

Conserved charges of 3D black holes in ENMG theory from Wald formalism

*Davood Mahdavian Yekta

Department of Physics, Faculty of Science, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

Received: 01.02.2021 Final revised: 25.04.2021 Accepted: 03.08.2021

Doi link: [10.22055/JRMBS.2021.17017](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17017)

Abstract

We will consider a toy model of generalization of three-dimensional (3D) gravity in the presence of higher curvature corrections known as extended new massive gravity (ENMG). By employing the Wald approach in the context of covariant phase space formalism, we compute the conserved charges of 3D rotating black holes in ENMG. In fact, we will obtain exact expressions for the mass and angular momentum of two kinds of rotating black holes the so called Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) and warped anti-de Sitter (WAdS₃) black holes. We show that these physical quantities not only satisfy the Smarr-like formula for the mass of a black hole but also fulfill the first law of black holes thermodynamics.

PACS No: 04.50.Kd, 04.50.Rt, 04.70.Dy

Keywords: Extended new massive gravity, Black holes, Conserved charges, Wald formalism

*Corresponding Author d.mahdavian@hsu.ac.ir



بارهای پایسته سیاهچاله‌های سه بعدی در نظریه گرانش جرم‌دار جدید گسترش

یافته از رهیافت والد

داوود مهدویان یکتا*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دریافت: 1399/11/13 ویرایش نهایی: 1400/02/05 پذیرش: 1400/05/12

Doi link: [10.22055/JRMBS.2021.17017](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17017)

چکیده

یک مدل اسباب بازی از تعمیم گرانش 3 بعدی در حضور تصحیحات خمشی مرتبه بالاتر را بررسی خواهیم کرد که به گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته ENMG موسوم می‌باشد. با استفاده از رهیافت والد در فرمالیسم فضای فاز هموردا، بارهای پایسته سیاهچاله‌های چرخان در نظریه ENMG را محاسبه می‌کنیم. در واقع عبارات‌های دقیقی را برای جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای سیاهچاله‌های چرخان بانادوس-توتلبویم-زانلی BTZ و آنتی دوسیته تابدار (WAdS₃) به دست خواهیم آورد. نشان می‌دهیم نه تنها این کمیت‌های فیزیکی فرمول اسمار برای جرم سیاهچاله بلکه قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها را نیز به‌طور کامل برآورده می‌کنند.

کلیدواژگان: گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته، سیاهچاله‌ها، بارهای پایسته، فرمالیسم والد

مقدمه

هنوز یک رهیافت کلی برای محاسبه آنها از جریان‌های پایسته وجود ندارد. یک راه برای غلبه بر این مشکل تعریف کمیت‌های موضعی هستند که در ناحیه مجانبی فضا-زمان تعریف می‌شوند و به آنها بارهای شبه-موضعی می‌گویند. توضیحات کامل درباره این مفهوم را می‌توان در مقاله مروری [2] مشاهده کرد.

اولین تلاش‌ها برای محاسبه جرم و اندازه حرکت یک سیستم در پس‌زمینه‌هایی که به‌طور مجانبی تخت می‌باشند در مراجع [3-7] انجام شده است و به فرمالیسم ADM موسوم می‌باشند. تعمیم این رهیافت به فضا-زمان‌هایی که به‌طور مجانبی آنتی دوسیته (AdS) هستند در مراجع [8 و 9] مطالعه شده است. همچنین بارهای پایسته برای این پس‌زمینه‌ها در حضور تصحیحات مرتبه بالاتر از تانسورهای انحنا فضا-زمان

پس از اینکه اینشتین نظریه نسبیت عام خود را در سال 1916 [1] مطرح کرد علاقه‌مندی زیادی به سمت مطالعه نظریه میدان‌های کلاسیکی و حتی کوآنتومی در فضا-زمان خمیده و یا غیر تخت معطوف شد. در حقیقت، هنگامی که فضا-زمان خمیده است کمیت‌های فیزیکی محاسبه شده در فضای تخت بایستی به‌نحوی مقتضی بازتعریف شوند تا با اصل هموردایی عام در این نظریه در تطابق باشند. به‌عنوان مثال، یک جریان پایسته که در حضور یک تقارن سرتاسری در سیستم وجود دارد، به‌گونه‌ای باید اصلاح شود تا در فضای خمیده به‌طور هموردا پایسته بماند. اما تعریف کمیت‌های پایسته در نسبیت عام که تقارن سرتاسری وجود ندارد تقریباً به یک چالش تبدیل شده است و

* نویسنده مسئول: d.mahdavian@hsu.ac.ir



که با افزودن نمادهای کریستوفل پیشنهاد شد و شامل مشتقات مرتبه سوم است، گرانش جرم‌دار توپولوژیکی است [20 و 21]. مدل پیشنهادی دیگر که شامل توان‌های مرتبه دوم از تانسورهای ریچی است، مدل گرانش جرم‌دار جدید است [22 و 23]. اگرچه این نظریه شامل مشتقات مرتبه بالاتر می‌باشد اما شامل میدان غیرفیزیکی شبه³ نیست و پارامتر زوج دارد. خطی‌سازی این نظریه حول جواب مینکوفسکی هم‌ارز با نظریه پائولی-فیرز در 4 بعد است [24]. چون از دیدگاه گرانش کوآتومی تصحیحات مرتبه بالاتر گرانشی مهم واقع می‌شوند، بنابراین طبیعی است تا تعمیم نظریه گرانش جدید را نیز مورد بررسی قرار دهیم. این ایده از نقطه‌نظر هولوغرافی انجام شده است [25] که با قضیه C در نظریه میدان همدیس دوگان نظریه گرانشی سازگاری دارد و به گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته (ENMG) موسوم می‌باشد. همچنین نشان داده شده که این تصحیحات در بسط یک نظریه بورن-اینفلد گرانشی سازگار در 3 بعد تولید می‌شوند [26].

یکی از پیش‌بینی‌های مهم در نسبیت عام وجود جواب‌های سیاهچاله‌ای برای معادلات حرکت است. هاوکینگ و همکاران نشان دادند که سیاهچاله‌ها قوانین ترمودینامیکی شبیه به سیستم‌های ترمودینامیک معمولی را برآورده می‌کنند [27]. از این رو نه تنها از نظر کلاسیکی بلکه حتی از دیدگاه کوآتومی بسیار مورد توجه‌اند. در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از فرمالیسم والد کمیت‌های پایسته جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای را برای دو دسته از سیاهچاله‌های چرخان که جواب معادلات حرکت نظریه ENMG هستند، محاسبه کنیم. دسته اول سیاهچاله‌های BTZ هستند [28] که نه تنها جواب همه مدل‌های گرانش 3 بعدی هستند بلکه در هندسه نزدیک افق برخی سیاهچاله‌ها در نظریه ریسمان و نظریه‌های ابعاد بالاتر نیز دیده می‌شوند [29 و 30].

