

Quantum phase transition of the ($^{134-144}Nd$) neodymium isotope chain using the $su(1,1)$ Affine Lie algebra in the framework of IBM-1

Leila Nazari, Masoud Seidi*, Mohammad Mohammadi Sabet

Department of Physics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran

Received: 22.04.2020 Final revised: 07.11.2020 Accepted: 26.04.2021

Doi link: [10.22055/JRMBS.2021.16787](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.16787)

Abstract

In this research, we have considered quantum phase transition for even-even neodymium isotopes ($^{134-144}Nd$) using the Hamiltonian of Interacting Boson Model (IBM-1) in the framework of affine $SU(1,1)$ Lie algebra. The energy spectrum of this chain has obtained by calculating the Hamiltonian control parameters with Least Squares method. In the following, energy surfaces using coherent state formalism has calculated. Changes observed in the energy surfaces and the values of $R_{4/2}$ showed that the ^{140}Nd isotope is the transitional nuclei between $U(5)$ and $SO(6)$ limits. The results of this model are in good agreement with New Empirical Formula (NEF).

Keywords: Interacting boson model (IBM), affine $SU(1,1)$ Lie algebra, quantum phase transition, even-even neodymium isotopes, energy surface

*Corresponding Author: m.sayedi@ilam.ac.ir



گذار فاز کوآنتومی زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم ($^{134-144}Nd$) با استفاده از جبرلی آفین $SU(1,1)$ در چارچوب $IBM-1$

لیلا نظری، مسعود صیدی*، محمد محمدی ثابت

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

دریافت: 1399/02/03 ویرایش نهائی: 1399/08/17 پذیرش: 1400/02/06

Doi link: [10.22055/JRMBS.2021.16787](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.16787)

چکیده

در این پژوهش با استفاده از هامیلتونین $IBM-1$ در چارچوب جبر لی آفین $SU(1,1)$ ، گذار فاز کوآنتومی بین حدهای $SO(6)$ و $U(5)$ برای ایزوتوپ‌های زوج-زوج نئودیمیم ($^{134-144}Nd$) بررسی شده است. طیف انرژی این زنجیره با محاسبه پارامترهای کنترلی هامیلتونین با روش حداقل مربعات به دست آمده است. در ادامه، سطوح انرژی به کمک فرمالیسم حالات همدوس محاسبه گردیده است. تغییرات مشاهده شده در سطوح انرژی و نیز مقادیر $R_{4/2}$ نشان داد ایزوتوپ ^{140}Nd ، هسته گذار در ناحیه $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ می‌باشد. نتایج حاصل از این مدل، نتایج "فرمول تجربی جدید" (NEF) را به خوبی تأیید می‌کند.

کلیدواژگان: مدل برهم‌کنش بوزونی (IBM)، جبر لی آفین $SU(1,1)$ ، گذار فاز کوآنتومی، حالات همدوس، ایزوتوپ‌های زوج-زوج نئودیمیم، انرژی سطحی

مقدمه

به فرم کوآنتش ثانویه یعنی به کمک جملاتی از عملگرهای خلق و فنای بوزونی ارائه می‌شود [4]. مدل IBM که در سال 1974 توسط آریما و یاکلو ارائه شد، در اولین نسخه پیشنهادی خود با استفاده از دو بوزون S (با تکانه زاویه‌ای صفر) و d (با تکانه زاویه‌ای دو) که فضای جبری $U(6)$ را به وجود می‌آورد، تنها قادر به توصیف ترازهایی با اسپین پاریته زوج در هسته‌های نیمه‌سنگین و در محدوده انرژی‌های پایین بود. این جبر سه زنجیره تقارنی دارد که عبارتند از: $U(5)$ ، $SU(3)$ و $SO(6)$. این حدها به لحاظ هندسی به ترتیب متناظر با هسته‌های کروی شکل، تغییر شکل یافته محوری و چرخنده γ -ناپایدار¹ می‌باشند [5]. دو حد تقارنی دیگر نیز وجود دارد. حد تقارنی $E(5)$ یا گذار فاز مرتبه دوم، مربوط به گذار فاز کوآنتومی

در یک زنجیره ایزوتوپی وقتی که تعداد نوترون‌ها (یا پروتون‌ها) تغییر می‌کند، شکل هسته نیز تغییر می‌کند و تغییرات ناگهانی در خواص سیستم اتفاق می‌افتد که به آن گذار فاز شکلی می‌گویند [1]. در سال‌های اخیر دو رویکرد مختلف برای بررسی گذار فاز شکلی ارائه شده است. از یک طرف رویکرد هندسی بر اساس درجات آزادی چهارقطبی که از هامیلتونین بوهر ماتلسون بسط و گسترش یافته است [2] و از طرف دیگر رویکرد جبری که تقارن را به کمک روش‌های نظریه گروه به کار می‌گیرد [3]. حرکت جمعی هسته‌ای توسط بوهر و ماتلسون در جملاتی از متغیرهای شکلی فرمول‌بندی شده است [2]، درحالی که هامیلتونین IBM

