Anisotropy effect on magnon entanglement in antiferromagnets

Vahid Azimi Mousolou[1,2,3]

[1]Department of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Box 81745-163 Isfahan, Iran

[2]School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P. O. Box 19395-5746, Tehran, Iran

[3]Department of Physics and Astronomy, Uppsala University, Box 516, SE-751 20 Uppsala, Sweden

Received: 27.08.2020 Final revised: 21.02.2021 Accepted: 26.04.2021

Doi link: 10.22055/JRMBS.2021.16790

Abstract

Entanglement is one of the fundamental quantum concepts that not only distinguishes quantum mechanics from its classical counterpart but also plays important roles in quantum communication and information processing technologies. Here, we aim to study anisotropy contributions of continuous variable entanglement between magnon modes in antiferromagnets. By introducing different bosonic modes, it is shown that the magnetic uniaxial anisotropy induces different entanglement contributions in the ground state of the system. While some of these contributions appear to be decreasing with respect to anisotropy, the other contributions are increasing as functions of anisotropy. It is also shown that the maximum magnon entanglement is always at the centre of Brillouin zone. The analysis presented here is independent of geometric lattice structure and appropriate for many classes of compounds.

Keywords: Anisotropy, Entanglement, Continuous variable entanglement, Magnon, Antiferromagnet

*Corresponding Author: v.azimi@sci.ui.ac.ir

اثر ناهمسانگردی بر درهم‌تنیدگی مگنونی در آنتی فرومغناطیس‌ها

وحید عظیمی موصلو[۱،۲،۳،*]

[1]گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

[2]پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران

[3]Department of Physics and Astronomy, Uppsala University, Box 516, SE-751 20 Uppsala, Sweden

دریافت: 1399/06/06 ویرایش نهائی: 1399/12/03 پذیرش: 1400/02/06

Doi link: 10.22055/JRMBS.2021.16790

چکیده

درهم‌تنیدگی یکی از مفاهیم بنیادین کوآنتومی است که نه تنها مکانیک کوآنتومی را به‌صورت معنادار از همتای کلاسیک آن متمایز می‌کند بلکه نقش‌های کلیدی در تکنولوژی‌های محاسبات، پردازش و ارتباطات کوآنتومی ایفا می‌کند. در اینجا ما به‌بررسی نقش ناهمسانگردی در درهم‌تنیدگی متغیرهای پیوسته بین مدهای مگنونی در آنتی‌فرومغناطیس‌ها می‌پردازیم. با معرفی نمایش‌های بوزونی متفاوت نشان داده می‌شود که ناهمسانگردی توزیع‌های متفاوتی از درهم‌تنیدگی مگنونی در حالت پایه سیستم دارد. در حالی که ناهمسانگردی در برخی از این توزیع‌ها نقش کاهشی دارد در برخی دیگر اثر افزایشی از خود نشان می‌دهد. علاوه بر این نشان داده می‌شود که بیشترین درهم‌تنیدگی در مرکز منطقه بریلوئن قابل دسترس است.

کلیدواژگان: ناهمسانگردی، درهم‌تنیدگی، درهم‌تنیدگی متغیرهای پیوسته، مگنون، آنتی فرومغناطیس

مقدمه

پیاده‌سازی کار آمد مراحل مختلف پروتکل‌های ارتباطات کوآنتومی از جمله آماده‌سازی، پردازش و اندازه‌گیری حالت‌های درهم‌تنیده کوآنتومی با بهره‌گیری از دامنه‌های پیوسته میدان‌های الکترومغناطیس کوآنتومی در زمینهٔ اپتیک کوآنتومی اساساً میزان قابل ملاحظه‌ای از پژوهش‌ها و توجه محققین را به مفهوم متغییر پیوسته در اطلاعات کوآنتومی معطوف کرده است [1-4]. درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته که در واقع درهم‌تنیدگی بین شبه ذرات یا به عبارتی نوسانگرهای بوزونی با فضای هیلبرت متناظر بینهایت بعدی است، امروزه با استفاده از سیستم‌های نوری به طور کارآمد قابل تولید است [5-7] با وجود تفاوت‌های بنیادین بین فضاهای بینهایت بعدی و بعد متناهی، درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته همانند درهم‌تنیدگی بین سیستم‌های بعد متناهی همچون کوآنتوم بیت‌ها نقش اساسی و کلیدی در پردازش جهان شمول اطلاعات کوآنتومی [4]، پیاده‌سازی دوربری کوآنتومی [1-4]، حافظه های کوآنتومی [۵،۱۰] و وضوح اندازه‌گیری کوآنتومی دارد [11]. علاوه بر این، درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته تا حد زیادی با همبستگی‌های غیر موضعی انیشتین-پودولسکی-روزن مرتبط است که این ارتباط پایه شمار قابل توجهی از تحقیقات تجربی و نظری نیز بوده است [12-15].