محاسبه شده‌اند که به فرمالیسم ADT موسوم هستند [10]. روش دیگری که بر اساس فرمول‌بندی هامیلتونی از نظریه‌های هموردای عام است، فرمالیسم فضای فاز است [11 و 12] که در آن از طریق قضیه نوتر¹ و یک انتگرال سطحی می‌توان بارهای پایسته را محاسبه کرد. این روش که توسط والد و همکاران در مراجع [15-13] معرفی شده است به فرمالیسم والد نیز مشهور است و برای هر پس‌زمینه‌ای در این‌گونه نظریه‌ها قابل استفاده است. در واقع فرمالیسم والد تعمیمی از رهیافت براون-یورک [16] از نسبیت عام به هر نظریه ناوردای هموارریختی² برای محاسبه کمیت‌های شبه‌موضعی می‌باشد.

از سوی دیگر، اگر چه نظریه نسبیت عام همخوانی بسیار خوبی با اکثر پیش‌بینی‌های کلاسیکی دارد ولی در برخی موارد، به‌ویژه از دیدگاه کوآتومی، دارای کاستی‌هایی است که نشان می‌دهند این نظریه بایستی اصلاح شود. مدل‌ها و نظریه‌های زیادی برای اصلاح و یا استخراج نظریه‌ای سازگار از نسبیت عام اینشتین معرفی شده‌اند که نمی‌توان همه موارد را ذکر کرد. باوجود این، یکی از مدل‌هایی که تقریباً می‌توان برخی از مفاهیم کوآتومی این نظریه را به‌روشی آسان‌تر دنبال کرد مدل گرانش 3 بعدی است [17 و 18] که به دلیل ساختار توپولوژیکی ساده‌تر و حجم محاسبات کمتر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این مدل‌ها همچنین از دیدگاه نظریه‌های دوگانی و هولوغرافیکی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد [19].

گرانش 3 بعدی توصیف شده با کنش اینشتین-هیلبرت به‌همراه جمله ثابت کیهانی در سطح کلاسیکی درجات آزادی گراویتونی (یعنی موج گرانشی در ابعاد پایین‌تر) ندارد و به‌لحاظ کوآتومی بازبهنجارپذیر نیست، بنابراین با افزودن تصحیحات مرتبه بالاتر از مشتقات متریک می‌توان درجات آزادی گراویتونی تولید کرد. اولین مدل

³ Ghost¹ Noether² Diffeomorphism

برای یک نظریه ناوردای هموارریختی شامل میدان‌های فیزیکی Φ ، وردش لاگرانژی n -فرم آن با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\delta L = E_\Phi \delta \Phi + d\Theta(\Phi, \delta \Phi), \quad 1$$

که $E_\Phi = 0$ معادلات حرکت است. متناظر با هر میدان برداری ξ می‌توان یک جریان نوتری $(n-1)$ -فرم تعریف کرد

$$J_\xi = \Theta(\Phi, \mathfrak{L}_\xi \Phi) - \iota_\xi L, \quad 2$$

Θ پتانسیل هم‌تافته $(n-1)$ -فرم، $dt_\xi L = \xi \cdot L$ حاصلضرب داخلی و \mathfrak{L}_ξ مشتق لی می‌باشند. با توجه به

$$dJ_\xi = d\Theta(\Phi, \mathfrak{L}_\xi \Phi) - dt_\xi L = -E_\Phi \mathfrak{L}_\xi \Phi, \quad 3$$

مادامی که معادلات حرکت برآورده می‌شود جریان فوق بسته خواهد بود و داریم

$$J_\xi = dQ_\xi. \quad 4$$

کمیت $(n-2)$ -فرم Q_ξ را بار نوتری متناظر با بردار ξ می‌نامند. در نهایت می‌توان تغییرات هامیلتونی مزدوج به میدان برداری را به صورت زیر به دست آورد:

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \delta dQ_\xi - dt_\xi \Theta = \oint_{\partial \Sigma} \delta Q_\xi - \iota_\xi \Theta, \quad 5$$

که $\partial \Sigma$ مرز سطح کوشی است. اگر $\mathfrak{L}_\xi \Phi = 0$ آنگاه $\delta H_\xi = 0$ و سمت راست رابطه 5 صفر خواهد بود. اکنون فرض کنید ξ بردار کیلینگ یک سیاهچاله ایستا است که افق کیلینگ را تولید می‌کند و روی یک سطح دوشاخه به نام H صفر می‌شود. حال اگر Σ دارای یک مرز داخلی در H و یک مرز بیرونی در بینهایت فضایی باشد، داریم

$$\int_H \delta Q_\xi = \int_\infty \delta Q_\xi - \iota_\xi \Theta = \int_\infty \delta \Pi_\xi. \quad 6$$

اگر تقارن‌های مجانبی به وسیله میدان کیلینگ زیر مشخص شوند

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad 7$$

که Ω_H سرعت زاویه‌ای در افق رویداد سیاهچاله است، آنگاه انتگرال مرز بیرونی رابطه 6 را می‌توان به شکل

دسته دوم سیاهچاله‌های $WAdS_3$ هستند [31] که بیشتر جواب مدل‌های 3بعدی در حضور تصحیحات مرتبه بالاتر گرانشی بوده و در هندسه ابعاد بالاتر نیز حضور دارند [32]. همچنین نشان خواهیم داد که کمیت‌های فیزیکی به دست آمده یعنی جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای، به همراه آنتروپی و دیگر پارامترهای ترمودینامیکی در مورد هر جواب قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها و رابطه جرمی-اسمار-گونه را برآورده می‌سازند.

به طور خاص در 3بعد، محاسبه بارهای پایسته برای ENMG از رهیافت دیگری موسوم به روش کلمنت [34 و 33] با معرفی یک بردار ابر-اندازه حرکت زاویه‌ای انجام شده است [35]، ولی در محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای از یک فرض برای برقراری قانون اول استفاده شده است که از عمومیت روش می‌کاهد. از روش کلمنت سیاهچاله‌های بردار نظریه ENMG نیز مطالعه شده‌اند [36]. نکته قابل توجه این است که محاسبات انجام شده برای نظریه ENMG در این مقاله با مفاهیم بیان شده در مراجع [37 و 38] در مورد فرمالیسم والد در تطابق است ولی در این مقالات مدل‌های گرانش جرم‌دار توپولوژیکی، جدید و کمینه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، از این رو نتایج این مقاله یک مدل متفاوت را توصیف خواهد کرد.