* نویسنده مسئول: m.sayedi@ilam.ac.ir

$su(1,1)$ به وسیله مولدهای S^v و $v = 0, \pm$ تولید شده که در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کند [16] و [17]:

$$[S^0, S^\pm] = \pm S^\pm, [S^+, S^-] = -2S^0 \quad 1$$

عملگر کازیمیر $su(1,1)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{C}_2 = S^0(S^0 - 1) - S^+S^- \quad 2$$

جبر بینهایت بعدی زیر متشکل از مولدهای $su(1,1)$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} S_n^\pm &= c_s^{2n+1} S^\pm(s) + c_d^{2n+1} S^\pm(d) \\ S_n^0 &= c_s^{2n} S^0(s) + c_d^{2n} S^0(d) \end{aligned} \quad 3$$

که در آن c_s و c_d ثابت‌های حقیقی هستند و n عددی صحیح می‌باشد. این مولدها در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند:

$$[S_m^0, S_n^\pm] = \pm S_{m+n}^\pm, [S_m^+, S_n^-] = -2S_{m+n}^0 \quad 4$$

با استفاده از مولدهای جبر لی آفین $su(1,1)$ هامیلتونین IBM-1 در ناحیه گذار $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ به صورت زیر می‌باشد [16,17]:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= g S_0^+ S_0^- + \varepsilon S_1^0 \\ &+ \gamma \hat{C}_2(SO(5)) + \delta \hat{C}_2(SO(3)) \end{aligned} \quad 5$$

در رابطه 5 ثابت‌های $g, \varepsilon, \gamma, \delta$ پارامترهای حقیقی و $\hat{C}_2(SO(5))$ و $\hat{C}_2(SO(3))$ عملگرهای کازیمیر این گروه‌ها می‌باشند. می‌توان ثابت کرد برای $c_s = c_d$ هامیلتونین رابطه 5 هم‌ارز با تقارن دینامیکی $SO(6)$ می‌باشد و نیز اگر $c_s = 0$ و $c_d \neq 0$ باشد آنگاه هامیلتونین توصیف‌کننده حد تقارنی $U(5)$ است. بنابراین وقتی که $c_s \neq c_d \neq 0$ باشد، هامیلتونین مربوط به ناحیه گذار $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ خواهد بود [16 و 17]. معمولاً $c_d = 1$ و $0 \leq c_s \leq 1$ در نظر گرفته می‌شود که در آن c_s پارامتر کنترلی می‌باشد و مقدار آن بیانگر گذار بین این دو حد می‌باشد. برای

$U(5) \leftrightarrow SO(6)$ و حد تقارنی $X(5)$ مربوط به گذار فاز کوآنتومی $U(5) \leftrightarrow SU(3)$ [6].

گذار فاز کوآنتومی به طور گسترده در دهه 80 تا کنون و در چارچوب IBM مورد مطالعه قرار گرفته است [7-10]. یکی از بهترین رهیافت‌ها برای بررسی گذار فاز کوآنتومی فرمالیسم حالات همدوس می‌باشد که در سالیان اخیر بسیار مورد توجه بوده است [11-15]. در بررسی گذار فاز کوآنتومی می‌توان از مشاهده پذیرهایی مانند: $R_{4/2}$ ، انرژی‌های جدایی دو نوترون، انرژی سطحی ... استفاده کرد [14].

هامیلتونین IBM دارای سه جواب تحلیلی دقیق با عنوان حدهای تقارنی دینامیکی $U(5)$ ، $SO(6)$ می‌باشد در حالی که برای هامیلتونین گذار روش‌های عددی پیچیده‌ای به کار برده شده است، تا اینکه پان و همکاران راه حل جدیدی مبتنی بر تکنیک جبر لی آفین $su(1,1)$ پیشنهاد کردند [16,17]. پیشتر از فرمالیسم حالت همدوس برای بررسی رفتار گذار زنجیره ایزوتوپی Ru و Pd در چارچوب جبر لی آفین $su(1,1)$ استفاده شده است [14]. زنجیره نئودیمیم نیز رفتاری مشابه دارد. الجبوری و همکاران در 2018 با NEF گذار فاز کوآنتومی را در زنجیره نئودیمیم بررسی کردند [18]. در این مقاله می‌خواهیم به کمک فرمالیسم حالات همدوس در چارچوب IBM-1 و جبر لی آفین $su(1,1)$ رفتار گذار زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم را بررسی و نتایج را با NEF مقایسه کنیم.