---

* نویسنده مسئول: v.azimi@sci.ui.ac.ir

بر انگیزش‌های دسته جمعی بنیادین متنوعی نظیر فوتون‌ها در سیستم‌های حالت جامد قابل توصیف است که می‌توانند به افق‌های جدید و نتایج متفاوتی در پژوهش‌های نظری و تجربی در زمینه درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته منجر شوند. در سال‌های اخیر، محققین به‌مطالعه مگنون‌ها و فونون‌ها در مواد گوناگون مغناطیسی [16-19] و همچنین در سیستم‌های ترکیبی مغناطیسی-نوری [20-22] روی آورده‌اند. کوآنتای امواج اسپینی یا همان مگنون‌ها عموماً در بازه انرژی تا حدود 500meV در گونه‌های متفاوت از مواد مغناطیسی همچون فرومغناطیس‌ها، فری‌مغناطیس‌ها و آنتی‌فرومغناطیس‌ها یافت می‌شوند [23]. در مرجع [19] ما با مطالعه درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته مگنونی در آنتی فرومغناطیس‌ها از منظری نو و متفاوتی، یک نقشه کلی از درهم‌تنیدگی‌های دوبخشی بین مدهای مگنونی در حالت‌های انرژی را ارائه دادیم. در اینجا، هدف ما بررسی نقش و توزیع نا همسانگردی مغناطیسی در درهم‌تنیدگی بین مدهای مگنونی در آنتی فرو مغناطیس‌ها است.

معرفی مدل

ساختار مغناطیسی مورد نظر، مدلی است که با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = H_0 - H_A \qquad (1)$$

که $H_0 = J\sum_{<i,j>} S_i S_j$ با ثابت جفت‌شدگی $J > 0$ برهم‌کنش آنتی فرومغناطیسی هایزنبرگ بین همسایه‌های اول در شبکه مغناطیسی است و عبارت دوم در سمت راست تساوی، $H_A = \mathcal{K}\sum_i (S_i^z)^2$ با $\mathcal{K} > 0$ [1]، ناهمسانگردی تک محوری در راستای محور z را بیان می‌کند. در اینجا $S_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$، عمل‌گر برداری اسپین در جایگاه iام است. با استفاده از تبدیل هولشتاین پریماکف حول محور z برای آنتی‌فرومغناطیس‌ها [23]:

$$S_i^z = S - a_i^\dagger a_i \qquad (2)$$

$$S_j^z = b_j^\dagger b_j - S$$

$$S_i^- = a_i^\dagger\left[\sqrt{2S - a_i^\dagger a_i}\right]$$

$$S_j^+ = b_j^\dagger\left[\sqrt{2S - b_j^\dagger b_j}\right]$$

$$S_i^+ = \left[\sqrt{2S - a_i^\dagger a_i}\right] a_i$$

$$S_j^- = \left[\sqrt{2S - b_j^\dagger b_j}\right] b_j$$

در دمای پایین $k_B T \ll J$ که داریم $\langle a_i^\dagger a_i\rangle \ll S$ و $\langle b_j^\dagger b_j\rangle \ll S$، و همچنین تقریب خطی:

$$(1 - x)^p \approx 1 - px, \qquad p \in \mathbb{R}$$

هامیلتونی برانگیزش دسته جمعی را می‌توان به‌فرم زیر برحسب دو طیف متفاوت از عملگرهای بوزونی a_i ها و b_j ها بازنویسی کرد:

$$H = -\frac{NS^2(zJ + 2\mathcal{K})}{2} \qquad (3)$$

$$+S(zJ + 2\mathcal{K})\left[\sum_i a_i^\dagger a_i + \sum_j b_j^\dagger b_j\right]$$

$$+JS\sum_{<i,j>}(a_i b_j + a_i^\dagger b_j^\dagger).$$

عدد z در معادلهٔ فوق، عدد همسایگی که بیانگر تعداد همسایه‌های اول هر رأس در شبکه است را نمایش می‌دهد و نباید با محور z اشتباه گرفته شود. قابل ذکر است که در ادامه z فقط بیانگر عدد همسایگی است.

---

[1] Easy Axis

اگر تعداد کل اسپین‌های موجود در شبکه را N فرض کنیم آنگاه با تبدیل‌های فوریه:

$$a_i = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_k e^{-ik.r_i}a_k$$

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_i e^{ik.r_i}a_i$$

$$b_j = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k'} e^{ik'.r_j}b_{k'}$$

$$b_{k'} = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_j e^{-ik'.r_j}b_j$$

هامیلتونی در فضای k به‌فرم زیر در می‌آید:

$$H = -\frac{NS^2(zJ+2\mathcal{K})}{2} \qquad 4$$

$$+S\sum_k\{(zJ + 2\mathcal{K})(a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k)$$

$$+zJ(\gamma_k a_k b_k + \gamma_{-k}a_k^\dagger b_k^\dagger)\}$$

که $\gamma_k = \frac{1}{z}\sum_\delta e^{ik.\delta}$ با جمع بر روی بردارهای δ که یک رأس روی شبکه مغناطیسی را به‌نزدیکترین همسایه‌های آن متصل می‌کند.