بارهای پایسته از فرمالیسم والد

در این بخش خلاصه‌ای از مفاهیم اولیه این فرمالیسم در فضای n بعدی بیان خواهد شد و برای جزئیات بیشتر می‌توان مرجع [37] را دنبال کرد. فرض کنید ξ یک بردار کیلینگ¹ است که تقارن‌های موضعی جواب را تولید می‌کند و روی افق کیلینگ صفر می‌شود. برای سیاهچاله‌ای با بردار کیلینگ دوشاخه، جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای به عنوان بارهای پایسته کانونیک در بی‌نهایت خوش رفتار خواهند بود.

¹ Killing vector

همچنین g دترمینان متریک فضا-زمان و $R_{\mu\nu}$ و R هم تانسورهای انحنا ریچی و اسکالر ریچی می‌باشند. چون در فضا-زمان 3 بعدی تانسور وایل صفر می‌شود، لذا تانسور ریمان از تانسورهای ریچی مستقل نمی‌باشد، برای همین لاگرانژی ENMG شامل توان‌های بالاتر تانسور ریمان شبیه نظریه گائوس-بونت در ابعاد بالاتر نیست [40]. برای اینکه بخواهیم بارهای پایسته مربوط به جواب‌های سیاهچاله‌ای معادلات حرکت این نظریه را از روش والد به دست آوریم باید لاگرانژین این نظریه را به شکل یک 3-فرم بنویسیم که شامل میدان‌های لورنتسی مختصاتی، اتصالی و یک سری میدان‌های کمکی 1-فرم است. نظریه ENMG در فرمالیسم چرن-سایمونز با لاگرانژین زیر توصیف می‌شود [41]

$$L = e \cdot R + \frac{\Lambda_0}{6} e \cdot e \times e + \frac{1}{2m^2} e \cdot f \times f \quad 12$$

$$- \frac{1}{m^4} \left(h \cdot De - \frac{1}{6} f \cdot f \times f + k \cdot (R + e \times f) \right),$$

e^a میدان 1-فرم چارچوب فضا-زمانی (که در فضای 3 بعدی در بین 1 نامیده می‌شود)، ω^a میدان 1-فرم اتصالی و $\{f^a, h^a, k^a\}$ میدان‌های 1-فرم کمکی هستند. تانسورهای پیچشی لورنتسی و انحنا 2-فرم به ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$T(\omega) = De = de + \omega \times e, \quad R = d\omega + \frac{1}{2} \omega \times \omega. \quad 13$$

در اینجا نمادهای " \cdot " و " \times " به ترتیب مربوط به حاصلضرب‌های داخلی و خارجی می‌باشند که با تانسور متریک مینکوفسکی $\eta_{ab} = (-, +, +)$ و تانسور لوی-چویتا ε_{abc} بیان می‌شوند. همچنین $a = 0, 1, 2$ اندیس‌های لورنتسی و $\mu = t, r, \varphi$ اندیس‌های فضا-زمانی هستند. اگر معادله لاگرانژی 12 را نسبت به میدان‌های 1-فرم نظریه وردش دهیم معادلات حرکت زیر به دست می‌آیند:

انرژی و اندازه حرکت کل سیاهچاله تعریف کرد و با مقایسه با قانون اول ترمودینامیک می‌توان نتیجه گرفت سمت چپ این رابطه ارتباط مستقیمی با آنتروپی سیاهچاله دارد، یعنی

$$S_{BH} = \frac{2\pi}{\kappa} \int_H Q_\xi, \quad 8$$

که κ گرانش سطحی در افق رویداد سیاهچاله است. در سیاهچاله‌ها معمولاً انرژی کل با جرم آنها متناسب است، از این رو تعاریف مناسب برای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای این موجودات عبارتند از

$$\delta M = \frac{1}{8\pi G} \int_\infty \delta \Pi_\xi \left[\frac{\partial}{\partial t} \right], \quad 9$$

$$\delta J = -\frac{1}{8\pi G} \int_\infty \delta \Pi_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \right]. \quad 10$$

این کمیت‌ها در واقع همان بارهای پایسته نوتری مربوط به سیاهچاله هستند که ما قصد داریم برای سیاهچاله‌های چرخان 3 بعدی این کمیت‌ها را در بخش‌های بعدی محاسبه کنیم.

گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته

نظریه ENMG برای اولین بار براساس مفاهیم هولوگرافی در تناظر AdS/CFT [39] معرفی شد. در حقیقت، برای یک نظریه گرانشی 3 بعدی که شامل توان‌های بالاتر از ناوردهای خمشی بوده و پاریته زوج را در نظریه حفظ می‌کند، ضرایب این جملات به گونه‌ای تعیین می‌شوند که قضیه C- در نظریه 2 بعدی دوگان هولوگرافیکی برقرار باشد [25]. کنش نظریه ENMG با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \left\{ R - 2\Lambda_0 - \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) - \frac{2}{3m^4} \left(R_\mu{}^\nu R_{\nu\rho} R^{\rho\mu} - \frac{9}{8} R R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{17}{64} R^3 \right) \right\}, \quad 11$$

که G ثابت گرانش نیوتنی و Λ_0 ثابت کیهانی در 3 بعد هستند و m یک پارامتر با بعد جرمی یک است.

شکل کلی المان طول در فضا-زمان اطراف این سیاهچاله در فرم ADM با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$ds_{BTZ}^2 = -F(r)^2 dt^2 + F(r)^{-2} dr^2 + r^2 (d\varphi + N(r)dt)^2, \quad 19$$

توابع شعاعی مورد نظر عبارتند از

$$F = \sqrt{\frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{r^2 \ell^2}}, \quad N = -\frac{r_+ r_-}{r^2 \ell}, \quad 20$$

که r_+ و r_- به ترتیب افق‌های رویداد بیرونی و داخلی این سیاهچاله می‌باشند. هندسه این سیاهچاله به‌طور مجانبی ایزومتري فضای AdS_3 را دارد که شعاع این فضا با پارامتر ℓ داده می‌شود، از این‌رو در مطالعات هولوگرافی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد.

