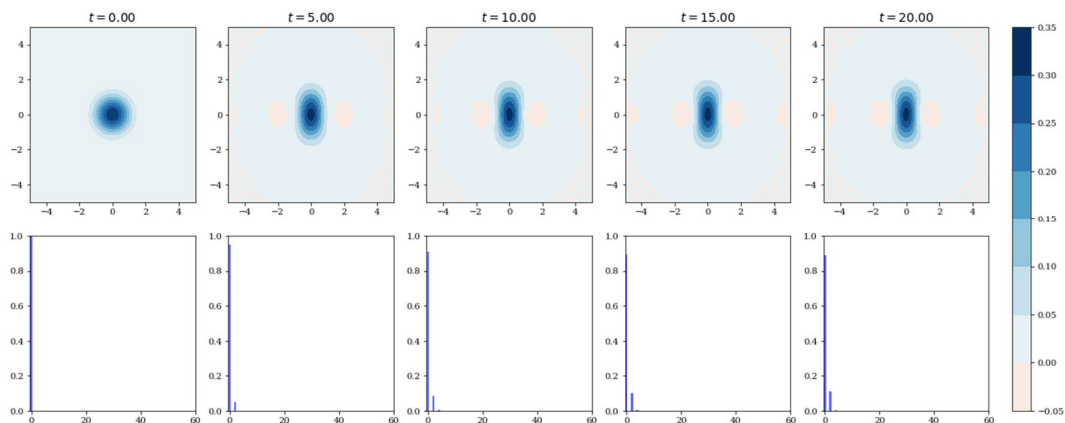
$$g_{ss}^{(2)}(0) \approx 4.68, Q_{ss} \approx 0.85 \quad 18$$

هستند.

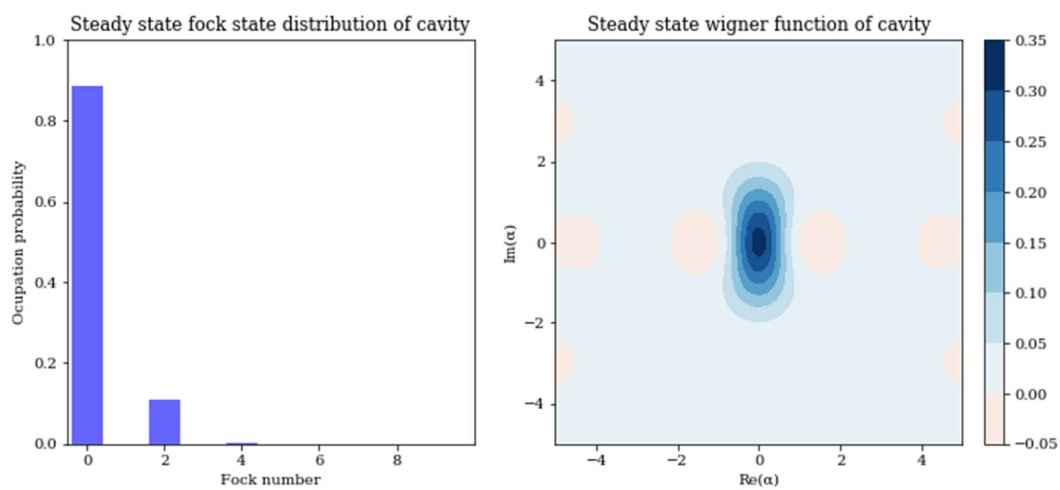
با توجه به مقدار  $\bar{n}_{ss}$  که قبلاً تعیین شد، رابطه تحلیلی بین دو کمیت مذکور به صورت  $Q = \bar{n}(g^{(2)}(0) - 1)$ ، محقق می‌گردد.