برای قطری سازی و پیدا کردن حالت‌های ویژه انرژی از تبدیل بوگولیوبوف:

$$\begin{pmatrix}a_k\\ b_k^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_k & v_k\\ v_k^* & u_k^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k^\dagger\end{pmatrix} \qquad 5$$

به‌طوری که $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ می‌توان بهره برد. با این تبدیل، هامیلتونی انتقال یافته از نمایش بوزونی (a, b) به‌نمایش بوزونی جدید (α, β) به‌صورت زیر است:

$$H = -\frac{N(zJ + 2\mathcal{K})S(S + 1)}{2}$$

$$+S\sum_k\{\varepsilon_k(\alpha_k^\dagger\alpha_k + \beta_k^\dagger\beta_k + I)$$

$$+\lambda_k\alpha_k\beta_k + \lambda_k^*\alpha_k^\dagger\beta_k^\dagger\}, \qquad 6$$

$$\varepsilon_k = (zJ + 2\mathcal{K})(|u_k|^2 + |v_k|^2) + 2\Re[zJ\gamma_k u_k v_k],$$

$$\lambda_k = 2(zJ + 2\mathcal{K})v_k^* u_k + zJ\gamma_k u_k^2 + zJ\gamma_{-k}{v_k^*}^2.$$

شرط $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ بدین منظور است که عملگرهای جدید α_k و β_k مانند a_k و b_k در روابط جابجاگری بوزونی صدق کرده و در حقیقت عملگرهای بوزونی باشند. از حل معادله $\lambda_k = 0$ با این شرط خواهیم داشت:

$$|u_k|^2 = \cosh^2 r_k \qquad 7$$

$$|v_k|^2 = \sinh^2 r_k$$

$$\frac{v_k}{u_k^*} = \tanh r_k\, e^{i\theta_k}$$

به‌طوری‌که:

$$r_k = \tanh^{-1}\left[\frac{1-\sqrt{1-|\Gamma_k|^2}}{|\Gamma_k|}\right] \qquad 8$$

$$\Gamma_k = \frac{zJ\gamma_k}{zJ + 2\mathcal{K}} = \frac{\gamma_k}{1 + \frac{2\mathcal{K}}{zJ}}$$

$$\theta_k = \pi - \arg[\gamma_k]$$

با وارد کردن معادلات7 و8 در معادلهٔ6، جمله‌های غیر قطری حذف شده و هامیلتونی فرم قطری:

$$H = -\frac{NS(S+1)(zJ+2\mathcal{K})}{2} \qquad 9$$

$$+\sum_k\varepsilon_k(\alpha_k^\dagger\alpha_k + \beta_k^\dagger\beta_k + I)$$

با رابطهٔ پاشندگی $\varepsilon_k = S(zJ + 2\mathcal{K})\sqrt{1 - |\Gamma_k|^2}$ را پیدا می‌کند.

درهم‌تنیدگی

فرم درجهٔ دوم هامیلتونی در معادلهٔ9 نتیجه می‌دهد که حالت پایه سیستم به‌فرم زیر است:

$$|\psi\rangle = \prod_k |0,\alpha_k\rangle\, |0,\beta_k\rangle \quad (10)$$

$|0,\alpha_k\rangle$ و $|0,\beta_k\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های ویژهٔ صفر یا به‌عبارتی حالت‌های خلأ عملگرهای بوزونی α_k و β_k هستند. همان‌طور که پیداست درهم‌تنیدگی مگنونی بین زیر سیستم‌های بوزونی α و β در حالت پایه سیستم وجود ندارد و در حقیقت حالت پایه در نمایش بوزونی (α,β) حاصل ضربی از حالت‌های جدایی پذیر است.

رابطه $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ بیانگر این است که تبدیل غیربدیهی بوگولیوبوف در معادلهٔ5 نه تنها یک تبدیل موضعی نیست بلکه یک تبدیل یکانی هم نیست، بنابراین تبدیل بین دو نمایش بوزونی (a,b) و (α,β) فقط یک تغییر پایه ساده در فضای هیلبرت سیستم نیست، در واقع تغییری در ساختار تانسوری فضای هیلبرت سیستم است. از آنجایی که مفهوم درهم‌تنیدگی کامل وابسته به ساختار تانسوری فضای هیلبرت سیستم است [24]، درهم‌تنیگی در حالت پایه سیستم نسبت به دو نمایش متفاوت بوزونی (a,b) و (α,β) می‌تواند کاملاً متفاوت باشد. برای بیان حالت پایه $|\psi\rangle$ در نمایش (a,b) می‌توان آن را به‌صورت ترکیب خطی از حالت‌های ویژه‌عملگرهای a_k و b_k به‌صورت:

$$|\psi\rangle = \prod_k |r_k,\theta_k\rangle \quad (11)$$

$$|r_k,\theta_k\rangle = \sum_n c_n |n,a_k\rangle |n,b_k\rangle \quad (12)$$

بیان کرد که c_nها از حل معادله:

$$\alpha_k|\psi\rangle = \beta_k|\psi\rangle = 0 \quad (13)$$

به‌دست می‌آیند. در اینجا $|n,a_k\rangle$ و $|n,b_k\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های ویژه‌عملگرهای a_k و b_k با خاصیت:

$$a_k^\dagger a_k |n,a_k\rangle = n|n,a_k\rangle$$

$$b_k^\dagger b_k |n,b_k\rangle = n|n,b_k\rangle$$

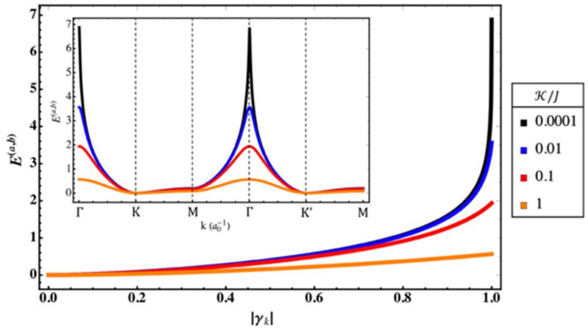
هستند. با استفاده از وارون تبدیل 5 برای بیان α_k و β_k برحسب a_k و b_k و حل معادلهٔ13 با شرط نرمال سازی $|\langle\psi|\psi\rangle| = \sum_n |c_n|^2 = 1$ خواهیم داشت:

$$|r_k,\theta_k\rangle = \frac{1}{\cosh r_k} \times \sum_n \tanh^n r_k\, e^{in\theta_k} |n,a_k\rangle |n,b_k\rangle. \quad (14)$$

