Conserved charges of 3D black holes in ENMG theory from Wald formalism

*Davood Mahdavian Yekta

Department of Physics, Faculty of Science, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

Received: 01.02.2021 Final revised: 25.04.2021 Accepted: 03.08.2021

Doi link: 10.22055/JRMBS.2021.17017

Abstract

We will consider a toy model of generalization of three-dimensional (3D) gravity in the presence of higher curvature corrections known as extended new massive gravity (ENMG). By employing the Wald approach in the context of covariant phase space formalism, we compute the conserved charges of 3D rotating black holes in ENMG. In fact, we will obtain exact expressions for the mass and angular momentum of two kinds of rotating black holes the so called Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) and warped anti-de Sitter ($WAdS_3$) black holes. We show that these physical quantities not only satisfy the Smarr-like formula for the mass of a black hole but also fulfill the first law of black holes thermodynamics.

PACS No: 04.50.Kd, 04.50.Rt, 04.70.Dy

Keywords: Extended new massive gravity, Black holes, Conserved charges, Wald formalism

*Corresponding Author d.mahdavian@hsu.ac.ir

مقاله پژوهشی کامل

بارهای پایسته سیاهچاله‌های سه بعدی در نظریهٔ گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته از رهیافت والد

داوود مهدویان یکتا*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دریافت: 1399/11/13 ویرایش نهائی: 1400/02/05 پذیرش: 1400/05/12

Doi link: 10.22055/JRMBS.2021.17017

چکیده

یک مدل اسباب بازی از تعمیم گرانش 3 بعدی در حضور تصحیحات خمشی مرتبهٔ بالاتر را بررسی خواهیم کرد که به گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته ENMG موسوم می‌باشد. با استفاده از رهیافت والد در فرمالیسم فضای فاز هموردا، بارهای پایستهٔ سیاهچاله‌های چرخان در نظریهٔ ENMG را محاسبه می‌کنیم. در واقع عبارت‌های دقیقی را برای جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای سیاهچاله‌های چرخان بانادوس-توتلبویم-زانلی BTZ و آنتی دوسیته تابدار ($WAdS_3$) به‌دست خواهیم آورد. نشان می‌دهیم نه تنها این کمیت‌های فیزیکی فرمول اسمار برای جرم سیاهچاله بلکه قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها را نیز به‌طور کامل برآورده می‌کنند.

کلیدواژگان: گرانش جرمدار جدید گسترش یافته، سیاهچاله‌ها، بارهای پایسته، فرمالیسم والد

مقدمه

پس از اینکه اینشتین نظریهٔ نسبیت عام خود را در سال 1916 [1] مطرح کرد علاقه‌مندی زیادی به‌سمت مطالعهٔ نظریهٔ میدان‌های کلاسیکی و حتی کوآنتومی در فضا-زمان خمیده و یا غیر تخت معطوف شد. در حقیقت، هنگامی که فضا-زمان خمیده است کمیت‌های فیزیکی محاسبه شده در فضای تخت بایستی به‌نحوی مقتضی بازتعریف شوند تا با اصل هموردایی عام در این نظریه در تطابق باشند. به‌عنوان مثال، یک جریان پایسته که در حضور یک تقارن سرتاسری در سیستم وجود دارد، به‌گونه‌ای باید اصلاح شود تا در فضای خمیده به‌طور هموردا پایسته بماند. اما تعریف کمیت‌های پایسته در نسبیت‌عام که تقارن سرتاسری وجود ندارد تقریباً به یک چالش تبدیل شده است و هنوز یک رهیافت کلی برای محاسبهٔ آنها از جریان‌های پایسته وجود ندارد. یک راه برای غلبه بر این مشکل تعریف کمیت‌های موضعی هستند که در ناحیهٔ مجانبی فضا-زمان تعریف می‌شوند و به آنها بارهای شبه-موضعی می‌گویند. توضیحات کامل دربارهٔ این مفهوم را می‌توان در مقالهٔ مروری [2] مشاهده کرد.

اولین تلاش‌ها برای محاسبهٔ جرم و اندازه حرکت یک سیستم در پس‌زمینه‌هایی که به‌طور مجانبی تخت می‌باشند در مراجع [3-7] انجام شده است و به فرمالیسم ADM موسوم می‌باشند. تعمیم این رهیافت به فضا-زمان‌هایی که به‌طور مجانبی آنتی دوسیته (AdS) هستند در مراجع [8و9] مطالعه شده است. همچنین بارهای پایسته برای این پس‌زمینه‌ها در حضور تصحیحات مرتبهٔ بالاتر از تانسورهای انحنای فضا-زمان

* نویسنده مسئول: d.mahdavian@hsu.ac.ir

محاسبه شده‌اند که به فرمالیسم ADT موسوم هستند [10]. روش دیگری که بر اساس فرمول‌بندی هامیلتونی از نظریه‌های هموردای عام است، فرمالیسم فضای فاز است [12و11] که در آن از طریق قضیهٔ نوتر[1] و یک انتگرال سطحی می‌توان بارهای پایسته را محاسبه کرد. این روش که توسط والد و همکاران در مراجع [15-13] معرفی شده است به فرمالیسم والد نیز مشهور است و برای هر پس‌زمینه‌ای در این‌گونه نظریه‌ها قابل استفاده است. در واقع فرمالیسم والد تعمیمی از رهیافت براون-یورک [16] از نسبیت عام به هر نظریهٔ ناوردای هموارریختی[2] برای محاسبهٔ کمیت‌های شبه‌موضعی می‌باشد.

از سوی دیگر، اگر چه نظریهٔ نسبیت عام همخوانی بسیار خوبی با اکثر پیش‌بینی‌های کلاسیکی دارد ولی در برخی موارد، به‌ویژه از دیدگاه کوآنتومی، دارای کاستی‌هایی است که نشان می‌دهند این نظریه بایستی اصلاح شود. مدل‌ها و نظریه‌های زیادی برای اصلاح و یا استخراج نظریه‌ای سازگار از نسبیت عام اینشتین معرفی شده‌اند که نمی‌توان همه موارد را ذکر کرد. باوجود این، یکی از مدل‌هایی که تقریباً می‌توان برخی از مفاهیم کوآنتومی این نظریه را به‌روشی آسان‌تر دنبال کرد مدل گرانش 3 بعدی است [18و17] که به‌دلیل ساختار توپولوژیکی ساده‌تر و حجم محاسبات کمتر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این مدل‌ها همچنین از دیدگاه نظریه‌های دوگانی و هولوگرافیکی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد [19].