شکل 6. مقادیر میانگین محاسبه‌شده تعداد فوتون‌های کاواک  $\bar{n}_{ss} = \langle a^\dagger a \rangle$  تابعی از زمان. پس از حدود بیست و پنج واحد زمانی میانگین فوتون‌ها به مقدار تعادلی حدود 0.23 می‌رسد.



شکل 9. تغییرات تابع ویگنر (بالایی) و توزیع فوک (پایینی) برای تابش کاواک در لحظات بین صفر تا بیست واحد زمانی پس از روشن شدن پمپ. سیستم بعد از این بازه زمانی به یک چلانگی پایدار در عملگر  $X_1$  می‌رسد.

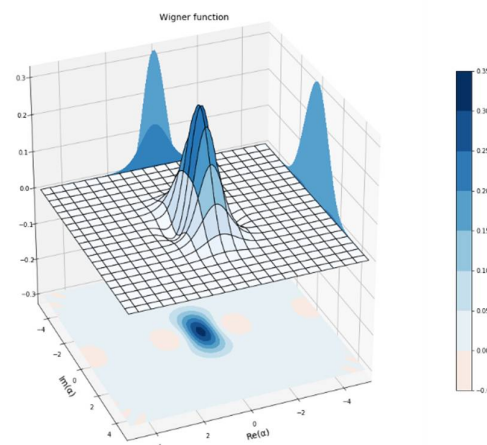


شکل 10. تابع ویگنر و توزیع فوک فوتون‌های کاواک، پس از رسیدن به تعادل نهایی

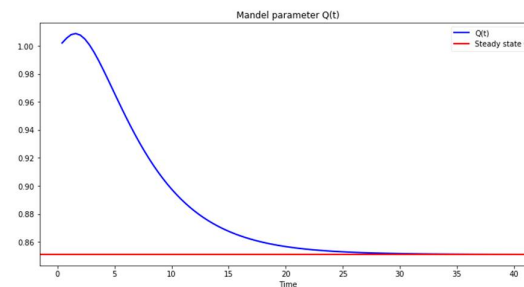
## نتیجه‌گیری

در این تحقیق، شبیه‌سازی ایجاد یک خلأ چلانده مورد بررسی قرار گرفت. جهت انجام کار، از یک کاواک که از محیط با غیرخطیت مرتبه دوم پر شده بود، استفاده شد. کاواک در معرض یک لیزر کلاسیکی با قدرت  $\eta = 0.05$  قرار گرفت. سیستم در دو وضعیت بدون تماس با محیط اتلافی و با تماس با یک محیط اتلافی دو فوتونی، شبیه‌سازی شد. بعد فضای هیلبرت سیستم  $N = 60$  در نظر گرفتیم. در حالت بدون اتلاف، وضعیت تابش در لحظات مختلف رصد شد. متوسط تعداد فوتون‌های کاواک و چلانگی دو عملگر تربیع، تابعی از زمان تعیین شدند. وضعیت سیستم از دیدگاه تابع ویگنر و توزیع حالت‌های فوک رصد شد. همگی بیانگر چلانگی  $\hat{X}_1$  با پارامتر چلانگی تابع خطی از زمان  $\xi(t) = 2\eta t$  برای خلأ اولیه سیستم بودند (شکل‌های 2-5).

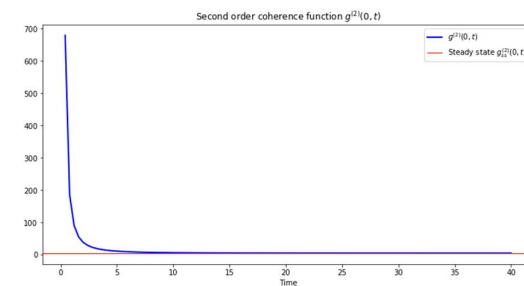
در حالت دوم، جهت رسیدن به یک چلانگی پایدار، سیستم در تماس با یک محیط سرد اتلاف دهنده دو فوتونی، با ضریب واهلش به میزان  $\kappa = 0.4$  قرار گرفت. یک چلانگی پایدار در حالت پایا را به دست داد. متوسط تعداد فوتون‌های کاواک تابع زمان رصد شد. پس از حدود بیست واحد زمانی خلأ اولیه چلانده شده و با محیط به تعادل رسید. با توجه به متوسط فوتون‌های نهایی، وضعیت تعادل نهایی پارامتر چلانگی حدود  $\xi = 0.46$  و عامل چلانگی  $3.35 \text{ dB}$  به دست آمد. این میزان چلانگی معادل با کاهش  $2/17$  برابری نسبت نوفه خروجی به نوفه خلأ هست که در مقایسه با مرجع [11]، چلانگی کمتری