قابل ذکر است که این حالت برای $\theta_k = 0$، همان حالت گاُوسی از نوع فشرده دو مدی است که اساس بسیاری از کارهای پژوهشی نظری و تجربی در حوزه اپتیک کوآنتومی بوده است [٤،١٣،٢٥،٢٦،٢٧]. در واقع نمایش همدوس معادلهٔ14 نشان می‌دهد که بردار حالت $|r_k,\theta_k\rangle$ یک حالت درهم تنیده از زیر سیستم‌های بوزونی a و b با آنتروپی درهم‌تنیدگی زیر است [13].

$$E^{(a,b)} = [\cosh^2 r_k \log_2 \cosh^2 r_k - \sinh^2 r_k \log_2 \sinh^2 r_k] \quad (15)$$

می‌توان دید که $\frac{\partial E^{(a,b)}}{\partial \mathcal{K}} < 0$ و بنابراین درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی a و b در حالت پایه سیستم تابعی نزولی از ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ است.



شکل1. آنتروپی درهم‌تنیدگی $E^{(a,b)}$ برحسب شاخص هندسی شبکه مغناطیسی $|\gamma_k|$ برای مقادیر گسسته‌ای از ناهمسانگردی مغناطیسی نسبت به ثابت جفت‌شدگی هایزنبرگ. با افزایش ناهمسانگردی میزان درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی a و b در حالت پایه سیستم کاهش می‌یابد. شکل داخلی، آنتروپی $E^{(a,b)}$ را برحسب k در راستای مسیری متقارن در منطقه بریلوئن یک شبکه مغناطیسی شش‌ضلعی لانه‌زنبوری دو بعدی نمایش می‌دهد.

شکل1 آنتروپی درهم‌تنیدگی $E^{(a,b)}$ را برحسب شاخص هندسی شبکه مغناطیسی $|\gamma_k|$ برای مقادیری از $\mathcal{K}$ نمایش می‌دهد[1]. کاهشی بودن درهم‌تنیدگی برحسب ناهمسانگردی به‌وضوح در شکل دیده می‌شود. در نواحی از منطقه بریلوئن متناظر با $|\gamma_k| = 1$ که شامل مرکز منطقه بریلوئن نیز است، درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی a و b متناسب با میزان ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ بیشینه مقدار خود را دارد. این نتایج به چیدمان هندسی خاص شبکه مغناطیسی وابسته نیست و برای طیف وسیعی از شبکه‌های آنتی فرو مغناطیس با چیدمان‌های هندسی گوناگون برقرار است. به‌عنوان یک مثال بارز، آنتروپی $E^{(a,b)}$ برحسب k در راستای مسیری متقارن در منطقه بریلوئن یک شبکه آنتی فرو مغناطیس با ساختار شش ضلعی لانه زنبوری دو بعدی در شکل1 نمایش داده می‌شود. برای این شبکه لانه زنبوری دو بعدی، بیشینه درهم‌تنیدگی در مرکز منطقه بریلوئن و کمینه آن در رئوس منطقه بریلوئن یا به‌اصطلاح نقاط دیراک رخ می‌دهد.

باید توجه داشت که در غیاب ناهمسانگردی ($\mathcal{K} =$ یعنی 0) تبدیل بوگولیوبوف 5 عملگرهای بوزونی $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}_k$ را در حد واسط بین دو نمایش بوزونی (a, b) و (α, β) نتیجه می‌دهد که نسبت به آنها هامیلتونی هایزنبرگ فرم درجه دوم:

$$H_0 = -\frac{NzJS(S+1)}{2} + \sum_k \hat{\varepsilon}_k(\hat{\alpha}_k^\dagger\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k^\dagger\hat{\beta}_k + I) \qquad 16$$

با رابطه پاشندگی $\hat{\varepsilon}_k = zJS\sqrt{1-|\gamma_k|^2}$ را دارد. بنابراین حالت پایه هامیلتونی هایزنبرگ در این نمایش میانی فرم جدایی پذیر:

$$|\psi_0\rangle = \prod_k |0, \hat{\alpha}_k\rangle\, |0, \hat{\beta}_k\rangle \qquad 17$$

را دارد که $|0, \hat{\alpha}_k\rangle$ و $|0, \hat{\beta}_k\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های خلأ عملگرهای بوزونی $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}_k$ هستند. مشابه قبل با اعمال تبدیل بوگولیوبوف وارون متناظر ($\mathcal{K} = 0$)، حالت پایه هامیلتونی هایزنبرگ یا به اختصار حالت پایه هایزنبرگ در نمایش بوزونی (a, b) به‌صورت:

$$|\psi_0\rangle = \prod_k |\hat{r}_k, \hat{\theta}_k\rangle, \qquad 18$$

$$|\hat{r}_k, \hat{\theta}_k\rangle = \frac{1}{\cosh \hat{r}_k} \times \sum_n \tanh^n \hat{r}_k\, e^{in\hat{\theta}_k} |n, a_k\rangle |n, b_k\rangle$$