گرانش 3بعدی توصیف شده با کنش اینشتین-هیلبرت به‌همراه جملهٔ ثابت کیهانی در سطح کلاسیکی درجات آزادی گراویتونی (یعنی موج گرانشی در ابعاد پایین‌تر) ندارد و به‌لحاظ کوآنتومی بازبهنجارپذیر نیست، بنابراین با افزودن تصحیحات مرتبهٔ بالاتر از مشتقات متریک می‌توان درجات آزادی گراویتونی تولید کرد. اولین مدل که با افزودن نمادهای کریستوفل پیشنهاد شد و شامل مشتقات مرتبهٔ سوم است، گرانش جرم‌دار توپولوژیکی است [21و20]. مدل پیشنهادی دیگر که شامل توان‌های مرتبهٔ دوم از تانسورهای ریچی است، مدل گرانش جرمدار جدید است [23و22]. اگرچه این نظریه شامل مشتقات مرتبهٔ بالاتر می‌باشد اما شامل میدان غیرفیزیکی شبه[3] نیست و پاریته زوج دارد. خطی‌سازی این نظریه حول جواب مینکوفسکی هم‌ارز با نظریهٔ پائولی-فیرز در 4 بعد است [24]. چون از دیدگاه گرانش کوآنتومی تصحیحات مرتبهٔ بالاتر گرانشی مهم واقع می‌شوند، بنابراین طبیعی است تا تعمیم نظریهٔ گرانش جدید را نیز مورد بررسی قرار دهیم. این ایده از نقطه‌نظر هولوگرافی انجام شده است [25] که با قضیهٔ c- در نظریهٔ میدان همدیس دوگان نظریهٔ گرانشی سازگاری دارد و به گرانش جرمدار جدید گسترش یافته (ENMG) موسوم می‌باشد. همچنین نشان داده شده که این تصحیحات در بسط یک نظریهٔ بورن-اینفلد گرانشی سازگار در 3 بعد تولید می‌شوند [26].

یکی از پیش‌بینی‌های مهم در نسبیت عام وجود جواب‌های سیاهچاله‌ای برای معادلات حرکت است. هاوکینگ و همکاران نشان دادند که سیاهچاله‌ها قوانین ترمودینامیکی شبیه به سیستم‌های ترمودینامیک معمولی را برآروده می‌کنند [27]. از این‌رو نه تنها از نظر کلاسیکی بلکه حتی از دیدگاه کوآنتومی بسیار مورد توجه‌اند. در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از فرمالیسم والد کمیت‌های پایستهٔ جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای را برای دو دسته از سیاهچاله‌های چرخان که جواب معادلات حرکت نظریهٔ ENMG هستند، محاسبه کنیم. دستهٔ اول سیاهچاله‌های BTZ هستند [28] که نه تنها جواب همهٔ مدل‌های گرانش 3 بعدی هستند بلکه در هندسهٔ نزدیک افق برخی سیاهچاله‌ها در نظریهٔ ریسمان و نظریه‌های ابعاد بالاتر نیز دیده می‌شوند [30و29].

[1] Noether
[2] Diffeomorphism
[3] Ghost

دستۀ دوم سیاهچاله‌های $WAdS_3$ هستند [31] که بیشتر جواب مدل‌های 3بعدی در حضور تصحیحات مرتبۀ بالاتر گرانشی بوده و در هندسۀ ابعاد بالاتر نیز حضور دارند [32]. همچنین نشان خواهیم داد که کمیت‌های فیزیکی به‌دست آمده یعنی جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای، به‌همراه آنتروپی و دیگر پارامترهای ترمودینامیکی در مورد هر جواب قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها و رابطۀ جرمی اسمار-گونه را برآورده می‌سازند.

به‌طور خاص در 3بعد، محاسبۀ بارهای پایسته برای ENMG از رهیافت دیگری موسوم به‌روش کلمنت [34و33] با معرفی یک بردار ابر-اندازه حرکت زاویه‌ای انجام شده است [35]، ولی در محاسبۀ اندازه حرکت زاویه‌ای از یک فرض برای برقراری قانون اول استفاده شده است که از عمومیت روش می‌کاهد. از روش کلمنت سیاهچاله‌های باردار نظریۀ ENMG نیز مطالعه شده‌اند [36]. نکتۀ قابل توجه این است که محاسبات انجام شده برای نظریۀ ENMG در این مقاله با مفاهیم بیان شده در مراجع [38و37] در مورد فرمالیسم والد در تطابق است ولی در این مقالات مدل‌های گرانش جرمدار توپولوژیکی، جدید و کمینه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، از این‌رو نتایج این مقاله یک مدل متفاوت را توصیف خواهد کرد.

بارهای پایسته از فرمالیسم والد

در این بخش خلاصه‌ای از مفاهیم اولیۀ این فرمالیسم در فضای n بعدی بیان خواهد شد و برای جزییات بیشتر می‌توان مرجع [37] را دنبال کرد. فرض کنید ξ یک بردار کیلینگ[1] است که تقارن‌های موضعی جواب را تولید می‌کند و روی افق کیلینگ صفر می‌شود. برای سیاهچاله‌ای با بردار کیلینگ دوشاخه، جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای به‌عنوان بارهای پایستۀ کانونیک در بی‌نهایت خوش رفتار خواهند بود.

برای یک نظریۀ ناوردای همورداریختی شامل میدان‌های فیزیکی Φ، وردش لاگرانژی n-فرم آن با رابطۀ زیر داده می‌شود:

$$\delta L = E_\Phi\, \delta\Phi + d\Theta\left(\Phi, \delta\Phi\right), \qquad 1$$

که $E_\Phi = 0$ معادلات حرکت است. متناظر با هر میدان برداری ξ می‌توان یک جریان نوتری (n-1)-فرم تعریف کرد

$$J_\xi = \Theta\left(\Phi, \mathfrak{I}_\xi \Phi\right) - \iota_\xi L, \qquad 2$$

Θ پتانسیل هم‌تافته (n-1)-فرم، $d\iota_\xi L = \xi \cdot L$ حاصلضرب داخلی و $\mathfrak{I}_\xi$ مشتق لی می‌باشند. با توجه به

$$dJ_\xi = d\Theta\left(\Phi, \mathfrak{I}_\xi \Phi\right) - d\iota_\xi L = -E_\Phi\, \mathfrak{I}_\xi \Phi, \qquad 3$$

مادامی‌که معادلات حرکت برآورده می‌شود جریان فوق بسته خواهد بود و داریم

$$J_\xi = dQ_\xi. \qquad 4$$

کمیت (n-2)-فرم Q_ξ را بار نوتری متناظر با بردار ξ می‌نامند. در نهایت می‌توان تغییرات هامیلتونی مزدوج به‌میدان برداری را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \delta dQ_\xi - d\iota_\xi \Theta = \oint_{\partial\Sigma} \delta Q_\xi - \iota_\xi \Theta\,, \qquad 5$$

