

# Thermodynamic geometry of a charged AdS black hole with corrected entropy

Saheb Soroushfar<sup>\*1</sup>, Behnam Pourhassan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Technology and Mining, Yasouj University, Choram 75761-59836, Iran

<sup>2</sup>School of Physics, Damghan University, Damghan, 3671641167, Iran

Received: 02.11.2020    Final revised: 03.07.2021    Accepted: 03.08.2021

Doi link: [10.22055/JRMBS.2021.17029](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17029)

## Abstract

In this paper, a charged AdS black hole is considered and exponential corrections on entropy are studied for it. Next, thermodynamic quantities of this black hole, including mass, temperature, heat capacity, as well as pressure and Gibbs free energy, are investigated. Then, the thermodynamic geometry of this black hole is investigated using the geometric methods of Weinhold, Ruppeiner, Quevedo, HPEM and NTG. In addition, the correspondence between singularities of the scalar curvature of these metrics and the black hole phase transition points is investigated. It has been observed that Quevedo (II), HPEM and NTG formalisms provide more information about the phase transition of this black hole compared with Weinhold, Ruppeiner and Quevedo (I) formalisms.

**Keywords:** Black hole, Thermodynamics, Thermodynamic geometry, Phase transition

---

\*Corresponding Author: soroush@yu.ac.ir



## هندسه ترمودینامیک سیاهچاله AdS باردار با آنتروپی تصحیح یافته

صاحب سروش فر<sup>1\*</sup>، بهنام پورحسن<sup>2</sup>

<sup>1</sup>دانشکده صنعت و معدن، دانشگاه یاسوج، چرام 75761-59836، ایران

<sup>2</sup>گروه فیزیک هسته‌ای و ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان، کدپستی 3671641167، دامغان، ایران

دریافت: 1399/08/12 ویرایش نهائی: 1400/04/12 پذیرش: 1400/05/12

Doi link: [10.22055/JRMBS.2021.17029](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17029)

### چکیده

در این مقاله، سیاهچاله پاد دو سیه (AdS) باردار در نظر گرفته شده و تصحیحات نمایی آنتروپی آن مطالعه شده است. پس از آن، کمیت‌های ترمودینامیکی این سیاهچاله شامل جرم، دما، ظرفیت گرمایی و همچنین فشار و انرژی آزاد گیبس، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. سپس، هندسه ترمودینامیک این سیاهچاله به کمک روش‌های هندسی وینهلد، راپینر، کوودو، اچ پی ای ام و ان تی جی، بررسی شده است. علاوه بر این، تناظر بین تکنیکی‌های خمش متریک‌های هندسی و نقاط گذار فاز سیاهچاله، مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده شده است که فرمالیسم‌های کوودو (II)، اچ پی ای ام و ان تی جی، اطلاعات کاملتری را در خصوص نقاط گذار فاز این سیاهچاله نسبت به فرمالیسم‌های وینهلد، راپینر و کوودو (I)، ارائه می‌دهند.

**کلیدواژگان:** سیاهچاله، ترمودینامیک، هندسه ترمودینامیک، گذار فاز

### مقدمه

سیاهچاله‌ها کاملاً وابسته به تاریخچه گرانش کوآنتومی است. تاریخچه ترمودینامیک سیاهچاله‌ها با مقالات تولمن<sup>1</sup> [3 و 4]، اپنهايمر<sup>2</sup> و وُلکف<sup>3</sup> [5]، بکنشتاین<sup>4</sup> [6] و باردین<sup>5</sup> و همکاران [7]، شروع می‌شود. تمام نتایج به دست آمده از سال 1930 تا 1973 در چهار قانون معروف مکانیک سیاهچاله توسط باردین و همکاران [7]، به اوج رسید. بررسی ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها و پژوهش در مورد پایداری و گذار فاز آنها مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است [17]-[8]. مطالعه اثرات کوآنتومی و ارتباط آن با ترمودینامیک سیاهچاله‌ها اخیراً مورد توجه قرار گرفته است [21]-