هامیلتونین گذار $U(5) \leftrightarrow SO(6)$

می‌توان هامیلتونین IBM-1 را برحسب کازیمیرهای جبر $su(1,1)$ نوشت. این هامیلتونین می‌تواند رفتار گذار هسته‌های در ناحیه گذار $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ را به خوبی توصیف کند. جبر

می‌توان هامیلتونین ناحیه گذار $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ را برحسب عملگرهای جبر $su(1,1)$ به صورت زیر بسط داد [14]:

$$H = \frac{g}{2} \{c_s^2 s^\dagger s^\dagger s s + c_s c_d s^\dagger s^\dagger (\tilde{d} \tilde{d}) + c_s c_d s s (d^\dagger \cdot d^\dagger) + c_d^2 (\tilde{d} \tilde{d})(d^\dagger \cdot d^\dagger)\} + \alpha \{ \frac{c_s^2}{2} (s^\dagger s + s s^\dagger) + \frac{c_d^2}{2} \sum_\mu (d_\mu^\dagger d_\mu + d_\mu d_\mu^\dagger) \} \quad 10$$

فرمالیسم حالت همدوس، توصیف‌های جبری و هندسی از حدهای تقارن دینامیکی را به هم مرتبط می‌کند و به ما اجازه می‌دهد تا گذار میان این حدها را نیز مطالعه کنیم. با استفاده از این فرمالیسم می‌توان انرژی حالت پایه را به صورت تابعی از متغیرهای شکلی β و γ به عنوان پارامترهای تغییر شکل، ارزیابی کرد. حد کلاسیکی متناظر با هامیلتونین 10 با در نظر گرفتن مقدار چشمداشتی آن به وسیله حالت‌های همدوس زیر حاصل می‌شود:

$$|N, \alpha_\mu\rangle = \left(s^\dagger + \sum_\mu \alpha_\mu d_\mu^\dagger \right)^N |0\rangle \quad 11$$

که در آن $|0\rangle$ حالت خلاء بوزون است، S^\dagger عملگر خلق برای بوزون تک قطبی ($L=0$) و d_μ^\dagger عملگر خلق برای بوزون چهارقطبی ($L=0, \mu=-2, \dots, 2$) می‌باشد.

$$\alpha_0 = \beta \cos(\gamma), \quad \alpha_{\pm 1} = 0, \quad \alpha_{\pm 2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin(\gamma) \quad 12$$

پتانسیل را می‌توان با محاسبه مقدار چشمداشتی هامیلتونین 10 روی حالات 11 به کمک رابطه زیر تعیین نمود:

$$E = \frac{\langle N, \alpha_\mu | H | N, \alpha_\mu \rangle}{\langle N, \alpha_\mu | N, \alpha_\mu \rangle} \quad 13$$

برای محاسبه مقدار چشمداشتی هامیلتونین بایستی ابتدا اثر عملگرهای s, d_μ, s^\dagger و d_μ^\dagger را روی حالات

قطری کردن هامیلتونین 5 از حدس جبری ب¹ استفاده می‌شود که به صورت زیر بیان می‌باشد:

$$\frac{\epsilon}{x_i} = \frac{g c_s^2 (v_s + \frac{1}{2})}{1 - c_s^2 x_i} + \frac{g c_d^2 (v + \frac{5}{2})}{1 - c_d^2 x_i} - \sum_{i \neq j} \frac{2}{x_i - x_j} \quad 6$$

$i=1, 2, \dots, k$

ویژه‌حالات هامیلتونین 5 با استفاده از بسط لوران-فوریه ویژه‌حالات و مولدها، به صورت جملاتی از پارامترهای حقیقی c و x_i که ($i=1, 2, \dots, k$) به دست می‌آیند و مطابق با رابطه 6، x_i ها محاسبه می‌گردند. بدین ترتیب طیف انرژی هامیلتونین IBM-1 در چارچوب جبر لی آفین $su(1,1)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{x_i} + \gamma v (v+3) + \delta L (L+1) + \epsilon \frac{1}{2} [c_s^2 (v_s + \frac{1}{2}) + c_d^2 (v + \frac{5}{2})] \quad 7$$

عدد کوآنتومی k در رابطه 7 وابسته به تعداد کل بوزون‌ها یعنی (N) است:

$$N = 2k + v_s + v \quad 8$$

تعیین ریشه‌های معادله ب¹ در رابطه 6 با مقادیر معین α, c, v_s, v برای k -های بزرگ تنها به صورت عددی میسر است. در ادامه بایستی ثابت‌های معادله 7 به منظور به دست آوردن طیف انرژی با برچسب‌های کوآنتومی مناسب و مقادیر تجربی انرژی محاسبه کرد. این کار با روش حداقل مربعات امکان پذیر می‌باشد. انحراف معیار استاندارد در این برآورد از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma = \left(\frac{1}{N_{tot}} \sum_{i, tot} |E_{exp}(i) - E_{cal}(i)|^2 \right)^{1/2} \quad 9$$

که در آن N_{tot} تعداد کل ترازهای انرژی مورد بررسی می‌باشد [16 و 17].