که $\partial\Sigma$ مرز سطح کوشی است. اگر $\mathfrak{I}_\xi \Phi = 0$ آنگاه $\delta H_\xi = 0$ و سمت راست رابطۀ5 صفر خواهد بود. اکنون فرض کنید ξ بردار کیلینگ یک سیاهچالۀ ایستا است که افق کیلینگ را تولید می‌کند و روی یک سطح دوشاخه به نام H صفر می‌شود. حال اگر Σ دارای یک مرز داخلی در Hو یک مرز بیرونی در بینهایت فضایی باشد، داریم

$$\int_H \delta Q_\xi = \int_\infty \delta Q_\xi - \iota_\xi \Theta = \int_\infty \delta \Pi_\xi\,. \qquad 6$$

اگر تقارن‌های مجانبی به‌وسیلۀ میدان کیلینگ زیر مشخص شوند

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad 7$$

که Ω_H سرعت زاویه‌ای در افق رویداد سیاهچاله است، آنگاه انتگرال مرز بیرونی رابطۀ6 را می‌توان به‌شکل

[1] Killing vector

انرژی و اندازه حرکت کل سیاهچاله تعریف کرد و با مقایسه با قانون اول ترمودینامیک می‌توان نتیجه گرفت سمت چپ این رابطه ارتباط مستقیمی با آنتروپی سیاهچاله دارد، یعنی

$$S_{BH} = \frac{2\pi}{\kappa}\int_H Q_\xi \,, \qquad 8$$

که κ گرانش سطحی در افق رویداد سیاهچاله است. در سیاهچاله‌ها معمولاً انرژی کل با جرم آنها متناسب است، از این‌رو تعاریف مناسب برای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای این موجودات عبارتند از

$$\delta M = \frac{1}{8\pi G}\int_\infty \delta\Pi_\xi\left[\frac{\partial}{\partial t}\right], \qquad 9$$

$$\delta J = -\frac{1}{8\pi G}\int_\infty \delta\Pi_\xi\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\right]. \qquad 10$$

این کمیت‌ها در واقع همان بارهای پایستهٔ نوتری مربوط به سیاهچاله هستند که ما قصد داریم برای سیاهچاله های چرخان 3 بعدی این کمیت‌ها را در بخش‌های بعدی محاسبه کنیم.

گرانش جرم‌دار جدید گسترش یافته

نظریهٔ ENMG برای اولین بار براساس مفاهیم هولوگرافی در تناظر AdS/CFT [39] معرفی شد. در حقیقت، برای یک نظریهٔ گرانشی 3بعدی که شامل توان‌های باالتر از ناورداهای خمشی بوده و پاریتهٔ زوج را در نظریه حفظ می‌کنند، ضرایب این جملات به گونه‌ای تعیین می‌شوند که قضیهٔ-c در نظریهٔ 2بعدی دوگان هولوگرافیکی برقرار باشد [25]. کنش نظریهٔ ENMG با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{16\pi G}\int d^3x\, \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G}\,\Big\{R - 2\Lambda_0 \\ -\frac{1}{m^2}\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2\right) \\ -\frac{2}{3m^4}\left(R_\mu{}^\nu R_{\nu\rho}R^{\rho\mu} - \frac{9}{8}R\,R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{17}{64}R^3\right)\Big\}, \end{aligned} \qquad 11$$

که G ثابت گرانش نیوتنی و Λ_0 ثابت کیهانی در 3 بعد هستند و m یک پارامتر با بعد جرمی یک است. همچنین g دترمینان متریک فضا-زمان و $R_{\mu\nu}$و R هم تانسورهای انحنای ریچی و اسکالرریچی می‌باشند.

چون در فضا-زمان 3بعدی تانسور وایل صفر می‌شود، لذا تانسور ریمان از تانسورهای ریچی مستقل نمی‌باشد، برای همین لاگرانژی ENMG شامل توان‌های باالتر تانسور ریمان شبیه نظریهٔ گأوس-بونت در ابعاد باالتر نیست [40]. برای اینکه بخواهیم بارهای پایستهٔ مربوط به جواب‌های سیاهچاله‌ای معادلات حرکت این نظریه را از روش والد به‌دست آوریم باید لاگرانژین این نظریه را به‌شکل یک 3-فرم بنویسیم که شامل میدان‌های لورنتسی مختصاتی، اتصالی و یک سری میدان‌های کمکی 1-فرم است. نظریهٔ ENMG در فرمالیسم چرن-سایمونز با لاگرانژین زیر توصیف می‌شود [41]

$$\begin{aligned} L = e\cdot R + \frac{\Lambda_0}{6}\, e\cdot e\times e + \frac{1}{2m^2}\, e\cdot f\times f \\ -\frac{1}{m^4}\left(h\cdot De - \frac{1}{6} f\cdot f\times f + k\cdot\left(R + e\times f\right)\right), \end{aligned} \qquad 12$$

e^a میدان 1-فرم چارچوب فضا-زمانی(که در فضای 3بعدی دریبین[1] نامیده می‌شود)، ω^a میدان 1-فرم اتصالی و $\left\{f^a, h^a, k^a\right\}$ میدان‌های 1-فرم کمکی هستند. تانسورهای پیچشی لورنتسی و انحنای 2-فرم به‌ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$T(\omega) = De = de + \omega\times e, \quad R = d\omega + \frac{1}{2}\omega\times\omega. \qquad 13$$

در اینجا نمادهای " · " و " × " به‌ترتیب مربوط به حاصلضرب‌های داخلی و خارجی می‌باشند که با تانسور متریک مینکوفسکی $\eta_{ab} = (-,+,+)$ و تانسور لوی-چویتا ε_{abc} بیان می‌شوند. همچنین $a = 0,1,2$ اندیس‌های لورنتسی و $\mu = t,r,\varphi$ اندیس‌های فضا-زمانی هستند. اگر معادلهٔ لاگرانژی12 را نسبت به میدان‌های 1-فرم نظریه وردش دهیم معادلات حرکت زیر به‌دست می‌آیند:

[1] Dreibein

$$\begin{aligned} &De=0,\\ &R+e\times f=0,\\ &e\times k-\frac{1}{2}f\times f-m^2 e\times f=0,\\ &Dk+e\times h=0,\\ &R+\frac{\Lambda_0}{2}e\times e+\frac{1}{2m^2}f\times f-\frac{1}{m^4}(Dh+f\times k)=0. \end{aligned} \quad 14$$

معادلهٔ اول شرط بدون پیچش بودن فضا را مشخص می‌کند و می‌توان از روی آن با داشتن فریم مختصاتی e^a میدان اتصالی را محاسبه کرد. وردش این لاگرانژی یک جمله مشتق کلی دارد که پتانسیل هم‌تافته (n-1)-فرم زیر را تولید می‌کند:

$$\Theta=\delta\omega\cdot e-\frac{1}{m^4}\left(\delta e\cdot h+\delta\omega\cdot k\right). \quad 15$$

با توجه به رابطهٔ2 می‌توان یک جریان نوتری به‌شکل زیر پیدا کرد:

$$J_\xi=d\left(\iota_\xi\omega\cdot e-\frac{1}{m^4}\left(\iota_\xi e\cdot h+\iota_\xi\omega\cdot k\right)\right), \quad 16$$