با پارامترهای:

---

[1] در غیاب ناهمسانگردی، بزرگی ثابت جفت شدگی هایزنبرگ تأثیری در درهم تنیدگی مگنونی ندارد و برای $\mathcal{K} \neq 0$ ثابت J به‌طور نسبی تحت پارامتر گویای $\mathcal{K}/J$ در آنتروپی درهم تنیدگی ظاهر می‌شود. بنابرین مقادیر در نظر گرفته شده برای $\mathcal{K}$ در طول مقاله نسبی و درصدی از J است.

$$\hat{r}_k = \tanh^{-1}\left[\frac{1-\sqrt{1-|\gamma_k|^2}}{|\gamma_k|}\right], \quad (19)$$

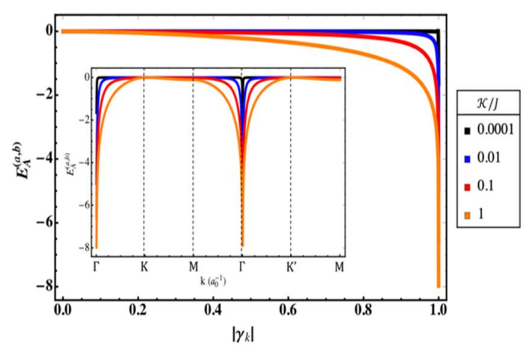
$$\hat{\theta}_k = \theta_k$$

به‌دست می‌آید. بنابراین بردار حالت پایه هایزنبرگ $|\psi_0\rangle$ حاصل‌ضربی از بردارهای حالت همدوس درهم‌تنیده $|\hat{r}_k, \hat{\theta}_k\rangle$ در نمایش بوزونی (a, b) است. آنتروپی درهم‌تنیدگی حالت $|\hat{r}_k, \hat{\theta}_k\rangle$ به‌صورت زیر است [13]:

$$E_0^{(a,b)} = [\cosh^2 \hat{r}_k \log_2 \cosh^2 \hat{r}_k - \sinh^2 \hat{r}_k \log_2 \sinh^2 \hat{r}_k]. \quad (20)$$

از آنجایی که $\psi_0 = \psi|_{\mathcal{K}=0}$ داریم $E^{(a,b)}|_{\mathcal{K}=0} = E_0^{(a,b)}$، بنابراین درهم‌تنیدگی $E^{(a,b)}$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$E^{(a,b)} = E_0^{(a,b)} + E_A^{(a,b)} \quad (21)$$



شکل2. توزیع ناهمسانگردی از درهم‌تنیدگی $E_A^{(a,b)}$ برحسب شاخص هندسی شبکه مغناطیسی $|\gamma_k|$ برای مقادیر گسسته‌ای از ناهمسانگردی نسبت به ثابت جفت‌شدگی هایزنبرگ. توزیع منفی و نزولی $E_A^{(a,b)}$ کاهش آنتروپی درهم‌تنیدگی $E^{(a,b)}$ نسبت به ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ را نشان می‌دهد. شکل داخلی، $E_A^{(a,b)}$ را برحسب k در راستای مسیری متقارن در منطقه بریلوئن یک شبکه مغناطیسی شش ضلعی لانه زنبوری دو بعدی نمایش می‌دهد.

جمله $E_A^{(a,b)}$ که در واقع تفاضل درهم‌تنیدگی‌های حالت پایه کلی (هایزنبرگ+ناهمسانگردی) و حالت پایه هایزنبرگ است، در غیاب ناهمسانگردی صفر است. بنابراین $E_A^{(a,b)}$ مربوط به بخشی از میزان درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی a و b است که اساساً توسط ناهمسانگردی درحالت پایه $|\psi\rangle$ ایجاد می‌شود و آن را توزیع ناهمسانگردی از درهم‌تنیدگی در نمایش بوزونی (a, b) می‌نامیم. به‌طور مشابه چون $E_0^{(a,b)}$ فقط از هامیلتونی هایزنبرگ نتیجه می‌شود، آن را توزیع هایزنبرگ از درهم‌تنیدگی در نمایش بوزونی (a, b) می‌نامیم. توزیع ناهمسانگردی از درهم‌تنیدگی $E_A^{(a,b)}$ در شکل2 برحسب شاخص هندسی شبکه مغناطیسی $|\gamma_k|$ برای مقادیری از $\mathcal{K}$ ترسیم شده است. از آنجایی‌که $E_0^{(a,b)}$ مستقل از $\mathcal{K}$ است، توزیع منفی و نزولی $E_A^{(a,b)}$ نسبت به ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ نزولی بودن آنتروپی درهم‌تنیدگی $E^{(a,b)}$ نسبت به $\mathcal{K}$ را تصدیق می‌کند. در شکل2 به‌ازای هر مقدار $\mathcal{K}$ بیشترین کاهش درهم‌تنیدگی در نواحی از منطقه بریلوئن متناظر با $|\gamma_k| = 1$ که شامل مرکز منطقه بریلوئن نیز است مشاهده می‌شود، اما با این وجود از شکل1 داریم که این نواحی همچنان مربوط به بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی بین سیستم‌های بوزونی a و b است.