سطوح انرژی به کمک فرمالیسم حالات همدوس

¹. Algebraic Bethe Ansatz

تغییر نمی‌کنند. بنابراین برای به‌دست آوردن طیف انرژی بایستی از قبل مقدار C_S را تعیین کرد و با تغییر مقدار C_S ، انحراف معیار استاندارد را به‌حداقل رساند. بدون توجه به فیزیک مسئله از دیدگاه ریاضی پارامترهایی برای ما قابل قبولند که به‌ازای آنها انحراف معیار انرژی، حداقل مقدار ممکن باشد. ما اثبات کردیم اگر $\alpha < 30$ باشد بایستی هر دوی α و C_S را به‌عنوان پارامترهای کنترلی اولیه مشخص کرد. در واقع، در این صورت جواب‌های معادله بت علاوه بر C_S ، به α نیز وابسته هستند. بنابراین، در این حالت α و C_S بایستی معلوم باشند تا بتوان x_i -ها را محاسبه کرد. ما ریشه‌های معادله بت را کمک برنامه Maple 14 محاسبه و با استفاده از داده‌های تجربی هر ایزوتوپ و نیز ریشه‌ها، ضرایب بهینه طیف انرژی را به‌دست آوردیم. برای محاسبه این ضرایب از روش حداقل مربعات به‌کمک برنامه Matlab 2013a استفاده کردیم. مقادیر انرژی به‌دست آمده با روش جبر لی آفین $su(1,1)$ در جدول 1 ارائه شده است. داده‌های جدول 1 در شکل‌های 1 تا 6 نشان شده‌اند. با یک نگاه می‌توان مشاهده کرد که نتایج حاصل از مدل با نتایج تجربی هم‌خوانی خوبی دارند.

همدوس تعیین کرد. با مقداری محاسبه می‌توان نشان داد که انرژی سطحی حاصل برحسب پارامترهای شکلی به‌صورت زیر می‌باشد [14]:

$$E(\beta, \gamma) = \frac{g}{2} \left[\frac{N(N-1)}{(1+\beta^2)^2} \right] (c_s^2 + 2c_s c_d \beta^2 + c_d^2 \beta^4) \quad (12)$$

$$+ \frac{\alpha c_s^2}{2} \left(\frac{2N}{1+\beta^2} + 1 \right) + \frac{2N\gamma\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$+ \frac{\alpha c_d^2}{2} \left(\frac{2N\beta^2}{1+\beta^2} + 5 \right) + \frac{3N\delta\beta^2}{5(1+\beta^2)}$$

با تحلیل این رابطه می‌توان گذار فاز شکلی را بررسی کرد.

رهیافت دیگر برای محاسبه طیف انرژی هسته‌های زوج-زوج، استفاده از NEF است که در 2018 توسط الجبوری و همکاران برای به‌دست آوردن طیف انرژی $Nd^{134-140}$ به‌کار گرفته شد. رابطه نیمه تجربی NEF در زیر داده شده است [18]:

$$E(I) = \frac{A_1 I(I+1)}{A_2 (I+1) + I^{A_3}} \quad (13)$$

که در اینجا پارامترهای A_1 ، A_2 و A_3 را از طریق برازش با داده‌های تجربی به‌دست می‌آورند. از این رهیافت می‌توان برای بررسی گذار فاز کوانتومی نیز استفاده کرد.

بحث و نتیجه گیری

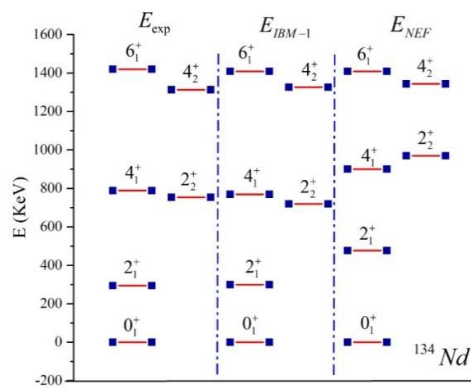
در این مقاله برای محاسبه طیف انرژی و بررسی گذار فاز کوانتومی زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم ($Nd^{134-144}$) از ترازهای برانگیخته 0_1^+ ، 2_1^+ ، 2_2^+ ، 3_1^+ ، 4_1^+ ، 4_2^+ و 6_1^+ استفاده شده است. داده‌های تجربی مربوط به این زنجیره از منابع [19-26] گرفته شده‌اند. در محاسبه طیف انرژی و ضرایب ثابت معادله انرژی حل دستگاه معادلات غیر خطی بت کلیدی است. به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که در معادله بت، ریشه‌ها تنها وابسته به پارامتر C_S می‌باشند. به‌عبارتی با تغییر پارامترهای α ، ν ، ν_S و L به‌ازای یک C_S ثابت، ریشه‌ها

جدول 1. مقادیر تجربی و تئوری انرژی ترازهای ایزوتوپ‌های نئودیمیم [15-10].

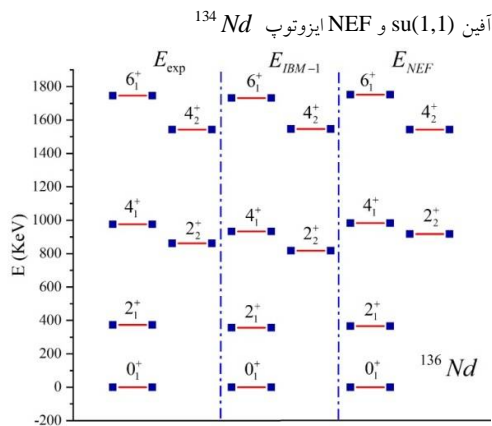
^{134}Nd			
level	experimental	IBM-1	NEF

2_2^+	2384.6	1583.5	1560.9	1303
4_1^+	2101.3	1051.7	1314.5	983.2
3_1^+	2547.8	1823	2178.3	2007.1
4_2^+	2437.7	2285.5	2204.5	2067.1
6_1^+	2209.8	1728.4	1791.4	1652.8