سیاهچاله یکی از جذاب‌ترین پیش‌بینی‌های نظریه نسبیت عام آئنشتاین است و سالهاست در فیزیک نظری مورد توجه علاقه‌مندان و پژوهشگران مختلف قرار گرفته و هنوز مسائل ناشناخته‌ای دارد [1]. به خصوص کشف اخیر امواج گرانشی سیاهچاله‌ها توسط همکاری‌های علمی لایگو و ویرگو [2]، اهمیت این موضوعات را افزایش داده و فیزیک سیاهچاله‌ها بیشتر مورد توجه محققان مختلف قرار گرفته است. یکی از جالب‌ترین جنبه‌های مطالعه سیاهچاله‌ها، ترمودینامیک آنها است [1]. تاریخچه ترمودینامیک

\* نویسنده مسئول: soroush@yu.ac.ir

<sup>1</sup> Tolman  
<sup>2</sup> Oppenheimer  
<sup>3</sup> Volkoff  
<sup>4</sup> Bekenstein  
<sup>5</sup> Bardeen



سیاهچاله باشد که اندازه آن در اثر تابش هاوکینگ بسیار کوچک شده است.

این مقاله شامل بخش‌های زیر است: ابتدا مرور مختصری بر متریک مورد نظر ارائه می‌شود. پس از آن در بخش بعد، تصحیحات نمایی آنتروپی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس ترمودینامیک سیاهچاله به‌ازای آنتروپی تصحیح یافته، مورد بررسی قرار می‌گیرد و پارامترهای مختلف ترمودینامیکی به‌دست می‌آیند. بعد از آن هندسه ترمودینامیک سیاهچاله مورد مطالعه قرار گرفته و روش‌های هندسی مختلف ارائه می‌شوند. در بخش آخر، نتیجه‌گیری مقاله ارائه می‌شود.

### متریک

در این بخش، توضیح مختصری از متریک سیاهچاله AdS باردادار ارائه داده می‌شود. کنش فضا زمان AdS چهاربعدی و جفت شده با معادلات ماکسول به‌صورت زیر نوشته می‌شود [43]

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{6}{l^2} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad 1$$

در اینجا،  $R$  اسکالر ریچی،  $l$  شعاع AdS و  $F_{\mu\nu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu$  میدان تانسور الکترومغناطیسی و  $A_\mu$  پتانسیل برداری است. معادلات میدان این سیستم به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$G_{\mu\nu} = \frac{3g_{\mu\nu}}{l^2} + \frac{F^{\mu\tau} F_{\nu\tau}}{2} - g_{\mu\nu} \frac{F^{\tau\rho} F_{\rho\tau}}{8}, \quad 2$$

$$\sqrt{-g} \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0.$$

بنابراین متریک سیاهچاله AdS باردادار به‌صورت زیر است [43]:

[18]. بررسی اثرات کوانتومی در مورد یک سیستم گرانشی قوی می‌تواند پیشرفتی در جهت رسیدن به نظریه گرانش کوانتومی ایجاد کند. از جمله این موارد، بررسی اثر تصحیحات نمایی آنتروپی سیاهچاله بر ویژگی‌ها و پارامترهای ترمودینامیکی سیاهچاله است [21].