بررسی‌های ما در زیر نشان می‌دهد که $E_A^{(a,b)}$ تنها توزیع ناهمسانگردی از درهم‌تنیدگی درحالت پایه $|\psi\rangle$ نیست. از معادلۀ17 به‌وضوح دیده می‌شود که هامیلتونی هایزنبرگ به‌تنهایی هیچ درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ایجاد نمی‌کند، یعنی $E_0^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = 0$، اما همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، در حالت کلی‌تر زمانی‌که ناهمسانگردی نیز در نظر گرفته می‌شود درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ لزوماً صفر نیست. در واقع ناهمسانگردی علاوه بر تأثیری که بر درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی a و b دارد، باعث می‌شود که زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نیز درهم‌تنیده شوند و در حالت کلی $E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} \neq$

0 گردد. برای داشتن تصویر دقیقتر و جامعتر از تأثیر ناهمسانگردی بر درهم‌تنیدگی مگنونی در ساختار تانسوری $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$، حالت پایه $|\psi\rangle$ را در نمایش بوزونی $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ به‌دست می‌آوریم:

$$|\psi\rangle = \prod_k |\tilde{r}_k, \tilde{\theta}_k\rangle \qquad 22$$

که

$$|\tilde{r}_k, \tilde{\theta}_k\rangle = \frac{1}{\cosh \tilde{r}_k} \times \sum_n \tanh^n \tilde{r}_k \, e^{in\tilde{\theta}_k} |n, \hat{\alpha}_k\rangle |n, \hat{\beta}_k\rangle$$

$$\tanh \tilde{r}_k \, e^{i\tilde{\theta}_k} = \tanh(r_k - \hat{r}_k)\, e^{i\theta_k}. \qquad 23$$

$|n,\hat{\alpha}_k\rangle$ و $|n,\hat{\beta}_k\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های ویژه عملگرهای $\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}_k$ هستند. بردار حالت $|\tilde{r}_k, \tilde{\theta}_k\rangle$ یک حالت همدوس درهم‌تنیده از زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ با آنتروپی درهم‌تنیدگی [13]:

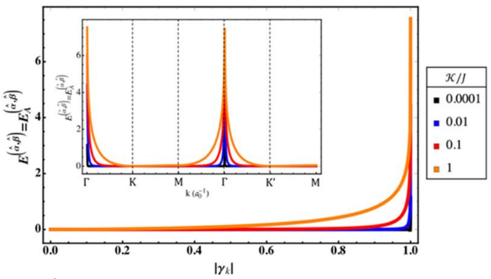
$$E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = \qquad 24$$

$$[\cosh^2(r_k - \hat{r}_k) \log_2 \cosh^2(r_k - \hat{r}_k) - \sinh^2(r_k - \hat{r}_k) \log_2 \sinh^2(r_k - \hat{r}_k)]$$

را نمایش می‌دهد.

همان‌طور که در بالا ذکر شد $E_0^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = 0$، و در واقع درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ کاملاً توزیعی از ناهمسانگردی موجود در سیستم است، به‌عبارتی:

$$E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = E_A^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}. \qquad 25$$



شکل3. (رنگی در نسخه الکترونیکی) آنتروپی درهم‌تنیدگی $E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$ و توزیع ناهمسانگردی از درهم‌تنیدگی $E_A^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$برحسب شاخص هندسی شبکه مغناطیسی $|\gamma_k|$ برای مقادیر گسسته‌ای از ناهمسانگردی نسبت به ثابت جفت شدگی هایزنبرگ. برای هر مقدار از ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی در نواحی از منطقه بریلوئن متناظر با $|\gamma_k| = 1$ که شامل مرکز منطقه بریلوئن نیز است، به‌دست می‌آید. شکل داخلی، درهم‌تنیدگی $E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = E_A^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$ را برحسب k در راستای مسیری متقارن در منطقه بریلوئن یک شبکه مغناطیسی شش ضلعی لانه زنبوری دو بعدی نمایش می‌دهد.

شکل3 آنتروپی درهم‌تنیدگی $E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = E_A^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$ را برحسب شاخص هندسی شبکه مغناطیسی$|\gamma_k|$ برای مقادیری از $\mathcal{K}$ نمایش می‌دهد. برخلاف توزیع ناهمسانگردی از درهم‌تنیدگی در نمایش بوزونی (a,b)، ناهمسانگردی توزیع مثبت و افزایشی در درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ دارد به‌این صورت که هر چه میزان ناهمسانگردی در هامیلتونی بیشتر باشد درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$، $E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = E_A^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$، بیشتر است. در اینجا نیز بیشینه درهم‌تنیدگی در نواحی از منطقه بریلوئن متناظر با $|\gamma_k| = 1$ که شامل مرکز منطقه بریلوئن نیز است، به دست می‌آید. مشابه آنچه در بالا برای نمایش (a,b) بیان شد، آنتروپی درهم‌تنیدگی بین زیر سیستم‌های بوزونی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هم وابستگی خاصی به چیدمان هندسی شبکه مغناطیسی ندارد. فقط به‌عنوان یک نمونه، نمودار داخلی شکل3 آنتروپی $E^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = E_A^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$ را برحسب k در راستای مسیری متقارن در منطقه بریلوئن یک شبکه آنتی فرو مغناطیس با ساختار شش ضلعی لانه زنبوری دو بعدی نمایش می‌دهد. برای

این شبکه لانه زنبوری دو بعدی، بیشینه درهم‌تنیدگی در مرکز منطقه بریلوئن به‌دست می‌آید.