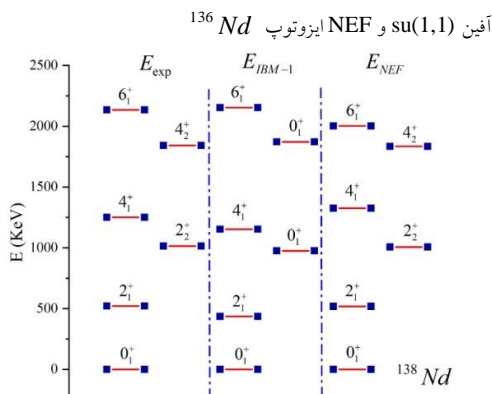
0_1^+	0	0	0
2_1^+	294.2	299.6	477
2_2^+	753.9	718.9	970
4_1^+	788.9	769.4	900
4_2^+	1313.0	1326.2	1344
6_1^+	1420.0	1409.6	1409



شکل 1. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف IBM-1 در چارچوب جبر



شکل 2. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف IBM-1 در چارچوب جبر



^{136}Nd

level	experimental	IBM-1	NEF
0_1^+	0	0	0
2_1^+	373.7	355.8	366
2_2^+	862.4	817.9	918
4_1^+	976.4	933.5	983
4_2^+	1541.7	1546.6	1542
6_1^+	1746.8	1731.6	1752

^{138}Nd

level	experimental	IBM-1	NEF
0_1^+	0	0	0
2_1^+	520.8	435.7	517
2_2^+	1013.8	975.3	1007
4_1^+	1249.8	1153.1	1325
4_2^+	1842.9	1871.1	1834
6_1^+	2134.3	2152.8	2003

^{140}Nd

level	experimental	IBM-1	NEF
0_1^+	0	0	0
2_1^+	773.7	512.6	773
2_2^+	1414.3	1269.5	1751
4_1^+	1801.9	1277.6	1801
4_2^+	2400.2	2260.3	2226
6_1^+	2366	2341	2842

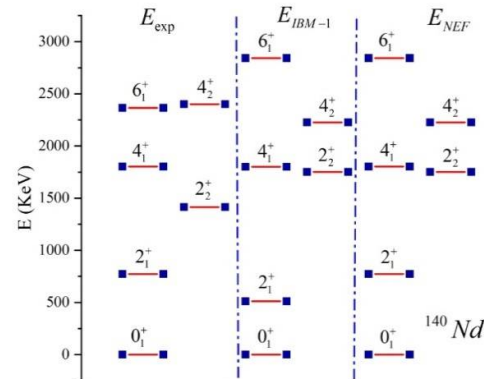
Level	Experimental		IBM-1	
	^{142}Nd	^{142}Nd	^{144}Nd	^{144}Nd
0_1^+	0	0	0	0
2_1^+	1575.8	475.5	696.6	432.3

به منظور بررسی دقت محاسبات و مقایسه بهتر با داده‌های تجربی، انحراف معیار استاندارد یکی از بهترین شاخص‌ها می‌باشد. برای محاسبه انحراف معیار استاندارد بایستی ضرایب ثابت طیف انرژی در رابطه 15 محاسبه گردد. نتایج حاصل در جدول 2 ارائه شده است. انحراف معیارهای ارائه شده در جدول 3 بیانگر همخوانی خوب نتایج تجربی و نظری می‌باشد البته به استثنای ^{142}Nd که یک هسته جادویی است. بر مبنای مدل لایه‌ای، در این ایزوتوپ حالت پایه ترازهای نوترونی و پروتونی به ترتیب $1h_{1/2}$ و $2d_{5/2}$ می‌باشند که در این ترازها به ترتیب 12 و 5 تا نوکلئون وجود دارد. این نوکلئون‌ها می‌توانند دو به دو با هم کوپل شوند. اولین تراز نوترونی برانگیخته این هسته $1h_{9/2}$ می‌باشد که با توجه به داده‌های تجربی جدول 1 اختلاف زیادی با تراز $1h_{1/2}$ دارد و احتمالاً حالت 2_1^+ ناشی از تزویج نوکلئون‌های منفرد در ترازهای $1h_{1/2}$ و $1h_{9/2}$ باشند. بر خلاف مدل لایه‌ای در IBM-1 تمایزی بین نوترون‌ها و پروتون‌ها وجود ندارد و تنها بوزون‌های ظرفیتی، حالات برانگیخته را تولید می‌کنند که البته چنین بوزون‌هایی مربوط به ترازهای پروتونی هستند. با توجه به مدل لایه‌ای حالت پایه و اولین حالت برانگیخته تراز پروتونی ^{142}Nd به ترتیب $2d_{5/2}$ و $2d_{3/2}$ هستند که با توجه به داده‌های تجربی، اختلاف انرژی آنها کمتر از اختلاف انرژی بین ترازهای $1h_{9/2}$ و $1h_{1/2}$ می‌باشند. بنابراین در این مورد انتظار می‌رود پیش بینی مدل IBM-1 با تجربه همخوانی خوبی نداشته باشد.