از دیگر روش‌های بررسی ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها، هندسه ترمودینامیک سیاهچاله‌ها است. نمایش هندسی ویژگی‌های ترمودینامیکی سیستم‌های فیزیکی توسط افراد بسیاری مورد بررسی قرار گرفته شده است [22-39]. ابتدا وینهلد<sup>1</sup> [22و23] و پس از آن راپینر<sup>2</sup> [24و25] و کوودو<sup>3</sup> [26و27]، مفهوم هندسه ترمودینامیک را مطرح نمودند و متریک‌های هندسی را در این زمینه ساختند. به‌رحال روش‌های مذکور، به‌طور کامل نتوانستند جوابگوی هدف اصلی باشند. به‌عبارتی در توصیف کامل ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها از جمله گذار فاز، تا حدودی ناتوان بوده‌اند. بنابراین پژوهشگران مختلف تمام تلاش خود را برای بهبود این روش‌ها به‌کار گرفتند. از جمله روش‌های توسعه یافته مطرح شده می‌توان به دو روش اچ بی ای ام<sup>4</sup> [28-30] و ان تی جی<sup>5</sup> [31و32]، اشاره نمود. این دو روش تاکنون به‌طور کامل در توصیف و بررسی گذار فاز سیاهچاله‌ها موفق بوده‌اند. پیش از این، ترمودینامیک انواع سیاهچاله AdS در مقالات بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است [40-42].

هدف ما در این مقاله، بررسی هندسه ترمودینامیک سیاهچاله AdS باردادار با آنتروپی تصحیح‌یافته نمایی است که برای اولین بار انجام می‌شود. ما انتظار داریم که این اصلاحات بر پایداری سیاهچاله ذکر شده اثر گذاشته و دارای اهمیت بسیاری در مراحل از تحول

<sup>4</sup> HPEM (Hendi-Panahiyan-Eslampanah-Momennia)

<sup>5</sup> NTG (New Thermodynamic Geometry)

<sup>1</sup> Weinhold

<sup>2</sup> Ruppeiner

<sup>3</sup> Quevedo

قرار می‌گیرد جمله‌نمایی دارای اهمیت می‌شود و اثر بیشتری نسبت به جملات قبلی پیدا می‌کند. این مورد به‌طور کامل در [45] اثبات شده است. در این محدوده، جمله غالب در آنتروپی 5 همان جمله‌نمایی است. به‌علاوه در مرجع [21] نشان داده شده است که می‌توان  $\delta = 1$  قرار داد. همچنین همانند روش به‌کار گرفته شده در مرجع [43]، ضریب  $\eta$  که قدرت جمله اصلاحی را نشان می‌دهد برای ردگیری اصلاح‌نمایی ذکر شده اضافه شده است. بنابراین می‌توان نوشت

$$S = S_0 + \eta e^{-S_0}. \quad 6$$

اثر تصحیحات‌نمایی برای سیاهچاله‌های بزرگ قابل چشم‌پوشی است ولی این اثر وقتی مساحت سیاهچاله کوچک باشد بسیار مهم است و بنابراین می‌تواند به‌عنوان یک اثر کوآنتومی برای سیاهچاله‌های خیلی کوچک در نظر گرفته شود. لازم به‌ذکر است که پس از معرفی آنتروپی اصلاح‌شده لگاریتمی در مرجع [21]، تاکنون تنها یک مقاله در مورد اصلاح‌نمایی منتشر شده است که مربوط به سیاهچاله بورن-اینفلد بوده است [46]. بنابراین مطالعه ترمودینامیک هندسی سیاهچاله باردار AdS با آنتروپی اصلاح‌شده‌نمایی برای اولین بار انجام‌گردیده است.

### ترمودینامیک

در این بخش، خواص ترمودینامیکی سیاهچاله را مطالعه می‌کنیم. افق رویداد سیاهچاله  $r_h$ ، با مساوی صفر قرار دادن  $f(r)$ ، در معادله 3 به‌دست می‌آید. با استفاده از رابطه بین افق رویداد و آنتروپی  $S_0 = \pi r_h^2$  و همچنین با کمک گرفتن از معادله 6، می‌توانیم جرم سیاهچاله را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$M(S, Q, l) = \frac{\pi}{2l^2 \sqrt{\pi(W(-\eta e^{-S}) + S)}} \quad 7$$

$$\left( \frac{l^2(W(-\eta e^{-S}) + S)}{\pi} + Q^2 l^2 + \frac{(W(-\eta e^{-S}) + S)^2}{\pi^2} \right).$$

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_k^2, \quad 3$$

$$d\Omega_k^2 = d\theta^2 + \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k}\theta) d\varphi^2,$$

$$f(r) = k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}.$$

در اینجا  $Q$  بار الکتریکی و  $k = +1$  پارامتر انحناست.