بنابراین بار پایسته نوتری بر اساس معادلهٔ4 عبارت است از

$$Q_\xi=\iota_\xi\omega\cdot e-\frac{1}{m^4}\left(\iota_\xi e\cdot h+\iota_\xi\omega\cdot k\right). \quad 17$$

حال اگر بخواهیم تغییرات این بارها برای یک حل مورد نظر را تحت تبدیلات میدان برداری ξ بررسی کنیم، داریم

$$\begin{aligned} \delta\Pi_\xi=\delta Q_\xi-\iota_\xi\Theta=\iota_\xi\omega\cdot\delta e+\delta\omega\cdot\iota_\xi e\\ -\frac{1}{m^4}\left(\iota_\xi e\cdot\delta h+\delta e\cdot\iota_\xi h+\iota_\xi\omega\cdot\delta k+\delta\omega\cdot\iota_\xi k\right). \end{aligned} \quad 18$$

نکتهٔ قابل ذکر این است که در فضای 3بعدی انتگرال مرزی بارهای نوتری در روابط9 و 10 روی یک دایره به شعاع ثابت گرفته می‌شود. با حل معادلات 14 و جایگزاری میدان‌ها در رابطهٔ18 در بخش‌های بعدی بارهای پایسته سیاهچاله‌های چرخان 3 بعدی را به‌دست خواهیم آورد.

بارهای پایسته سیاهچاله BTZ

معروف‌ترین حل غیربدیهی معادلات حرکت مدل‌های گرانشی در 3 بعد سیاهچاله BTZ است [28]. شکل کلی المان طول در فضا-زمان اطراف این سیاهچاله در فرم ADM با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} ds_{BTZ}{}^2&=-F(r)^2dt^2+F(r)^{-2}dr^2\\ &+r^2\left(d\varphi+N(r)dt\right)^2, \end{aligned} \quad 19$$

توابع شعاعی مورد نظر عبارتند از

$$F=\sqrt{\frac{(r^2-r_+^2)(r^2-r_-^2)}{r^2\ell^2}},\quad N=-\frac{r_+r_-}{r^2\ell}, \quad 20$$

که r_+ و r_- به‌ترتیب افق‌های رویداد بیرونی و داخلی این سیاهچاله می‌باشند. هندسهٔ این سیاهچاله به‌طور مجانبی ایزومتری فضای AdS_3 را دارد که شعاع این فضا با پارامتر ℓ داده می‌شود، از این‌رو در مطالعات هولوگرافی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد.

مؤلفه‌های میدان دریبین با توجه به معادلهٔ متریک19 و رابطهٔ $g_{\mu\nu}=\eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b$ به‌دست می‌آیند

$$e^0=F\,dt,\ \ e^1=F^{-1}dr,\ \ e^2=r\left(d\varphi+N\,dt\right). \quad 21$$

مؤلفه‌های میدان اتصالی نیز از شرط صفر بودن پیچش در 13 و 14 به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\omega^0=\frac{1}{2}rN'e^0+\frac{F}{r}e^2,\\ &\omega^1=\frac{1}{2}rN'e^1,\\ &\omega^2=F'e^0-\frac{1}{2}rN'e^2, \end{aligned} \quad 22$$

که علامت پرایم مشتق نسبت به‌مختصهٔ شعاعی r است. با جانشین کردن توابع20 و با استفاده از تعریف انحنای 2-فرم R^a در رابطهٔ13 داریم

$$\begin{aligned} &R^0=\frac{1}{\ell^2}e^1\wedge e^2,\ \ R^1=-\frac{1}{\ell^2}e^2\wedge e^0,\\ &R^2=-\frac{1}{\ell^2}e^0\wedge e^1. \end{aligned} \quad 23$$

از حل معادلات حرکت دوم، سوم و چهارم در معادلهٔ14 به‌ترتیب میدان‌های 1-فرم کمکی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$f^a=\frac{1}{2\ell^2}e^a,\ \ k^a=\left(\frac{1}{8\ell^2}+\frac{m^2}{2\ell^2}\right)e^a,\ \ h^a=0. \quad 24$$

با جانشینی میدان‌های24 در رابطهٔ آخر14 ارتباط میان ثابت کیهانی و دیگر پارامترهای ثابت نظریه حاصل می‌شود

$$\Lambda_0 = -\frac{8m^4\ell^4 + 2m^2\ell^2 + 1}{8m^4\ell^6}, \quad 25$$

منفی بودن مقدار ثابت کیهانی نشان می‌دهد که سیاهچالهٔ BTZ یک فضای AdS گونه است.

تغییرات بارهای پایستهٔ کانونی به‌ازای تبدیلات تقارنی تولید شده با میدان برداری ξ مربوط به این سیاهچاله در نظریهٔ ENMG با جایگزاری میدان‌ها در رابطهٔ18 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

26

$$\delta\Pi_\xi = \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4}\right)\left(\iota_\xi\omega\cdot\delta e + \delta\omega\cdot\iota_\xi e\right).$$

برای محاسبهٔ کمیت‌های پایسته در مرز سطح کوشی کافیست تنها مؤلفهٔ $d\varphi$ را محاسبه کنیم، بنابراین

$$\delta\omega^0 = \delta F\, d\varphi, \quad \delta\omega^2 = -\frac{1}{2}r^2\delta N' d\varphi. \quad 27$$

همچنین ضرب‌های داخلی به‌ازای $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ می‌شوند

$$\begin{aligned}&\iota_\xi e^0 = F, \quad \iota_\xi e^2 = rN,\\ &\iota_\xi\omega^0 = F\left(N + \frac{1}{2}rN'\right),\\ &\iota_\xi\omega^2 = FF' - \frac{1}{2}r^2NN',\end{aligned} \quad 28$$

و برای $\xi = \frac{\partial}{\partial\varphi}$

$$\iota_\xi e^2 = r, \quad \iota_\xi\omega^0 = F, \quad \iota_\xi\omega^2 = -\frac{1}{2}r^2N'. \quad 29$$

با استفاده از روابط 29-26 تغییرات بار به‌ازای بردارهای کیلینگ انتقالی و دورانی در روابط9 و 10 به‌ترتیب با عبارت‌های زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\delta\Pi_\xi = \left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4}\right)(r_+\delta r_+ + r_-\delta r_-)\,d\varphi,\\ &\delta\Pi_\xi = -\left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4}\right)(r_+\delta r_- + r_-\delta r_+)d\varphi.\end{aligned} \quad 30$$

اکنون با یک انتگرال‌گیری ساده می‌توان جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای را به‌عنوان بارهای پایستهٔ سیاهچاله BTZ به‌دست آورد

$$\begin{aligned}&M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8G\ell^2}\left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4}\right),\\ &J = \frac{r_+ r_-}{4G\ell}\left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4}\right).\end{aligned} \quad 31$$