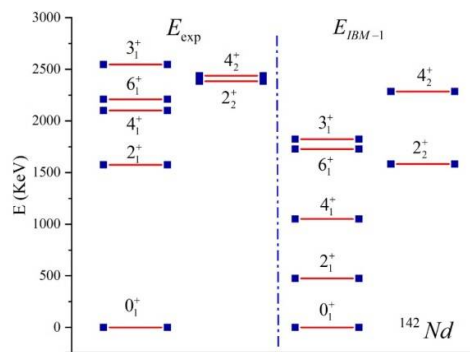
جدول 2. پارامترهای ثابت و انحراف معیار استاندارد ایزوتوپ‌های نمودیم.

ایزوتوپ	N	α	c_s	γ	δ
^{134}Nd	9	1,4	0,95	68,7	4,1
^{136}Nd	8	4	0,81	75,8	8,7
^{138}Nd	7	5	0,63	89,1	12,9

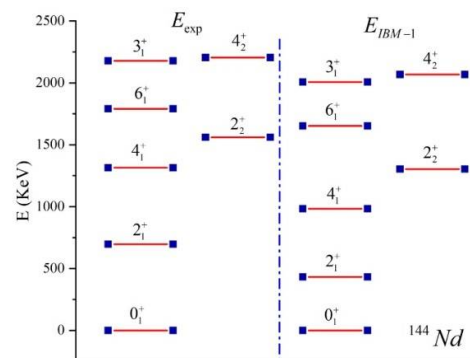
شکل 3. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف IBM-1 در چارچوب جبر آفین $\text{su}(1,1)$ و NEF ایزوتوپ ^{138}Nd



شکل 4. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف IBM-1 در چارچوب جبر آفین $\text{su}(1,1)$ و NEF ایزوتوپ ^{140}Nd



شکل 5. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف IBM-1 در چارچوب جبر آفین $\text{su}(1,1)$ و NEF ایزوتوپ ^{142}Nd

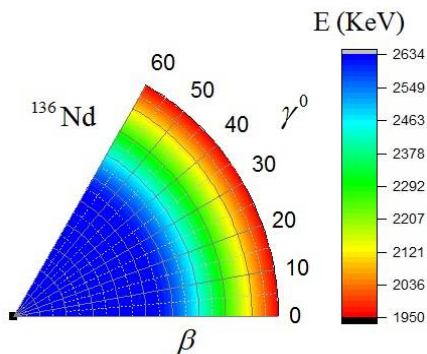
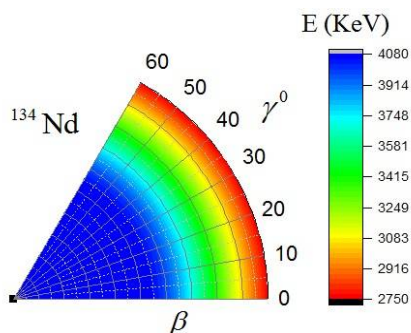


شکل 6. مقایسه طیف انرژی تجربی با طیف IBM-1 در چارچوب جبر آفین $\text{su}(1,1)$ و NEF ایزوتوپ ^{144}Nd

مطابق نتایج جدول 3 و بر اساس $R_{4/2}$ ، ایزوتوپ‌های ^{134}Nd ، ^{136}Nd و ^{138}Nd در ناحیه $SO(6)$ قرار دارند و نیز ایزوتوپ‌های ^{142}Nd و ^{144}Nd در ناحیه $U(5)$ قرار دارند. ایزوتوپ گذار در این زنجیره بر اساس پیش‌بینی‌های NEF [18] و IBM-1 در چارچوب جبر لی آفین $su(1,1)$ می‌باشد که با نتایج تجربی در جدول 3 نیز همخوانی دارد.

گذار فاز کوآنتومی در زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم به کمک سطوح انرژی در چارچوب فرمالیسم حالات همدوس

در ادامه به کمک نمودار تغییرات انرژی سطحی ایزوتوپ‌های نئودیمیم برحسب پارامتر تغییر شکل β و زاویه γ ایزوتوپ گذار را مشخص کنیم.



^{140}Nd	6	99	0,54	106,3	6,5
^{142}Nd	5	90	0,01	144,8	-9,4
^{144}Nd	6	40	0,009	131,7	-14,2

به‌منظور مقایسه این دو رهیافت، انحراف معیار استاندارد از مقادیر تجربی محاسبه و نتایج حاصل از آنها در جدول 3 آورده شده است. به‌طور کلی مقادیر جدول 3 نشان می‌دهند که انحراف معیار استاندارد حاصل از IBM-1 در چارچوب جبر آفین $su(1,1)$ کمتر از NEF می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که IBM-1 نسبت به NEF مدل بهتری است.

جدول 3. انحراف معیار استاندارد ایزوتوپ‌های نئودیمیم.