شکل 11. تابع ویگنر تابش نهایی به صورت سه‌بعدی. قسمت حقیقی  $\alpha$  متناسب با  $X_1$  و قسمت موهومی  $\alpha$  متناسب با  $X_2$  است. چلانگی در  $X_1$  از روی شکل مشخص است.



شکل 12. پارامتر مندل تابع زمان برای تابش کاواک. خط قرمز همین پارامتر را پس از رسیدن به حالت تعادل نهایی نشان می‌دهد.



شکل 13. تابع همدوسی مرتبه دو  $g^{(2)}(0)$  برای فوتون‌های کاواک. خط قرمز همین پارامتر را پس از رسیدن به حالت تعادل نهایی نشان می‌دهد.

- [6] D.F. Walls Squeezed states of light *Nature* **306** (1983) 141  
<https://www.nature.com/articles/306141a0>
- [7] R. Schnabel Squeezed states of light and their applications in laser interferometers *Physics Reports* **684** (2017) 1-51  
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.04.001>
- [8] L.-A. Wu, H. Kimble, J. Hall, H. Wu Generation of squeezed states by parametric down conversion *Physical Review Letters* **57** 2520 (1986)  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.57.2520>
- [9] R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz, J.F. Valley Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity *Physical Review Letters* **55** (1985) 2409  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.55.2409>
- [10] U.L. Andersen, T. Gehring, C. Marquardt, G.J.P.S. Leuchs 30 years of squeezed light generation **91** (2016) 053001  
<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/91/5/053001/pdf>
- [11] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann and R. Schnabel Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency *Physical Review Letters* **117** (2016) 110801  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.110801>
- [12] M. Mehmet, H.J.C. Vahlbruch and Q. Gravity High-efficiency squeezed light generation for gravitational wave detectors **36** (2018) 015014  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/aaf448/meta>
- [13] M. Mehmet, H.J.G. Vahlbruch The Squeezed Light Source for the Advanced Virgo Detector in the Observation Run O3 **8** (2020) 79  
<https://doi.org/10.3390/galaxies8040079>
- از شبیه‌سازی حاصل شده است ولی در مقایسه با مرجع [۲۷] (با چلانندگی 1/36 برابری نسبت نوفه خروجی به نوفه خلأ)، شبیه‌سازی میزان چلانندگی بیشتری را نشان می‌دهد. همچنین تحول سیستم از دیدگاه تابع شبه احتمال ویگنر و نیز نحوه توزیع حالت‌های فوک، برای تابش در بیست واحد زمانی ابتدای روشن شدن پمپ، رصد شد (شکل 9). معلوم شد که در تمام این لحظات سیستم از حالت‌های چلاننده  $X_1$  عبور کرده است و در نهایت، پارامتر مندل، آمار شمارش فوتون‌ها را نشان داد که بیانگر حرکت گروه فوتون‌ها از لحظه شروع پمپاژ تا تعادل نهایی سیستم بود.
- مرجع‌ها
- [1] K. Vogel, V. Akulin, W. Schleich Quantum state engineering of the radiation field *Physical Review Letters* **71** (1993) 1816  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.71.1816>
- [2] V. Dodonov Nonclassical states in quantum optics: a squeezed review of the first 75 years *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **4** (2002) R1  
<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1464-4266/4/1/201/pdf>
- [3] V.V. Dodonov, V.I. Man'ko *Theory of nonclassical states of light* CRC Press (2003)  
<https://doi.org/10.1201/9781482288223>
- [4] D.F. Walls Growing expectations from squeezed states of light *Nature* **324** (1986) 210  
<https://www.nature.com/articles/324210a0>
- [5] L.-A. Wu, M. Xiao and H. Kimble Squeezed states of light from an optical parametric oscillator *Journal of the Optical Society of America A* **4** (1987) 1465-75  
<https://doi.org/10.1364/JOSAB.4.001465>