مؤلفه‌های میدان دربین با توجه به معادله متریک 19 و

رابطه $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$ به دست می‌آیند

$$e^0 = F dt, \quad e^1 = F^{-1} dr, \quad e^2 = r(d\varphi + N dt). \quad 21$$

مؤلفه‌های میدان اتصالی نیز از شرط صفر بودن پیچش در 13 و 14 به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\omega^0 = \frac{1}{2} r N' e^0 + \frac{F}{r} e^2, \quad 22$$

$$\omega^1 = \frac{1}{2} r N' e^1,$$

$$\omega^2 = F' e^0 - \frac{1}{2} r N' e^2,$$

که علامت پریم مشتق نسبت به مختصه شعاعی r است. با جانشین کردن توابع 20 و با استفاده از تعریف

انحنای 2-فرم R^a در رابطه 13 داریم

$$R^0 = \frac{1}{\ell^2} e^1 \wedge e^2, \quad R^1 = -\frac{1}{\ell^2} e^2 \wedge e^0, \quad 23$$

$$R^2 = -\frac{1}{\ell^2} e^0 \wedge e^1.$$

از حل معادلات حرکت دوم، سوم و چهارم در معادله 14 به ترتیب میدان‌های 1-فرم کمکی زیر را به دست می‌آوریم:

$$f^a = \frac{1}{2\ell^2} e^a, \quad k^a = \left(\frac{1}{8\ell^2} + \frac{m^2}{2\ell^2} \right) e^a, \quad h^a = 0. \quad 24$$

با جانشینی میدان‌های 24 در رابطه آخر 14 ارتباط میان ثابت کیهانی و دیگر پارامترهای ثابت نظریه حاصل می‌شود

$$De = 0,$$

$$R + e \times f = 0,$$

$$e \times k - \frac{1}{2} f \times f - m^2 e \times f = 0, \quad 14$$

$$Dk + e \times h = 0,$$

$$R + \frac{\Lambda_0}{2} e \times e + \frac{1}{2m^2} f \times f - \frac{1}{m^4} (Dh + f \times k) = 0.$$

معادله اول شرط بدون پیچش بودن فضا را مشخص می‌کند و می‌توان از روی آن با داشتن فریم مختصاتی e^a میدان اتصالی را محاسبه کرد. وردش این لاگرانژی یک جمله مشتق کلی دارد که پتانسیل هم‌تافته $(n-1)$ -فرم زیر را تولید می‌کند:

$$\Theta = \delta\omega \cdot e - \frac{1}{m^4} (\delta e \cdot h + \delta\omega \cdot k). \quad 15$$

با توجه به رابطه 2 می‌توان یک جریان نوتری به شکل زیر پیدا کرد:

$$J_\xi = d \left(\iota_\xi \omega \cdot e - \frac{1}{m^4} (\iota_\xi e \cdot h + \iota_\xi \omega \cdot k) \right), \quad 16$$

بنابراین بار پایسته نوتری بر اساس معادله 4 عبارت است از

$$Q_\xi = \iota_\xi \omega \cdot e - \frac{1}{m^4} (\iota_\xi e \cdot h + \iota_\xi \omega \cdot k). \quad 17$$

حال اگر بخواهیم تغییرات این بارها برای یک حل مورد نظر را تحت تبدیلات میدان برداری ξ بررسی کنیم، داریم

$$\delta\pi_\xi = \delta Q_\xi - \iota_\xi \Theta = \iota_\xi \omega \cdot \delta e + \delta\omega \cdot \iota_\xi e - \frac{1}{m^4} (\iota_\xi e \cdot \delta h + \delta e \cdot \iota_\xi h + \iota_\xi \omega \cdot \delta k + \delta\omega \cdot \iota_\xi k). \quad 18$$

نکته قابل ذکر این است که در فضای 3بعدی انتگرال مرزی بارهای نوتری در روابط 9 و 10 روی یک دایره به شعاع ثابت گرفته می‌شود. با حل معادلات 14 و جایگزینی میدان‌ها در رابطه 18 در بخش‌های بعدی بارهای پایسته سیاهچاله‌های چرخان 3 بعدی را به دست خواهیم آورد.

بارهای پایسته سیاهچاله BTZ

معروف‌ترین حل غیربدیهی معادلات حرکت مدل‌های گرانشی در 3 بعد سیاهچاله BTZ است [28].

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8G\ell^2} \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4} \right), \quad 31$$

$$J = \frac{r_+ r_-}{4G\ell} \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4} \right).$$

در این محاسبه دو نوع انتگرال‌گیری انجام شده است، یکی به‌ازای تغییرات r_+ و r_- و دیگری برای زاویه φ می‌باشد. آنتروپی این سیاهچاله نیز به‌ازای بردار کیلینگ در افق رویداد بیرونی که با رابطه 7 داده شده قابل محاسبه است

$$S_{BH} = \frac{\pi r_+}{2G} \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4} \right), \quad 32$$

که در آن از کمیت‌های ترمودینامیکی زیر یعنی سرعت زاویه‌ای و دمای هاوکنینگ در افق رویداد استفاده شده است [42]

$$T_H = \frac{F'}{4\pi} \Big|_{r=r_+} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi\ell^2 r_+}, \quad 33$$

$$\Omega_H = -N \Big|_{r=r_+} = \frac{r_-}{\ell r_+}.$$

این کمیت‌ها به‌همراه پارامترهای فیزیکی به‌دست آمده در روابط 31 و 32 رابطه اسمار [43] برای محاسبه جرم سیاهچاله را به‌صورت زیر ارضا می‌کنند:

$$M = \frac{1}{2} S_{BH} T_H + \Omega_H J. \quad 34$$

معمولاً تفاوت میان جواب خلاً نظریه و جواب سیاهچاله به‌پارامترهای فیزیکی آن مرتبط می‌باشد که این وابستگی با توجه به‌رابطه‌های 31 و 32 تابعی از مکان افق‌های رویداد داخلی و بیرونی می‌باشد. با توجه به این نکته می‌توان نشان داد که کمیت‌های مورد نظر قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها را با وردش آنها نسبت به r_+ و r_- به‌شکل زیر برآورده می‌سازند

$$\frac{\partial M}{\partial r_+} - T_H \frac{\partial S_{BH}}{\partial r_+} + \Omega_H \frac{\partial J}{\partial r_+} = 0, \quad 35$$

$$\frac{\partial M}{\partial r_-} - T_H \frac{\partial S_{BH}}{\partial r_-} + \Omega_H \frac{\partial J}{\partial r_-} = 0.$$

بارهای پایسته سیاهچاله $WAdS_3$

دسته‌ای دیگر از جواب‌های معادلات حرکت مدل‌های گرانش سه بعدی که شامل مشتقات مرتبه

$$\Lambda_0 = -\frac{8m^4\ell^4 + 2m^2\ell^2 + 1}{8m^4\ell^6}, \quad 25$$

منفی بودن مقدار ثابت کیهانی نشان می‌دهد که سیاهچاله BTZ یک فضای AdS گونه است.