	انحراف معیار استاندارد	
	IBM-1	NEF
^{134}Nd	17,9	136,7
^{136}Nd	27	25,4
^{138}Nd	56,6	67,8
^{140}Nd	253	272,1
^{142}Nd	561,9	-
^{144}Nd	162,2	-

یکی از شاخص‌هایی که گذار فاز شکلی را نشان می‌دهد $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$ است [9]. محدوده‌های $R_{4/2}$ حد‌های تقارنی به‌خوبی در مثلث کاستن توصیف شده است [26].

جدول 4. $R_{4/2}$ ایزوتوپ‌های مختلف نئودیمیم.

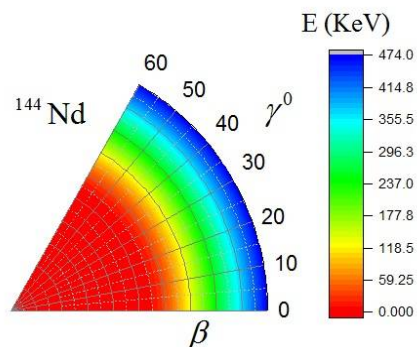
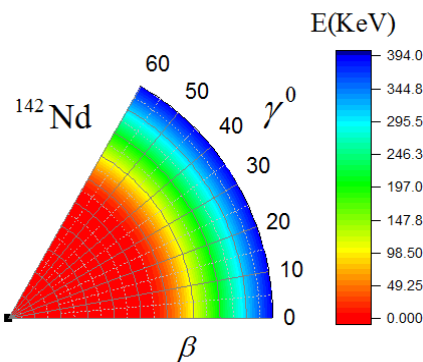
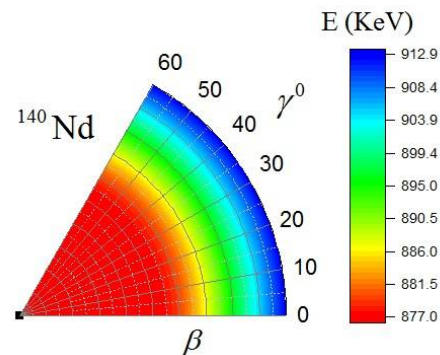
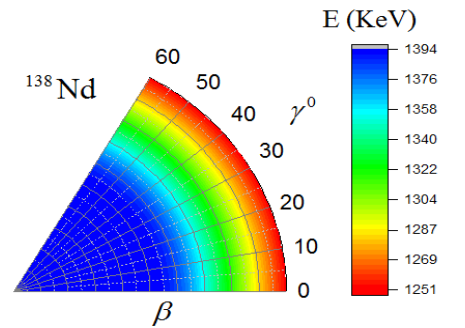
ایزوتوپ	$R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$		
	Exp	IBM-1	NEF
134	2,68	2,68	1,88
136	2,62	2,61	2,68
138	2,40	2,64	2,56
140	2,32	2,33	2,32
142	1,33	1,33	-
144	1,89	1,89	-

شکل 7. سطوح انرژی پتانسیل در صفحه β و γ^0 برای زنجیره ایزوتوپی نئودیمیم.

با بررسی تغییرات انرژی سطحی ایزوتوپ‌های 144-134 نئودیمیم می‌توان گذار فاز کوآنتومی را مشاهده کرد. با توجه به شکل‌های 7 برای هسته‌های ^{144}Nd ، ^{142}Nd و ^{140}Nd در نقطه $\beta = 0$ به‌ازای تمام مقادیر γ^0 یک کمینه مشاهده می‌شود. این کمینه در طول زنجیره پهن‌تر می‌شود به‌طوری‌که در ^{140}Nd میزان پهن‌شدگی به بیشینه مقدار خود می‌رسد. بنابراین هسته‌های ^{142}Nd و ^{144}Nd در ناحیه $U(5)$ می‌باشند و هسته ^{140}Nd به‌عنوان ایزوتوپ گذار در ناحیه $SO(6) \leftrightarrow U(5)$ پیش‌بینی می‌گردد. در این زنجیره نقطه کمینه در ایزوتوپ ^{138}Nd جای خود را به یک بیشینه می‌دهد. این بیشینه در هسته‌های ^{136}Nd و ^{134}Nd نیز مشاهده می‌شود. بنابراین به‌نظر می‌رسد هسته‌های ^{138}Nd و ^{136}Nd و ^{134}Nd در ناحیه $SO(6)$ قرار داشته باشند. بدین ترتیب هسته گذاری پیش‌بینی شده به‌کمک فرمالیسم حالات همدوس، با پیش‌بینی IBM-1 و NEF همخوانی دارد.