در این محاسبه دو نوع انتگرال‌گیری انجام شده است، یکی به‌ازای تغییرات r_+ و r_- و دیگری برای زاویهٔ φ می‌باشد. آنتروپی این سیاهچاله نیز به‌ازای بردار کیلینگ در افق رویداد بیرونی که با رابطهٔ7 داده شده قابل محاسبه است

$$S_{BH} = \frac{\pi r_+}{2G}\left(1 - \frac{1}{2m^2\ell^2} - \frac{1}{8m^4\ell^4}\right), \quad 32$$

که در آن از کمیت‌های ترمودینامیکی زیر یعنی سرعت زاویه‌ای و دمای هاوکینگ در افق رویداد استفاده شده است [42]

$$\begin{aligned}&T_H = \frac{F'}{4\pi}\bigg|_{r=r_+} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi\ell^2 r_+},\\ &\Omega_H = -N\big|_{r=r_+} = \frac{r_-}{\ell r_+}.\end{aligned} \quad 33$$

این کمیت‌ها به‌همراه پارامترهای فیزیکی به‌دست آمده در روابط31 و 32 رابطهٔ اسمار [43] برای محاسبهٔ جرم سیاهچاله را به‌صورت زیر ارضا می‌کنند:

$$M = \frac{1}{2}S_{BH}T_H + \Omega_H J. \quad 34$$

معمولاً تفاوت میان جواب خلأ نظریه و جواب سیاهچاله به‌پارامترهای فیزیکی آن مرتبط می‌باشد که این وابستگی با توجه به‌رابطه‌های31 و 32 تابعی از مکان افق‌های رویداد داخلی و بیرونی می‌باشد. با توجه به این نکته می‌توان نشان داد که کمیت‌های مورد نظر قانون اول ترمودینامیک سیاهچاله‌ها را با وردش آنها نسبت به r_+ و r_- به‌شکل زیر برآورده می‌سازند

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M}{\partial r_+} - T_H\frac{\partial S_{BH}}{\partial r_+} + \Omega_H\frac{\partial J}{\partial r_+} = 0,\\ &\frac{\partial M}{\partial r_-} - T_H\frac{\partial S_{BH}}{\partial r_-} + \Omega_H\frac{\partial J}{\partial r_-} = 0.\end{aligned} \quad 35$$

بارهای پایسته سیاهچاله $\mathbf{WAdS_3}$

دسته‌ای دیگر از جواب‌های معادلات حرکت مدل‌های گرانش سه بعدی که شامل مشتقات مرتبهٔ

بالاتر می‌باشند، سیاهچاله $WAdS_3$ است [44و31]. برخلاف سیاهچاله BTZ این نوع جواب دارای ایزومتری مجانبی AdS_3 نیست و به‌واسطهٔ یک عامل پیچشی هندسهٔ آن تابدار است، با وجود این همانند آن دارای چرخش است و در مطالعات هولوگرافی دارای اهمیت است [45]. فضا-زمان اطراف این سیاهچاله با متریک زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{ds^2_{WAdS}}{\ell^2} = -F^2dt^2 + \frac{dr^2}{4F^2K^2} + K^2\left(d\varphi + N\,dt\right)^2, \quad 36$$

که توابع شعاعی با عبارت‌های زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{\left(\nu^2+3\right)\left(r-r_+\right)\left(r-r_-\right)}{4K^2}, \\ N &= \frac{2\nu r - \sqrt{(\nu^2+3)\,r_+ r_-}}{2K^2}, \\ K^2 &= \frac{r}{4}\Big[3\left(\nu^2-1\right) + \left(\nu^2+3\right)\left(r_+ + r_-\right) \\ &\qquad - 4\nu\sqrt{(\nu^2+3)\,r_+ r_-}\Big], \end{aligned} \quad 37$$

r_+ و r_- محل افق‌های بیرونی و داخلی بوده و ν پارامتر ثابتی است که میزان تابیدگی فضای AdS را مشخص می‌کند. جزئیات بیشتر در مورد ویژگی‌ها و ساختار علی فضا-زمان این جواب در [42و33] آمده است. میدان‌های دریبین برای این حل را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$e^0 = \ell F dt, \quad e^1 = \frac{\ell dr}{2FK}, \quad e^2 = \ell K\left(d\varphi + N\,dt\right). \quad 38$$

چون نظریهٔ ENMG ناوردای هموارریختی می‌باشد و معادلات حرکت همچنان با رابطهٔ14 داده می‌شوند، می‌توانیم از شرط بدون پیچش میدان‌های اتصالی را برای این جواب هم محاسبه کنیم

39

$$\omega^0 = W_1 e^0 + W_2 e^2, \quad \omega^1 = W_3 e^1, \quad \omega^2 = W_4 e^2 + W_5 e^0,$$

که برای مقاصد بعدی و ساده نویسی ضرایب W_1 تا W_5 به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

40

$$W_1 = W_3 = -W_4 = \frac{K^2N'}{\ell}, \quad W_2 = \frac{2FK'}{\ell}, \quad W_5 = \frac{2KF'}{\ell}.$$

مؤلفه‌های لورنتسی تانسور انحنای هندسهٔ $WAdS_3$ با استفاده از میدان اتصالی فوق و رابطهٔ13 عبارتند از

$$\begin{aligned} R^0 &= \frac{4}{\ell^2}\left(\frac{(K^2N')^2}{4} + KF(K'F)' + (FK')^2\right)e^1\wedge e^2 \\ &\quad + \frac{4}{\ell^2}\left(\frac{KF(K^2N')'}{2} + K'FK^2N'\right)e^1\wedge e^0, \\ R^1 &= -\frac{4}{\ell^2}\left(\frac{(K^2N')^2}{4} + KK'FF'\right)e^2\wedge e^0, \\ R^2 &= \frac{4}{\ell^2}\left(\frac{3(K^2N')^2}{4} - KF(KF')' - (F'K)^2\right)e^0\wedge e^1 \\ &\quad - \frac{4}{\ell^2}\left(\frac{KF(K^2N')'}{2} + K'FK^2N'\right)e^1\wedge e^2. \end{aligned} \quad 41$$

از دومین معادلهٔ حرکت در 14 و رابطهٔ41 می‌توان میدان کمکی 1-فرم f^a را برحسب مؤلفه‌های میدان دریبین نوشت

42

$$f^0 = U_1 e^0 + U_2 e^2, \quad f^1 = U_3 e^1, \quad f^2 = U_4 e^2 + U_5 e^0,$$

طوری‌که

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{2}{\ell^2}\Bigg(\frac{3(K^2N')^2}{4} + (KK')'F^2 \\ &\qquad - KFK'F' - K^2(FF'' + F'^2)\Bigg), \\ U_2 &= -\frac{2}{\ell^2}\left(K^2F(4K'N' + KN'')\right), \\ U_3 &= -\frac{2}{\ell^2}\Bigg(\frac{3(K^2N')^2}{4} - (KK')'F^2 \\ &\qquad - KFK'F' - K^2(FF'' + F'^2)\Bigg), \\ U_4 &= \frac{2}{\ell^2}\Bigg(\frac{5(K^2N')^2}{4} + (KK')'F^2 \\ &\qquad + KFK'F' - K^2(FF'' + F'^2)\Bigg), \\ U_5 &= -U_2. \end{aligned} \quad 43$$