نمایش‌های بوزونی (a,b)، (α,β) و $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ معرفی شده در بالا ساختارهای تانسوری متفاوتی را برای فضای هیلبرت بینهایت بعدی سیستم توصیف می‌کنند. توزیع‌های درهم‌تنیدگی در حالت پایه سیستم نسبت به این نمایش‌های بوزونی در جدول1 به‌صورت خلاصه مقایسه شده‌اند. توزیع‌های درهم‌تنیدگی کاملاً متفاوت تصدیقی بر این گزاره است که نمایش‌های تانسوری متفاوت درهم‌تنیدگی‌های متفاوت را نتیجه می‌دهند [24]. بنابراین بررسی نمایش‌ها و ساختارهای تانسوری مرتبط گوناگون اهمیت ویژه‌ای در آشکارسازی لایه‌های مختلف درهم‌تنیدگی در یک سیستم دارد.

$\vert\psi\rangle$	E_0	E_A	E
(a,b)	> 0	< 0 ,↓	> 0 ,↓
$(\hat{\alpha},\hat{\beta})$	0	> 0 ,↑	> 0 ,↑
(α,β)	0	0	0

جدول1. توزیع‌های درهم‌تنیدگی درحالت پایه $\vert\psi\rangle$ نسبت به نمایش‌های بوزونی مختلف. نمادهای ↑ و ↓ به‌ترتیب بیانگر صعودی و نزولی بودن درهم‌تنیدگی نسبت به ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ هستند.

به‌عنوان آخرین نکته، اثر و توزیع‌های ناهمسانگردی در درهم‌تنیدگی مگنونی که در بالا بحث شد به‌طور کلی مستقل از شکل هندسی شبکه مغناطیسی است، اما با این وجود قابل ذکر است که با توجه به معادلۀ8 پارامتر ناهمسانگردی $\mathcal{K}$ با ضریب $\frac{1}{z}$ در آنتروپی‌های درهم‌تنیدگی ظاهر می‌شود. بنابراین هر چه عدد همسایگی z یا به‌عبارتی تعداد همسایه‌های اول هر رأس در شبکه بیشتر باشد اثر $\mathcal{K}$ بر درهم‌تنیدگی مگنونی کمتر است. با این توضیح، برای محاسبات بالا عدد همسایگی $z = 3$ در نظر گرفته شده است که با نمونه چیدمان هندسی شبکه شش ضلعی لانه زنبوری دو بعدی مطابقت دارد.

نتیجه گیری

در اینجا ما به‌مطالعه اثر ناهمسانگردی بر درهم‌تنیدگی مگنونی در آنتی فرومغناطیس‌ها پرداختیم. با در نظر گرفتن هامیلتونی شامل برهم‌کنش آنتی‌فرومغناطیس هایزنبرگ و ناهمسانگردی تک محوری، توزیع های مختلفی از درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته بین مدهای مگنونی مورد بررسی واقع شد. این توزیع‌ها در نتیجه معرفی نمایش‌های بوزونی مختلف از حالت پایه سیستم به‌دست می‌آیند. در حالی که ناهمسانگردی در بعضی از توزیع‌های درهم‌تنیدگی نقش کاهشی دارد در برخی دیگر اثر افزایشی از خود نشان می‌دهد. علاوه براین نشان داده می‌شود که متناسب با میزان ناهمسانگردی، بیشترین درهم‌تنیدگی در مرکز منطقه بریلوئن به‌دست می‌آید. این نتایج مستقل از چیدمان هندسی خاص شبکه مغناطیسی است و برای ترکیب‌های آنتی‌فرومغناطیس با چیدمان‌های هندسی گوناگون برقرار است.

بررسی و تحقیقات تجربی نتایج به‌دست آمده در بالا همراه با مشاهدات آزمایشگاهی مرتبط با مرجع [19]، که امکان‌سنجی و تحلیل آنها با سایر همکاران تجربی و نظری آغاز شده است، نه تنها به‌فهم عمیقتر و دقیقتر ما از درهم‌تنیدگی متغییرهای پیوسته منجر خواهد شد، بلکه کمکی شایان برای روشن شدن این مطلب خواهد بود که کدام یک از توزیع‌های درهم‌تنیدگی مرتبط‌ترین و قابل دسترس‌ترین در آزمایشگاه و در عین حال مقاوم‌ترین در برابر دستکاری‌های خارجی و قابل استفاده‌ترین در تکنولوژی‌های کوآنتومی است.

سپاسگزاری

بخشی از پژوهش حاضر با حمایت مالی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی تحت گرنت شماره 98810042 انجام پذیرفته است، که بدین وسیله نویسنده کمال تشکر و قدردانی خود را از پژوهشگاه اعلام می‌دارد.