- [20] B.A. Bambah, M.V. Satyanarayana Squeezed coherent states and hadronic multiplicity distributions *Progress of Theoretical Physics Supplement* **86** (1986) 377-82  
<https://doi.org/10.1143/PTPS.86.377>
- [21] N.B. An Exciton-induced squeezed state of light in semiconductors *Physical Review B* **48** (1993) 11732  
<https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.48.11732>
- [22] J.R. Johansson, P.D. Nation, F.J.C. P.C. Nori QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems **183** 1760-72 (2012)  
<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.02.021>
- [23] C. Gerry, P.L. Knight *Introductory quantum optics* Cambridge university press (2005)  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511791239>
- [24] H.-P. Breuer and F. Petruccione *The theory of open quantum systems* Oxford University Press on Demand (2002)  
<https://oxford.universitypressscholarship.com/view/10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001/acprof-9780199213900>
- [25] P.D. Drummond, Z. Ficek *Quantum squeezing* Springer Science & Business Media (2013)  
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-09645-1>
- [26] L. Mandel Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence *Optics Letters* **4** (1979) 205-7  
<https://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?uri=ol-4-7-205>
- [27] Y. Zhao, Y. Okawachi, J.K. Jang, X. Ji, M. Lipson, A.L. Gaeta Near-Degenerate Quadrature-Squeezed Vacuum Generation on a Silicon-Nitride Chip *Physical Review Letters* **124** (2020) 193601  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.193601>
- [14] A. Perreca, A.F. Brooks, J.W. Richardson, D. Töyrä, R.J.P.R.D. Smith Analysis and visualization of the output mode-matching requirements for squeezing in Advanced LIGO and future gravitational wave detectors **101** (2020) 102005  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.102005>
- [15] T. Eberle, S. Steinlechner, J. Bauchrowitz, V. Händchen, H. Vahlbruch, M. Mehmet, H. Müller-Ebhardt, R. Schnabel, Quantum Enhancement of the Zero-Area Sagnac Interferometer Topology for Gravitational Wave Detection *Physical Review Letters* **104** (2010) 251102  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.251102>
- [16] J. Lough, E. Schreiber, F. Bergamin, H. Grote, M. Mehmet, H. Vahlbruch, C. Affeldt, M. Brinkmann, A. Bisht, V. Kringel, H. Lück, N. Mukund, S. Nadji, B. Sorazu, K. Strain, M. Weinert, K. Danzmann First Demonstration of 6 dB Quantum Noise Reduction in a Kilometer Scale Gravitational Wave Observatory *Physical Review Letters* **126** (2021) 041102  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.041102>
- [17] C.M. Caves Quantum-mechanical noise in an interferometer *Physical Review D* **23** (1981) 1693  
<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.23.1693>
- [18] Y.V. Sidorov Quantum State of Gravitons in Expanding Universe *Europhysics Letters (EPL)* **10** (1989) 415-8  
<http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/10/5/005>
- [19] H. Grote, K. Danzmann, K. Dooley, R. Schnabel, J. Slutsky and H. Vahlbruch First long-term application of squeezed states of light in a gravitational-wave observatory *Physical Review Letters* **110** (2013) 181101  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.181101>