میدان‌های 1-فرم دیگر نیز پس از محاسباتی سخت و طاقت فرسا به‌صورت زیر از معادلات حرکت به‌دست می‌آیند. بنابراین برای میدان کمکی h^a داریم

$$h^0 = Y_1 e^0 + Y_2 e^2, \quad h^1 = Y_3 e^1, \quad h^2 = Y_4 e^2 + Y_5 e^0, \quad 44$$

که به‌عنوان مثال تنها یک ضریب در اینجا به نمایش گذاشته شده است، یعنی

$$
\begin{aligned}
Y_1 = \frac{1}{8\ell^2}\Big(&32K^3K'F^2F'F''-40K^5K''F^2N'^2\\
&-24K^6FF''N'^2-32K^2K'K''F^3F'\\
&+16K^6F^2N''^2+32K^3K''F^3F''\\
&+32K^3K''F^2F'^2+32K^2K'^2F^3F''\\
&-96KK'^2K''F^4+128K^5K'F^2N'N''\\
&+16K^4F^2F''^2+32K^3K'FF'^3\\
&-48K^2K''^2F^4+32K^4FF''F'^2\\
&+48K^2F^2K'^2F'^2-24K^6F'^2N'^2\\
&-32KK'^3F^3F'-24K^5K'FF'N'^2\\
&+9K^8N'^4+216K^4K'^2F^2N'^2\\
&-48K'^4F^4+16K^4F'^4\Big)\\
+\frac{m^2}{8\ell^2}\Big(&16K^2FF''-16KK''F^2+16K^2F'^2\\
&-12K^4N'^2-16K'^2F^2+16KK'FF'\Big),
\end{aligned}
$$
45

و همچنین برای میدان k^a

$$k^0=P_1e^0+P_2e^2,\ k^1=P_3e^1,\ k^2=P_4e^2+P_5e^0,$$
46

تنها یکی از ضرایب را به‌عنوان مثال آورده‌ایم

47

$$
\begin{aligned}
P_1=\frac{2K^2}{\ell^2}\Big(&7K^6F'^2N'^3-56K^4K'^2F^2N'^3+12K^3K'FF'^3N'\\
&+112KK'^3F^3F'N'-8K^5K'FF'N'^3+48K'^4F^4N'\\
&-3K^8N'^5-4K^4F'^4N'+16K^2K''^2F^4N'-4K^4F^2F''^2N'\\
&+32KK'^3F^4N''+4K^4FF'^3N''+80K^2K'K''F^3F'N'\\
&+4K^2K'^2F^4N'''+4K^4F^3F'''N''+16K^3K''F^3F'N''\\
&+4K^3K'''F^4N''+116K^2K'^2F^2F'^2N'+4K^4F^2F'^2N'''\\
&+16K^4F^2F'F''N''-16K^5K''F^2N'^3+112KFF''F'^2N'\\
&+100K^2K'^2F^3F''N'+112KK''K'^2F^4N'+7K^6FF''N'^3\\
&-8K^4FF''F'^2N'+44K^2K'K''F^4N''+16K^2K'K'''F^4N'\\
&+44K^3K'F^3F''N''+60K^3K'F^2F'F''N'-8KK''F^2N'\\
&-44K^5K'F^2N'^2N''-3K^6FF'N'^2N''+4K^3K''F^4N'''\\
&+4K^3K'F^3F'N'''+16K^3K'^2F^3F'''N'-3K^6F^2N'^2N'''\\
&-4K^6F^2N'N''+20K^3K''F^2F'^2N'+20K^3K''F^3F''N'\\
&+48K^2K'^2F^3F'N''+48K^3K'F^2F'^2N''\Big)\\
+\frac{2m^2K^2}{\ell^3}\Big(&2K^4N'^3-2K^2F'^2N'+24K'^2F^2N'\\
&+8KK'FF'N'+16KK'F^2N''+2K^2FF'N''\\
&+2K^2F^2N'''+8KK''F^2N'+2K^2FF''N'\Big),
\end{aligned}
$$

با جای‌گذاری میدان‌های 47-38 در آخرین معادلهٔ حرکت 14 داریم

48

$$
\begin{aligned}
&v^2=\frac{6}{7}+\frac{10m^2\ell^2}{21}+\frac{1}{42}\Delta,\\
&\Lambda_0=-\frac{1}{37044m^4\ell^6}\Big[\big(592m^4\ell^4-5402m^2\ell^2+1215\big)\Delta\\
&\qquad+8648m^6\ell^6+57132m^4\ell^4-12150m^2\ell^2-32805\Big],
\end{aligned}
$$

که برای ساده نویسی عبارت مقابل را انتخاب می‌کنیم $\Delta=\sqrt{232m^4\ell^4+1188m^2\ell^2+729}$.

اکنون برای ضرب‌های داخلی میدان‌ها به‌ازای $\xi=\frac{\partial}{\partial t}$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\iota_\xi e^0=\ell F,\quad \iota_\xi\omega^0=\ell FW_1+\ell KNW_2,\\
&\iota_\xi e^2=\ell KN,\ \ \iota_\xi\omega^2=\ell KNW_4+FW_5,
\end{aligned}
$$
49

و همین‌طور

$$
\begin{aligned}
&\iota_\xi f^0=\ell FU_1+\ell KNU_2,\quad \iota_\xi f^2=\ell KNU_4+FU_5,\\
&\iota_\xi h^0=\ell FY_1+\ell KNY_2,\quad \iota_\xi h^2=\ell KNY_4+FY_5,\\
&\iota_\xi k^0=\ell FP_1+\ell KNP_2,\quad \iota_\xi k^2=\ell KNP_4+FP_5\ .
\end{aligned}
$$
50

به‌طور مشابه برای بردار $\xi=\frac{\partial}{\partial\varphi}$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\iota_\xi e^2=\ell K,\quad \iota_\xi\omega^0=\ell KW_2,\ \ \iota_\xi\omega^2=\ell KW_4,\\
&\iota_\xi f^0=\ell KU_2,\ \ \iota_\xi f^2=\ell KU_4,\\
&\iota_\xi h^0=\ell KY_2,\ \ \iota_\xi h^2=\ell KY_4,\\
&\iota_\xi k^0=\ell KP_2,\ \ \iota_\xi k^2=\ell KP_4.
\end{aligned}
$$
49