مرجع‌ها

[1] S. Lloyd, S.L. Braunstein, Quantum Computation over Continuous Variables, *Physical Review Letters* **82** (1999) 1784. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1784

[2] O. Pfister, Continuous-variable quantum computing in the quantum optical frequency comb, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **53** (2019) 012001. https://doi.org/10.1088/1361-6455/ab526f

[3] C. Weedbrook, S. Pirandola, R.G.-Patrón, N.J. Cerf, T.C. Ralph, J.H. Shapiro, S. Lloyd, Gaussian quantum information, *Reviews of Modern Physics* **84** (2012) 621. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.621

[4] S.L. Braunstein, P. van Loock, Quantum information with continuous variables, *Reviews of Modern Physics* **77** (2005) 513. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.513

[5] N.C. Menicucci, S.T. Flammia,O. Pfister, One-Way Quantum Computing in the Optical Frequency Comb, *Physical Review Letters* **101** (2008) 130501. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.130501

[6] J. Roslund, R.M.D. Araujo, S. Jiang, C. Fabre, N. Treps, Wavelength-Multiplexed Quantum Networks with Ultrafast Frequency Combs, *Nature Photonic* **8** (2014) 109. https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.340

[7] M. Chen, N.C. Menicucci, O. Pfister, Experimental Realization of Multipartite Entanglement of 60 Modes of a Quantum Optical Frequency Comb, *Physical Review Letters* **112** (2014) 120505. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.120505

[8] S.L. Braunstein, H.J. Kimble, Teleportation of Continuous Quantum Variables, *Physical Review Letters* **80** (1998) 869. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.869

[9] T. Opatrny, G. Kurizki, Matter-Wave Entanglement and Teleportation by Molecular Dissociation and Collisions, *Physical Review Letters* **86** (2001) 3180. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3180

[10] K. Hammerer, A.S. Sørensen, E.S. Polzik, Quantum interface between light and atomic ensembles, *Reviews of Modern Physics* **82** (2010) 1041. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.1041

[11] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, Quantum enhanced measurements: beating the standard quantum limit, *Science* **306** (2004) 1330. https://doi.org/10.1126/science.1104149

[12] Z.Y. Ou, S.F. Pereira, H.J. Kimble, K.C. Peng, Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables, *Physical Review Letters* **68**, (1992) 3663. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.3663

[13] G. Giedke, M.M. Wolf, O. Kruger, R. F. Werner, J.I. Cirac, Entanglement of Formation for Symmetric Gaussian States, *Physical Review Letters* **91** (2003) 107901.

[20] J. Li, S.-Y. Zhu, G.S. Agarwal, Magnon-Photon-Phonon Entanglement in Cavity Magnomechanics, *Physical Review Letters* **121** (2018) 203601. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.2036

[21] H. Tan, Genuine photon-magnon-phonon Einstein-Podolsky-Rosen steerable nonlocality in a continuously-monitored cavity magnomechanical system, *Physical Review Research* **1** (2019) 033161. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033161

[22] Q. Cai, J. Liao, Q. Zhou, Stationary entanglement between light and microwave via ferromagnetic magnons, *Annals of Physics (Berlin)* (2020) 2000250.

https://doi.org/10.1002/andp.202000250

[23] P. Mohn, Magnetism in the Solid State: an Introduction, Berlin: Springer-Verlag, 2006 .

[24] P. Zanardi, D.A. Lidar, S. Lloyd, Quantum Tensor Product Structures are Observable Induced, *Physical Review Letters* **92** (2004) 060402. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.060402

[25] C. Weedbrook, S. Pirandola, R.G.-Patrón, N.J. Cerf, T.C. Ralph, J.H. Shapiro, S. Lloyd, Gaussian quantum information, *Reviews of Modern Physics **84*** (2012) 621. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.621

[26] J. Peise, I. Kruse, K. Lange, B. Lücke, L. Pezzè, J. Arlt, W. Ertmer, K. Hammerer, L. Santos, A. Smerzi, C. Klempt, Satisfying the Einstein-Podolsky-Rosen criterion with massive particles, *Nature communications* **6** (2015) 8984. https://doi.org/10.1038/ncomms9984

[27] J. Li, Y. Liu, N. Huo, L. Cui, S. Feng, X. Li, Z.Y. Ou, Measuring continuous-

https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.107901

[14] M.D. Reid, P.D. Drummond, W.P. Bowen, E.G. Cavalcanti, P.K. Lam, H.A. Bachor, U.L. Andersen, G. Leuchs, The Einstein-Podolsky-Rosen paradox: From concepts to applications, *Reviews of Modern Physics* **81** (2009) 1727. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1727

[15] L.-M. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac, P. Zoller, Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems, *Physical Review Letters* **84** (2000) 2722. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2722

[16] D. Bossini, S.D. Conte, G. Cerullo, O. Gomonay, R.V. Pisarev, M. Borovsak, D. Mihailovic, J. Sinova, J.H. Mentink, T. Rasin, A.V. Kimel, Laser-driven quantum magnonics and terahertz dynamics of the order parameter in antiferromagnets *Physical Review B* **100** (2019) 024428. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.024428

[17] H.Y. Yuan, S. Zheng, Z. Ficek, Q.Y. He , M.-H. Yung, Enhancement of magnon-magnon entanglement inside a cavity, *Physical Review B* **101** (2020) 014419. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.014419

[18] J. Li, S.-Y. Zhu, Entangling two magnon modes via magnetostrictive interaction, *New Journal of Physics* **21** (2019) 085001. https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab3508

[19] V. Azimi-Mousolou, A. Bagrov, A. Bergman, A. Delin, O. Eriksson, Y. Liu, M. Pereiro, D. Thonig و E. Sjöqvist, Hierarchy of magnon entanglement in antiferromagnets, *Physical Review B* 102 (2020) 224418. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.22441

variable quantum entanglement with parametric-amplifier-assisted homodyne detection, *Physical Review A* **101** (2020) 053801. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.053801