تغییرات بارهای پایسته کانونی به‌ازای تبدیلات تقارنی تولید شده با میدان برداری ξ مربوط به این سیاهچاله در نظریه ENMG با جایگزاری میدان‌ها در رابطه 18 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

26

$$\delta\Pi_\xi = \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4} \right) (\iota_\xi \omega \cdot \delta e + \delta \omega \cdot \iota_\xi e).$$

برای محاسبه کمیت‌های پایسته در مرز سطح کوشی کافیت تنها مؤلفه $d\varphi$ را محاسبه کنیم، بنابراین

$$\delta\omega^0 = \delta F d\varphi, \quad \delta\omega^2 = -\frac{1}{2} r^2 \delta N' d\varphi. \quad 27$$

همچنین ضرب‌های داخلی به‌ازای ξ می‌شوند

$$\iota_\xi e^0 = F, \quad \iota_\xi e^2 = rN,$$

$$\iota_\xi \omega^0 = F \left(N + \frac{1}{2} rN' \right), \quad 28$$

$$\iota_\xi \omega^2 = FF' - \frac{1}{2} r^2 NN',$$

و برای $\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$$\iota_\xi e^2 = r, \quad \iota_\xi \omega^0 = F, \quad \iota_\xi \omega^2 = -\frac{1}{2} r^2 N'. \quad 29$$

با استفاده از روابط 29-26 تغییرات بار به‌ازای بردارهای کیلینگ انتقالی و دورانی در روابط 9 و 10 به‌ترتیب با عبارت‌های زیر داده می‌شوند:

$$\delta\Pi_\xi = \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4} \right) (r_+ \delta r_+ + r_- \delta r_-) d\varphi, \quad 30$$

$$\delta\Pi_\xi = -\left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4} \right) (r_+ \delta r_- + r_- \delta r_+) d\varphi.$$

اکنون با یک انتگرال‌گیری ساده می‌توان جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای را به‌عنوان بارهای پایسته سیاهچاله BTZ به‌دست آورد

مؤلفه‌های لورنتسی تانسور انحنای هندسه $WAdS_3$ با استفاده از میدان اتصالی فوق و رابطه 13 عبارتند از

$$R^0 = \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{(K^2 N')^2}{4} + KF(K'F)' + (FK)^2 \right) e^1 \wedge e^2 + \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{KF(K^2 N')'}{2} + K'FK^2 N' \right) e^1 \wedge e^0, \quad 41$$

$$R^1 = -\frac{4}{\ell^2} \left(\frac{(K^2 N')^2}{4} + KK'FF' \right) e^2 \wedge e^0,$$

$$R^2 = \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{3(K^2 N')^2}{4} - KF(KF)' - (F'K)^2 \right) e^0 \wedge e^1 - \frac{4}{\ell^2} \left(\frac{KF(K^2 N')'}{2} + K'FK^2 N' \right) e^1 \wedge e^2.$$

از دومین معادله حرکت در 14 و رابطه 41 می‌توان میدان کمکی 1-فرم f^a را برحسب مؤلفه‌های میدان دربین

نوشت

42

$$f^0 = U_1 e^0 + U_2 e^2, \quad f^1 = U_3 e^1, \quad f^2 = U_4 e^2 + U_5 e^0,$$

طوری‌که

$$U_1 = -\frac{2}{\ell^2} \left(\frac{3(K^2 N')^2}{4} + (KK')'F^2 - KFK'F' - K^2(FF'' + F'^2) \right),$$

$$U_2 = -\frac{2}{\ell^2} (K^2 F(4K'N' + KN'')), \quad 43$$

$$U_3 = -\frac{2}{\ell^2} \left(\frac{3(K^2 N')^2}{4} - (KK')'F^2 - KFK'F' - K^2(FF'' + F'^2) \right),$$

$$U_4 = \frac{2}{\ell^2} \left(\frac{5(K^2 N')^2}{4} + (KK')'F^2 + KFK'F' - K^2(FF'' + F'^2) \right),$$

$$U_5 = -U_2.$$

میدان‌های 1-فرم دیگر نیز پس از محاسباتی سخت و طاقت فرسا به‌صورت زیر از معادلات حرکت به‌دست

می‌آیند. بنابراین برای میدان کمکی h^a داریم

$$h^0 = Y_1 e^0 + Y_2 e^2, \quad h^1 = Y_3 e^1, \quad h^2 = Y_4 e^2 + Y_5 e^0, \quad 44$$

که به‌عنوان مثال تنها یک ضریب در اینجا به نمایش گذاشته شده است، یعنی

بالتر می‌باشند، سیاهچاله $WAdS_3$ است [31 و 44].

برخلاف سیاهچاله BTZ این نوع جواب دارای ایزومتري مجانبی AdS_3 نیست و به‌واسطه یک عامل

پیچشی هندسه آن تابدار است، با وجود این همانند آن دارای چرخش است و در مطالعات هولوگرافی دارای

اهمیت است [45]. فضا-زمان اطراف این سیاهچاله با متریک زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{ds_{WAdS}^2}{\ell^2} = -F^2 dt^2 + \frac{dr^2}{4F^2 K^2} + K^2 (d\phi + N dt)^2, \quad 36$$

که توابع شعاعی با عبارت‌های زیر داده می‌شوند

$$F^2 = \frac{(v^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)}{4K^2},$$

$$N = \frac{2vr - \sqrt{(v^2 + 3)r_+ r_-}}{2K^2}, \quad 37$$

$$K^2 = \frac{r}{4} \left[3(v^2 - 1) + (v^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4v\sqrt{(v^2 + 3)r_+ r_-} \right],$$

r_+ و r_- محل افق‌های بیرونی و داخلی بوده و v

پارامتر ثابتی است که میزان تابیدگی فضای AdS را

مشخص می‌کند. جزئیات بیشتر در مورد ویژگی‌ها و

ساختار علی-فضا-زمان این جواب در [33 و 42] آمده

است. میدان‌های دربین برای این حل را می‌توان

به‌شکل زیر نوشت

$$e^0 = \ell F dt, \quad e^1 = \frac{\ell dr}{2FK}, \quad e^2 = \ell K (d\phi + N dt). \quad 38$$

چون نظریه ENMG ناوردای هموارریختی می‌باشد و

معادلات حرکت همچنان با رابطه 14 داده می‌شوند،

می‌توانیم از شرط بدون پیچش میدان‌های اتصالی را

برای این جواب هم محاسبه کنیم

39

$$\omega^0 = W_1 e^0 + W_2 e^2, \quad \omega^1 = W_3 e^1, \quad \omega^2 = W_4 e^2 + W_5 e^0,$$