وردش میدان‌ها که به‌مؤلفهٔ $d\varphi$ مربوط می‌باشند به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\delta e^0=0,\ \ \delta e^2=\ell\delta K\,d\varphi,\\
&\delta\omega^0=\ell\delta(KW_2)\,d\varphi,\quad \delta\omega^2=\ell\delta(KW_4)\,d\varphi,\\
&\delta f^0=\ell\delta(KU_2)\,d\varphi,\quad \delta f^2=\ell\delta(KU_4)\,d\varphi,\\
&\delta h^0=\ell\delta(KY_2)\,d\varphi,\quad \delta h^2=\ell\delta(KY_4)\,d\varphi,\\
&\delta k^0=\ell\delta(KP_2)\,d\varphi,\quad \delta k^2=\ell\delta(KP_4)\,d\varphi.
\end{aligned}
$$
50

اکنون با محاسبهٔ $\delta\Pi_\xi$ برحسب تغییرات میدان‌ها و ضرب‌های داخلی به‌دست آمده و جانشینی 37 می‌توان کمیت‌های جرم و اندازه‌حرکت زاویه‌ای سیاهچاله $WAdS_3$ در نظریهٔ ENMG را به‌دست آورد. بر این اساس داریم

$$
\begin{aligned}
&M=\frac{2v(v^2+3)\,\Xi}{G}\left(v\big(r_++r_-\big)-\sqrt{(v^2+3)r_+r_-}\right),\\
&J=\frac{v\ell(v^2+3)\,\Xi}{2G}\Big[\left(v\big(r_++r_-\big)-\sqrt{(v^2+3)r_+r_-}\right)^2\\
&\qquad-v^2\big(r_+-r_-\big)^2\Big],
\end{aligned}
$$
51

که پارامتر ثابت Ξ به‌شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Xi=\frac{16v^2+3-\sqrt{232v^4+168v^2-45}}{\left(20v^2-3-\sqrt{232v^4+168v^2-45}\right)^2}. \qquad 52$$

آنتروپی این سیاهچاله نیز به‌ازای بردار کیلینگ در افق رویداد بیرونی محاسبه می‌شود، بنابراین

$$S_{BH}=\frac{16\pi v^2\ell\,\Xi}{G}\left(2vr_+-\sqrt{(v^2+3)\,r_+r_-}\right), \qquad 53$$

که در آن از کمیت‌های ترمودینامیکی زیر یعنی سرعت زاویه‌ای و دمای هاوکینگ در افق رویداد استفاده شده است [44]

$$\begin{aligned}T_H&=\frac{1}{2\pi\ell}\sqrt{g^{rr}}\,\partial_r F\big|_{r=r_+}\\&=\frac{(v^2+3)}{4\pi\ell}\frac{r_+-r_-}{\left(2vr_+-\sqrt{(v^2+3)\,r_+r_-}\right)},\\ \Omega_H&=\frac{1}{\ell}N\big|_{r=r_+}=\frac{2}{\ell\left(2vr_+-\sqrt{(v^2+3)\,r_+r_-}\right)}.\end{aligned} \qquad 54$$

برای این سیاهچاله نیز کمیت‌های فیزیکی به‌دست آمده در رابطه‌های 54-51 در رابطۀ اسمار-گونه جرمی زیر صدق می‌کنند

$$M=S_{BH}T_H+2\Omega_H J. \qquad 55$$

همچنین آنها قانون اول ترمودینامیک را براساس رابطه‌های35 برآورده می‌سازند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله جرم و اندازه‌حرکت زاویه‌ای سیاهچاله‌های چرخان BTZ و $WAdS_3$ را به‌عنوان دو جواب در نظریۀ ENMG محاسبه نمودیم. چون نظریۀ ENMG با یک لاگرانژین ناورداری هموارریختی توصیف می‌شود ما از فرمالیسم والد برای محاسبۀ این کمیت‌ها استفاده کردیم. در حقیقت، جرم و اندازه‌حرکت زاویه‌ای در این روش از انتگرال‌گیری یک بار نوتری روی فضای مرزی مجانبی در بی‌نهایت و با انتخاب مناسب برای بردار کیلینگ به‌دست آمد. نتایج به‌دست آمده برای این کمیت‌ها به‌ترتیب با رابطه‌های31 و 51 توصیف می‌شوند. اگرچه نتایج به‌دست آمده برای این سیاهچاله‌ها با مقادیر محاسبه شده از رهیافت کلمنت در [36و35] همخوانی دارد ولی بایستی دقت شود که محاسبات بر اساس فرمالیسم والد به‌صورت کلی بوده و هیچ‌گونه قیدی را ندارد، حال آنکه کمیت‌های به‌دست آمده در رهیافت کلمنت با یک قید به‌منظور برآورده شدن قانون اول ترمودینامیک محاسبه می‌شوند [34]. نشان دادیم بارهای پایستۀ این سیاهچاله‌ها از فرمالیسم والد نه تنها در رابطه‌های جرمی اسمار صدق می‌کردند بلکه قانون اول ترمودینامیک را نیز بدون هیچ شرطی برآورده می‌ساختند. اهمیت دیگر روش والد اینست که می‌توان آنرا به ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد ولی روش کلمنت فقط برای فضا-زمان سه بعدی است. کمیت‌های M و J در نظریۀ ENMG می‌تواند در مطالعۀ قانون حاصلضربی آنتروپی‌های این سیاهچاله‌ها [46] و رهیافت ترمودینامیکی برای محاسبه کمیت‌های CFT دوگان به آنها [47] مفید واقع شود.

سپاس‌گزاری

از همکاری و هم‌فکری ارزشمند دکتر حنیف گلچین در گام‌های اولیۀ مقاله کمال تشکّر را دارم.

مرجع‌ها

[1] A. Einstein, *Die* Grundlage *der* allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik Ser* 4 **49** (1916) 769-822. https://doi.org/10.1002/andp.19163540702

[2] L.B. Szabados, Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity, *Living reviews in relativity* ***12.1*** (2009) 1-163. http://doi.org/10.12942/lrr-2004-4

[3] A. Komar, Covariant conservation laws in general relativity, *Physical Review* **113** (1959) 934–936. https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.934

[4] R.L. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity, *Physical Review* ***116*** (1959) 1322-1330. https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322

[5] R.L. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, Canonical variables for general relativity, *Physical Review* ***117*** (1960) 1595–1602. https://doi.org/10.1103/PhysRev.117.1595

[6] H. Bondi, M.G.J. van der Burg, A.W.K. Metzner, Gravitational waves in general relativity 7 Waves from axisymmetric isolated systems, *Proceedings of The Royal Society London A* ***269*** (1962) 21–52. https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0161

[7] R. Sachs, Asymptotic symmetries in gravitational theory, *Physical Review* ***128*** (1962) 2851–2864. https://doi.org/10.1103/PhysRev.128.2851

[8] L.F. Abbott, S. Deser, Stability of gravity with a cosmological constant, *Nuclear Physics B* ***195*** (1982) 76. https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90049-9

[9] A. Ashtekar, A. Magnon, Asymptotically anti-de Sitter space-times, *Classical and Quantum Gravity* ***1*** (1984) L39–L44. https://doi.org/10.1088/0264-9381/1/4/002

[10] S. Deser, B. Tekin, Gravitational energy in quadratic curvature gravities, *Physical Review Letters* ***89*** (2002) 101101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.101101

[11] A. Ashtekar, L. Bombelli, R. Koul, Phase space formulation of general relativity without a 3+1 splittin, *Lecture Notes in Physics* ***278*** (1987) 356–359. https://doi.org/10.1007/3-540-17894-5-378

[12] G. Barnich, F. Brandt, Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charge, *Nuclear Physics B* ***633*** (2002) 3–82.