مرجع‌ها

- [1] I. Talmi, *Simple models of complex nuclei*, Harvard Academic Publishers, (1993).
<https://doi.org/10.1063/1.2808408>
- [2] A. Bohr, B.A. Motelson, *nuclear structure*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (1998).
<https://doi.org/10.1142/3530>
- [3] F. Iachello, A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, (1987).
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511895517>



- [11] K. Nomura et al, Shape coexistence in the microscopically guided interacting boson model, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43 (2016) 024008.
<https://doi.org/10.1088/0954-3899/43/2/024008>
- [12] L. Fortunato, C.E. Alonso, J.M. Arias, J.E. Garcia-Ramos, A. Vitturi, Phase diagram for a cubic-Q interacting boson model Hamiltonian: Signs of triaxiality, *Physical Review C* **84** (2011) 014326.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.84.014326>
- [13] Yu Zhang, Feng Pan, Yu-Xin Liu, Yan-An Luo, J. P. Draayer, Analytically solvable prolate-oblate shape phase transitional description within the SU(3) limit of the interacting boson model, *Physical Review C*, **85** (2012) 064312.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.85.064312>
- [14] H. Fathi, M. Ghadami, H. Sabri, N. Fouladi, M. A. Jafarizadeh, Investigation of shape phase transition in the U(5) \leftrightarrow SO(6) transitional region by catastrophe theory and critical exponents of some quantities, *International Journal of Modern Physics E*, **23** (2014) 1450045.
<https://doi.org/10.1142/S0218301314500451>
- [15] A.M. Khalaf, A.M. Ismail, A.A. Zaki, Nuclear shape transition between the limiting symmetries U(5) and SU(3) of interacting boson model applied to double even Hafnium isotopic chain, *Nuclear Physics A* **996** (2020) 121704.
<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2020.121704>
- [16] F. Pan, J. Draayer, New algebraic solutions for SO(6) \leftrightarrow U(5) transitional nuclei in the interacting boson model, *Nuclear Physics A*, **636** (1998) 156.
[https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(98\)00207-3](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(98)00207-3)
- [4] P. Van Isacker, Jin-Quan Chen, Classical limit of the interacting boson Hamiltonian, *Physical Review C* **24** (1981) 684.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.24.684>
- [5] A. Arima, F. Iachello, Collective Nuclear States as Representations of a SU(6) Group, *Physical Review Letter* **35** (1975) 1061.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.35.1069>
- [6] H. Sabri, M. Seidi, Energy spectra and E2 transition rates of 124-130 Ba, *International Journal of Modern Physics E*, **25** (2016) 1650086.
<https://doi.org/10.1142/S0218301316500865>
- [7] M. Macek, P. Stránský, A. Leviatan, P. Cejnar, Excited-state quantum phase transitions in systems with two degrees of freedom. III. Interacting boson systems, *Physical Review C* **99** (2019) 064323.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.99.064323>
- [8] K. Nomura, Y. Zhang, Two-neutron transfer reactions and shape phase transitions in the microscopically formulated interacting boson model, *Physical Review C*, **99** (2019) 024324.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.99.024324>
- [9] Yu Zhang, Yan Zuo, Feng Pan, J.P. Draayer, Excited-state quantum phase transitions in the interacting boson model: Spectral characteristics of 0+ states and effective order parameter, *Physical Review C* **93** (2016) 044302.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.93.044302>
- [10] Y. Zhang, F. Iachello, Two-nucleon transfer reactions as a test of quantum phase transitions in nuclei, *Physical Review C* **95** (2017) 034306.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.95.034306>

- [26] R.F. Casten, Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei, *Nature Physics* 2 (2006) 811.
DOI: [10.1038/nphys451](https://doi.org/10.1038/nphys451)
- [17] F. Pan, X. Zhang, J.P. Draayer, Algebraic solutions of an sl -boson system in the $U(2l + 1) \supset O(2l + 2)$ transitional region, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35** (2002) 7173.
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/33/313>
- [18] M.A. Al-Jubbori, F.S. Radhi, A. Albrahim, S.A. Abdullah Albakri, H.H. Kassim, F. I.Sharrad, Determine the $^{134-140}\text{Nd}$ isotopes identity using IBM and NEF, *Nuclear Physics A* **971** (2018) 35.
<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2018.01.011>
- [19] T.R. Rodriguez, J. Luis Egido, A beyond mean field analysis of the shape transition in the Neodymium isotopes, *Physical Letter B*, **663** (2008) 49.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.03.061>
- [20] A.A. Sonzogni, Nuclear Data Sheets for $A = 134$, *Nuclear Data Sheets* **103** (2004) 1.
<https://doi.org/10.1016/j.nds.2004.11.001>
- [21] E.A. Mccutchan, Nuclear Data Sheets for $A=136$, *Nuclear Data Sheets* **152** (2018) 331.
<https://doi.org/10.1016/j.nds.2018.10.002>
- [22] A.A. Sonzogni, Nuclear Data Sheets for $A=138$, *Nuclear Data Sheets*, 98 (2003) 515.
<https://doi.org/10.1006/ndsh.2003.0004>.
- [23] N. Nica, Nuclear Data Sheets for $A=140$, *Nuclear Data Sheets* **108** (2007) 1287.
<https://doi.org/10.1016/j.nds.2007.06.001>
- [24] L.K. Peker, Nuclear Data Sheets for $A = 142$, *Nuclear Data Sheets*, **63** (1991) 647.
DOI: [10.1016/S0090-3752\(05\)80011-0](https://doi.org/10.1016/S0090-3752(05)80011-0)
- [25] J.K. Tuli, Nuclear Data Sheets for $A=144$, *Nuclear Data Sheets*, **56** (1989) 607.
[https://doi.org/10.1016/S0090-3752\(89\)80050-X](https://doi.org/10.1016/S0090-3752(89)80050-X).