که برای مقاصد بعدی و ساده نویسی ضرایب W_1 تا

W_5 به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

40

$$W_1 = W_3 = -W_4 = \frac{K^2 N'}{\ell}, \quad W_2 = \frac{2FK'}{\ell}, \quad W_5 = \frac{2KF'}{\ell}.$$

48

$$v^2 = \frac{6}{7} + \frac{10m^2\ell^2}{21} + \frac{1}{42}\Delta,$$

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{37044m^4\ell^6} \left[(592m^4\ell^4 - 5402m^2\ell^2 + 1215)\Delta + 8648m^6\ell^6 + 57132m^4\ell^4 - 12150m^2\ell^2 - 32805 \right],$$

که برای ساده نویسی عبارت مقابل را انتخاب می‌کنیم

$$\Delta = \sqrt{232m^4\ell^4 + 1188m^2\ell^2 + 729}$$

اکنون برای ضرب‌های داخلی میدان‌ها به‌ازای $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$

داریم

$$t_\xi e^0 = \ell F, \quad t_\xi \omega^0 = \ell F W_1 + \ell K N W_2, \quad 49$$

$$t_\xi e^2 = \ell K N, \quad t_\xi \omega^2 = \ell K N W_4 + F W_5,$$

و همین‌طور

$$t_\xi f^0 = \ell F U_1 + \ell K N U_2, \quad t_\xi f^2 = \ell K N U_4 + F U_5, \quad 50$$

$$t_\xi h^0 = \ell F Y_1 + \ell K N Y_2, \quad t_\xi h^2 = \ell K N Y_4 + F Y_5,$$

$$t_\xi k^0 = \ell F P_1 + \ell K N P_2, \quad t_\xi k^2 = \ell K N P_4 + F P_5.$$

به‌طور مشابه برای بردار $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ داریم

$$t_\xi e^2 = \ell K, \quad t_\xi \omega^0 = \ell K W_2, \quad t_\xi \omega^2 = \ell K W_4, \quad 49$$

$$t_\xi f^0 = \ell K U_2, \quad t_\xi f^2 = \ell K U_4,$$

$$t_\xi h^0 = \ell K Y_2, \quad t_\xi h^2 = \ell K Y_4,$$

$$t_\xi k^0 = \ell K P_2, \quad t_\xi k^2 = \ell K P_4.$$

وردش میدان‌ها که به‌مؤلفه $d\varphi$ مربوط می‌باشند

به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\delta e^0 = 0, \quad \delta e^2 = \ell \delta K d\varphi,$$

$$\delta \omega^0 = \ell \delta (K W_2) d\varphi, \quad \delta \omega^2 = \ell \delta (K W_4) d\varphi, \quad 50$$

$$\delta f^0 = \ell \delta (K U_2) d\varphi, \quad \delta f^2 = \ell \delta (K U_4) d\varphi,$$

$$\delta h^0 = \ell \delta (K Y_2) d\varphi, \quad \delta h^2 = \ell \delta (K Y_4) d\varphi,$$

$$\delta k^0 = \ell \delta (K P_2) d\varphi, \quad \delta k^2 = \ell \delta (K P_4) d\varphi.$$

اکنون با محاسبه $\delta \Pi_\xi$ برحسب تغییرات میدان‌ها و

ضرب‌های داخلی به‌دست آمده و جانشینی 37 می‌توان

کمیت‌های جرم و اندازه‌حرکت زاویه‌ای سیاهچاله

WAdS₃ در نظریه ENMG را به‌دست آورد. بر این

اساس داریم

$$M = \frac{2v(v^2+3)\Xi}{G} \left(v(r_+ + r_-) - \sqrt{(v^2+3)r_+ r_-} \right), \quad 51$$

$$J = \frac{v\ell(v^2+3)\Xi}{2G} \left[\left(v(r_+ + r_-) - \sqrt{(v^2+3)r_+ r_-} \right)^2 - v^2(r_+ - r_-)^2 \right],$$

$$Y_1 = \frac{1}{8\ell^2} \left(32K^3 K' F^2 F' F'' - 40K^5 K'' F^2 N'^2 - 24K^6 F F'' N'^2 - 32K^2 K' K'' F^3 F' + 16K^6 F^2 N''^2 + 32K^3 K'' F^3 F'' + 32K^3 K'' F^2 F'^2 + 32K^2 K'^2 F^3 F'' - 96KK'^2 K'' F^4 + 128K^5 K' F^2 N' N'' + 16K^4 F^2 F''^2 + 32K^3 K' F F'^3 - 48K^2 K''^2 F^4 + 32K^4 F F'' F'^2 + 48K^2 F^2 K'^2 F'^2 - 24K^6 F'^2 N'^2 - 32KK'^3 F^3 F' - 24K^5 K' F F' N'^2 + 9K^8 N'^4 + 216K^4 K'^2 F^2 N'^2 - 48K'^4 F^4 + 16K^4 F'^4 \right) + \frac{m^2}{8\ell^2} \left(16K^2 F F'' - 16KK'' F^2 + 16K^2 F'^2 - 12K^4 N'^2 - 16K'^2 F^2 + 16KK' F F' \right), \quad 45$$

و همچنین برای میدان k^a

$$k^0 = P_1 e^0 + P_2 e^2, \quad k^1 = P_3 e^1, \quad k^2 = P_4 e^2 + P_5 e^0, \quad 46$$