[13] J. Lee, R.M. Wald, Local symmetries and constraints, *Journal of Mathematical Physics* ***31*** (1990) 725–743. https://doi.org/10.1063/1.528801

[14] R.M. Wald, Black hole entropy is the Noether charge, *Physical Review D* ***48*** (1993) 3427-3431. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.R3427

[15] V. Iyer, R.M. Wald, Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy, *Physical Review D* ***50*** (1994) 846-864. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.846

[16] J.D. Brown, J.W. York, Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action, *Physical Review D* ***47*** (1993) 1407–1419. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1407

[17] H. Leutwyler, A 2+1 Dimensional Model For The Quantum Theory Of Gravity, *Nuovo Cimento A* ***42*** (1966) 159-178. https://doi.org/10.1007/BF02856201

[18] S. Carlip, Conformal Field Theory, (2+1) dimensional Gravity, and the BTZ Black hole, *Classical and Quantum Gravity* ***22*** (2005) 85-124. https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/12/R01

[19] E. witten, 2+1 dimensional gravity as an exactly solvable system, *Nuclear Physics B* ***311*** (1988) 46-78. https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90143-5

[20] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Three-Dimensional Massive Gauge Theories, *Physical Review Letters* ***48*** (1982) 975. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.975

[21] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Topologically massive gauge theories, *Annals of Physics* ***140*** (1982) 372. https://doi.org/10.1006/aphy.2000.6013

[22] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, Massive Gravity in Three Dimensions, *Physical Review Letters* ***102*** (2009) 201301. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.201301

[23] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, More on Massive 3D Gravity, *Physical Review D* ***79*** (2009) 124042. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.124042

[24] M. Fierz, W. Pauli, On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an

[33] G. Clement, Particle-like solutions to topologically massive gravity, *Classical and Quantum Gravity* ***11*** (1994) L115. https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/9/001

[34] G. Clement, Black hole mass and angular momentum in 2+1 gravity, *Physical Review D* ***68*** (2003) 024032. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.024032

[35] S. Nam, J.D. Park, S.H. Yi, AdS Black Hole Solutions in the Extended New Massive Gravity, *Journal of High Energy Physics* ***07*** (2010) 058. https://doi.org/10.1007/JHEP07(2010)058

[36] A. Ghodsi, D.M. Yekta, On asymptotically AdS-like solutions of three dimensional massive gravity, *Journal of High Energy Physics* ***06*** (2012) 131. https://doi.org/10.1007/JHEP06(2012)13

[37] S. Nam, J.D. Park, Mass and angular momentum of black holes in 3D gravity theories with first order formalism, *European Physical Journal C* ***78*** (2018) 535. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6016-5

[38] S. Nam, J.D. Park, Warped AdS_3 black hole in minimal massive gravity with first order formalism, *Physical Review D* ***98*** (2018) 124034. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.124034

[39] J.M. Maldacena, the large N limit of superconformal field theories and supergravity, *International Journal of Theoretical Physics* ***38*** (1999) 1113. https://doi.org/10.1023/A:1026654312961

[40] D. Lovelock, The Einstein tensor and its generalizations, *Journal of Mathematical Physics* ***12*** (1971) 498–501. https://doi.org/10.1063/1.1665613

[41] H. Afshar, E.A. Bergshoeff, W. Merbis, Extended massive gravity in three dimensions, *Journal of High Energy Physics* **08** (2014) 115. https://doi.org/10.1007/JHEP08(2014)115

[42] S. Carlip, The (2+1)-dimensional black hole, *Classical and Quantum Gravity* **12** electromagnetic field, *Proceedings of The Royal Society London A* ***173*** (1939) 211. https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0140

[25] A. Sinha, on the new massive gravity and AdS/CFT, *Journal of High Energy Physics* **06** (2010) 061. https://doi.org/10.1007/JHEP06(2010)061

[26] I. Gullu, T.C. Sisman, B. Tekin, Born-Infeld extension of new massive gravity, *Classical and Quantum Gravity* ***27*** (2010) 162001. https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/16/162001

[27] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, the four laws of black hole mechanics, *Communications in mathematical physics* ***31*** (1973) 161-170. http://doi.org/10.1007/BF01645742

[28] M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli, Black hole in three-dimensional spacetime, *Physical Review Letters* ***69*** (1992) 1849. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849

[29] K. Sfetsos, K. Skenderis, Microscopic derivation of the Bekenstein-Hawking entropy formula for non-extremal black hole, *Nuclear Physics B* ***517*** (1998) 179-204. https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00023-6

[30] R. Emparan, G.T. Horowitz, R.C. Myers, Exact description of black holes on branes II: comparison with BTZ black holes and black strings, *Journal of High Energy Physics* ***01*** (2000) 021. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2000/01/021

[31] K.A. Moussa, G. Clement, C. Leygnac, The black holes of topologically massive gravity, *Classical and Quantum Gravity* **20** (2003) L277. https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/24/L01

[32] S. Detournay, D. Israel, J.M. Lapan, M. Romo, String theory on Warped AdS3 and Virasoro Resonances, *Journal of High Energy Physics* ***01*** (2011) 030. https://doi.org/10.1007/JHEP01(2011)030

(1995) 2853-2879. https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/005

[43] L. Smarr, Mass formula for Kerr black holes, *Physical Review Letters* ***30*** (1973) 71. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.71

[44] D. Anninos, W. Li, M. Padi, W. Song, A. Strominger, Warped AdS_3 Black holes, *Journal of High Energy Physics* ***03*** (2009) 130. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/03/130

[45] S. Detournay, T. Hartman, D. Hofman, Warped conformal field theory, *Physical Review D* ***86*** (2012) 124018. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2015.05.01

[46] M. Cvetic, G.W. Gibbons, C.N. Pope, Universal Area Product Formulas for Rotating and Charged Black Holes in Four and Higher Dimensions, *Physical Review Letters* ***106*** (2011) 121301. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.121301

[47] B. Chen, Z. Xue, J.J. Zhang, Note on thermodynamics method of black hole/CFT correspondence, *Journal of High Energy Physics* ***03*** (2013) 102. https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)102