تنها یکی از ضرایب را به‌عنوان مثال آورده‌ایم

47

$$P_1 = \frac{2K^2}{\ell^2} \left(7K^6 F'^2 N'^3 - 56K^4 K'^2 F^2 N'^3 + 12K^3 K' F F'^3 N' + 112KK'^3 F^3 F' N' - 8K^5 K' F F' N'^3 + 48K'^4 F^4 N' - 3K^8 N'^5 - 4K^4 F'^4 N' + 16K^2 K'^2 F'^4 N' - 4K^4 F^2 F'^2 N' + 32KK'^3 F^4 N'' + 4K^4 F F'^3 N'' + 80K^2 K' K'' F^3 F' N' + 4K^2 K'^2 F^4 N'' + 4K^4 F^3 F'' N'' + 16K^3 K'' F^3 F' N'' + 4K^3 K'' F^4 N'' + 116K^2 K'^2 F^2 F'^2 N' + 4K^4 F^2 F'^2 N'' + 16K^4 F^2 F' F'' N'' - 16K^5 K'' F^2 N'^3 + 112K F F'' F'^2 N' + 100K^2 K'^2 F^3 F' N' + 112KK'' K'^2 F^4 N' + 7K^6 F F'' N'^3 - 8K^4 F F'' F'^2 N' + 44K^2 K' K'' F^4 N'' + 16K^2 K' K'' F^4 N' + 44K^3 K' F^3 F'' N'' + 60K^3 K' F^2 F' F'' N' - 8KK'' F^2 N' - 44K^5 K' F^2 N'^2 N'' - 3K^6 F F' N'^2 N'' + 4K^3 K'' F^4 N'' + 4K^3 K' F^3 F' N'' + 16K^3 K'^2 F^3 F'' N' - 3K^6 F^2 N'^2 N'' - 4K^6 F^2 N' N'' + 20K^3 K'' F^2 F'^2 N' + 20K^3 K'' F^3 F'' N' + 48K^2 K'^2 F^3 F' N'' + 48K^3 K' F^2 F'^2 N'' \right) + \frac{2m^2 K^2}{\ell^3} \left(2K^4 N'^3 - 2K^2 F'^2 N' + 24K'^2 F^2 N' + 8KK' F F' N' + 16KK' F^2 N'' + 2K^2 F F' N'' + 2K^2 F^2 N'' + 8KK'' F^2 N' + 2K^2 F F' N' \right),$$

با جای‌گذاری میدان‌های 38-47 در آخرین معادله

حرکت 14 داریم

کلمنت در [35 و 36] همخوانی دارد ولی بایستی دقت شود که محاسبات بر اساس فرمالیسم والد به صورت کلی بوده و هیچ‌گونه قیدی را ندارد، حال آنکه کمیت‌های به دست آمده در رهیافت کلمنت با یک قید به منظور برآورده شدن قانون اول ترمودینامیک محاسبه می‌شوند [34]. نشان دادیم بارهای پایسته این سیاهچاله‌ها از فرمالیسم والد نه تنها در رابطه‌های جرمی اسمار صدق می‌کردند بلکه قانون اول ترمودینامیک را نیز بدون هیچ شرطی برآورده می‌ساختند. اهمیت دیگر روش والد اینست که می‌توان آنرا به ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد ولی روش کلمنت فقط برای فضا-زمان سه بعدی است. کمیت‌های M و J در نظریه ENMG می‌تواند در مطالعه قانون حاصلضربی آنتروپی‌های این سیاهچاله‌ها [46] و رهیافت ترمودینامیکی برای محاسبه کمیت‌های CFT دوگان به آنها [47] مفید واقع شود.

سپاس‌گزاری

از همکاری و هم‌فکری ارزشمند دکتر حنیف گلچین در گام‌های اولیه مقاله کمال تشکر را دارم.

مرجع‌ها

- [1] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Annalen der Physik Ser 4* **49** (1916) 769-822. <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>
- [2] L.B. Szabados, Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity, *Living reviews in relativity* **12.1** (2009) 1-163. <http://doi.org/10.12942/lrr-2004-4>
- [3] A. Komar, Covariant conservation laws in general relativity, *Physical Review* **113** (1959) 934-936. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.934>
- [4] R.L. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity, *Physical Review* **116** (1959) 1322-1330. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322>

که پارامتر ثابت Ξ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Xi = \frac{16v^2 + 3 - \sqrt{232v^4 + 168v^2 - 45}}{(20v^2 - 3 - \sqrt{232v^4 + 168v^2 - 45})^2}. \quad 52$$

آنتروپی این سیاهچاله نیز به ازای بردار کیلینگ در افق رویداد بیرونی محاسبه می‌شود، بنابراین

$$S_{BH} = \frac{16\pi v^2 \ell \Xi}{G} \left(2vr_+ - \sqrt{(v^2 + 3)r_+ r_-} \right), \quad 53$$

که در آن از کمیت‌های ترمودینامیکی زیر یعنی سرعت زاویه‌ای و دمای هاوکینگ در افق رویداد استفاده شده است [44]

$$T_H = \frac{1}{2\pi\ell} \sqrt{g^{rr}} \partial_r F|_{r=r_+} \quad 54$$

$$= \frac{(v^2 + 3)}{4\pi\ell} \frac{r_+ - r_-}{\left(2vr_+ - \sqrt{(v^2 + 3)r_+ r_-} \right)},$$

$$\Omega_H = \frac{1}{\ell} N|_{r=r_+} = \frac{2}{\ell \left(2vr_+ - \sqrt{(v^2 + 3)r_+ r_-} \right)}.$$

برای این سیاهچاله نیز کمیت‌های فیزیکی به دست آمده در رابطه‌های 54-51 در رابطه اسمار-گونه جرمی زیر صدق می‌کنند

$$M = S_{BH} T_H + 2\Omega_H J. \quad 55$$

همچنین آنها قانون اول ترمودینامیک را براساس رابطه‌های 35 برآورده می‌سازند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای سیاهچاله‌های چرخان BTZ و WAdS₃ را به عنوان دو جواب در نظریه ENMG محاسبه نمودیم. چون نظریه ENMG با یک لاگرانژین ناورداری هموارریختی توصیف می‌شود ما از فرمالیسم والد برای محاسبه این کمیت‌ها استفاده کردیم. در حقیقت، جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای در این روش از انتگرال‌گیری یک بار نوتری روی فضای مرزی مجانبی در بی‌نهایت و با انتخاب مناسب برای بردار کیلینگ به دست آمد. نتایج به دست آمده برای این کمیت‌ها به ترتیب با رابطه‌های 31 و 51 توصیف می‌شوند. اگرچه نتایج به دست آمده برای این سیاهچاله‌ها با مقادیر محاسبه شده از رهیافت

- [15] V. Iyer, R.M. Wald, Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy, *Physical Review D* **50** (1994) 846-864.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.846>
- [16] J.D. Brown, J.W. York, Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action, *Physical Review D* **47** (1993) 1407-1419.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1407>
- [17] H. Leutwyler, A 2+1 Dimensional Model For The Quantum Theory Of Gravity, *Nuovo Cimento A* **42** (1966) 159-178.
<https://doi.org/10.1007/BF02856201>
- [18] S. Carlip, Conformal Field Theory, (2+1) dimensional Gravity, and the BTZ Black hole, *Classical and Quantum Gravity* **22** (2005) 85-124.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/12/R01>
- [19] E. witten, 2+1 dimensional gravity as an exactly solvable system, *Nuclear Physics B* **311** (1988) 46-78.
[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90143-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90143-5)
- [20] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Three-Dimensional Massive Gauge Theories, *Physical Review Letters* **48** (1982) 975.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.975>
- [21] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Topologically massive gauge theories, *Annals of Physics* **140** (1982) 372.
<https://doi.org/10.1006/aphy.2000.6013>
- [22] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, Massive Gravity in Three Dimensions, *Physical Review Letters* **102** (2009) 201301.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.201301>
- [23] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, More on Massive 3D Gravity, *Physical Review D* **79** (2009) 124042.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.124042>
- [24] M. Fierz, W. Pauli, On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an
- [5] R.L. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Canonical variables for general relativity, *Physical Review* **117** (1960) 1595-1602.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.117.1595>
- [6] H. Bondi, M.G.J. van der Burg, A.W.K. Metzner, Gravitational waves in general relativity 7 Waves from axisymmetric isolated systems, *Proceedings of The Royal Society London A* **269** (1962) 21-52.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0161>
- [7] R. Sachs, Asymptotic symmetries in gravitational theory, *Physical Review* **128** (1962) 2851-2864.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.128.2851>
- [8] L.F. Abbott, S. Deser, Stability of gravity with a cosmological constant, *Nuclear Physics B* **195** (1982) 76.
[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(82\)90049-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90049-9)
- [9] A. Ashtekar, A. Magnon, Asymptotically anti-de Sitter space-times, *Classical and Quantum Gravity* **1** (1984) L39-L44.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/1/4/002>
- [10] S. Deser, B. Tekin, Gravitational energy in quadratic curvature gravities, *Physical Review Letters* **89** (2002) 101101.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.101101>
- [11] A. Ashtekar, L. Bombelli, R. Koul, Phase space formulation of general relativity without a 3+1 splittin, *Lecture Notes in Physics* **278** (1987) 356-359.
<https://doi.org/10.1007/3-540-17894-5-378>
- [12] G. Barnich, F. Brandt, Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charge, *Nuclear Physics B* **633** (2002) 3-82.
- [13] J. Lee, R.M. Wald, Local symmetries and constraints, *Journal of Mathematical Physics* **31** (1990) 725-743.
<https://doi.org/10.1063/1.528801>
- [14] R.M. Wald, Black hole entropy is the Noether charge, *Physical Review D* **48** (1993) 3427-3431.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.R3427>

- [33] G. Clement, Particle-like solutions to topologically massive gravity, *Classical and Quantum Gravity* **11** (1994) L115. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/9/001>
- [34] G. Clement, Black hole mass and angular momentum in 2+1 gravity, *Physical Review D* **68** (2003) 024032. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.024032>
- [35] S. Nam, J.D. Park, S.H. Yi, AdS Black Hole Solutions in the Extended New Massive Gravity, *Journal of High Energy Physics* **07** (2010) 058. [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2010\)058](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2010)058)
- [36] A. Ghodsi, D.M. Yekta, On asymptotically AdS-like solutions of three dimensional massive gravity, *Journal of High Energy Physics* **06** (2012) 131. [https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2012\)131](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2012)131)
- [37] S. Nam, J.D. Park, Mass and angular momentum of black holes in 3D gravity theories with first order formalism, *European Physical Journal C* **78** (2018) 535. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6016-5>
- [38] S. Nam, J.D. Park, Warped AdS₃ black hole in minimal massive gravity with first order formalism, *Physical Review D* **98** (2018) 124034. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.124034>
- [39] J.M. Maldacena, the large N limit of superconformal field theories and supergravity, *International Journal of Theoretical Physics* **38** (1999) 1113. <https://doi.org/10.1023/A:1026654312961>
- [40] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, *Journal of Mathematical Physics* **12** (1971) 498–501. <https://doi.org/10.1063/1.1665613>
- [41] H. Afshar, E.A. Bergshoeff, W. Merbis, Extended massive gravity in three dimensions, *Journal of High Energy Physics* **08** (2014) 115. [https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2014\)115](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2014)115)
- [42] S. Carlip, The (2+1)-dimensional black hole, *Classical and Quantum Gravity* **12** (1995) 2853. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/001>
- [25] A. Sinha, on the new massive gravity and AdS/CFT, *Journal of High Energy Physics* **06** (2010) 061. [https://doi.org/10.1007/JHEP06\(2010\)061](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2010)061)
- [26] I. Gullu, T.C. Sisman, B. Tekin, Born-Infeld extension of new massive gravity, *Classical and Quantum Gravity* **27** (2010) 162001. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/16/162001>
- [27] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, the four laws of black hole mechanics, *Communications in mathematical physics* **31** (1973) 161-170. <http://doi.org/10.1007/BF01645742>
- [28] M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli, Black hole in three-dimensional spacetime, *Physical Review Letters* **69** (1992) 1849. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849>
- [29] K. Sfetsos, K. Skenderis, Microscopic derivation of the Bekenstein-Hawking entropy formula for non-extremal black hole, *Nuclear Physics B* **517** (1998) 179-204. [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00023-6](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00023-6)
- [30] R. Emparan, G.T. Horowitz, R.C. Myers, Exact description of black holes on branes II: comparison with BTZ black holes and black strings, *Journal of High Energy Physics* **01** (2000) 021. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2000/01/021>
- [31] K.A. Moussa, G. Clement, C. Leygnac, The black holes of topologically massive gravity, *Classical and Quantum Gravity* **20** (2003) L277. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/24/L01>
- [32] S. Detournay, D. Israel, J.M. Lapan, M. Romo, String theory on Warped AdS₃ and Virasoro Resonances, *Journal of High Energy Physics* **01** (2011) 030. [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2011\)030](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2011)030)

- Review D* **86** (2012) 124018.
<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2015.05.01>
- [46] M. Cvetič, G.W. Gibbons, C.N. Pope, Universal Area Product Formulas for Rotating and Charged Black Holes in Four and Higher Dimensions, *Physical Review Letters* **106** (2011) 121301.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.121301>
- [47] B. Chen, Z. Xue, J.J. Zhang, Note on thermodynamics method of black hole/CFT correspondence, *Journal of High Energy Physics* **03** (2013) 102.
[https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2013\)102](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)102)
- (1995) 2853-2879.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/005>
- [43] L. Smarr, Mass formula for Kerr black holes, *Physical Review Letters* **30** (1973) 71.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.71>
- [44] D. Anninos, W. Li, M. Padi, W. Song, A. Strominger, Warped AdS₃ Black holes, *Journal of High Energy Physics* **03** (2009) 130.
<https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/03/130>
- [45] S. Detournay, T. Hartman, D. Hofman, Warped conformal field theory, *Physical*