### آنتروپی تصحیح‌یافته

در این بخش، آنتروپی تصحیح‌یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانگونه که می‌دانیم آنتروپی یک سیاهچاله متناسب است با مساحت افق رویداد که در واحد ثابت پلانک ( $l_p = 1$ ) به‌صورت زیر نوشته می‌شود [7 و 8]

$$S_0 = \frac{A}{4}, \quad 4$$

که  $A$  مساحت افق رویداد سیاهچاله است. با این حال تحقیقات بسیاری نشان داده‌اند که با در نظر گرفتن اختلالات آماری و همچنین اثرات کوآنتومی، آنتروپی 4 نیاز به اصلاح دارد. با در نظر گرفتن همه آثار اختلالی و غیر اختلالی، آنتروپی اصلاح‌شده می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود [21]

$$S = S_0 + \alpha \ln S_0 + \frac{\beta}{S_0} + \dots + \eta e^{-S_0} \quad 5$$

که  $\delta$ ،  $\eta$ ،  $\beta$ ،  $\alpha$  اعداد ثابتی هستند. این جملات اصلاحی با کوچک شدن سیاهچاله، که به‌دلیل پدیده تابش هاوکینگ رخ می‌دهد، دارای اهمیت می‌شوند. با این حال محدوده اثر این جملات متفاوت است. توجه کنید که قبلاً اثر اصلاح لگاریتمی برای سیاهچاله AdS باردار مورد مطالعه قرار گرفته است [43]. همچنین در مقالات بسیاری، اصلاح مرتبه بالاتر ضریب  $\beta$  مورد مطالعه قرار گرفته است [44]. با کوچک شدن سیاهچاله، ابتدا اهمیت اصلاح لگاریتمی و سپس اهمیت جمله متناسب با معکوس آنتروپی افزایش پیدا می‌کنند. وقتی سیاهچاله کوچکتر شده و در مقیاس طول پلانک

رویداد) به دست می‌آیند و برای بررسی پایداری گرمایی مورد نیاز می‌باشند [33, 47]. از دیگر روش‌های بررسی پایداری گرمایی و یافتن گذار فاز، بررسی انرژی آزاد گیبس است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود [47]

$$G = M - TS = \frac{S(c1+c2)}{4l^2\pi^{3/2}(W(-\eta e^{-S})+S)^{3/2}(1+W(-\eta e^{-S}))} + \frac{(c3+c4)}{2l^2\sqrt{\pi(W(-\eta e^{-S})+S)}} \quad 11$$

$$c1 = Q^2 l^2 \pi^2 - l^2 \pi W(-\eta e^{-S}) - l^2 \pi S,$$

$$c2 = -3(W(-\eta e^{-S}))^2 - 6W(-\eta e^{-S})S - 3S^2,$$

$$c3 = l^2(W(-\eta e^{-S})+S) + \pi Q^2 l^2,$$

$$c4 = \pi^{-1}(W(-\eta e^{-S})+S)^2.$$

معادلات فوق (7 الی 11)، با استفاده از معادلات 4 و 6، به شعاع افق رویداد سیاهچاله وابسته هستند. نمودارهای این کمیت‌های ترمودینامیکی در شکل‌های 1 الی 5، نشان داده شده‌اند.

همانگونه که از شکل 1 قابل مشاهده است، جرم سیاهچاله در یک نقطه خاص از افق رویداد مینیمم است و پس از آن با افزایش شعاع افق رویداد، جرم سیاهچاله افزایش پیدا می‌کند.

در اینجا  $W(x)$ ، تابع لامبرت<sup>1</sup> است. دیگر پارامترهای ترمودینامیکی سیاهچاله، یعنی دمای سیاهچاله ( $T = \frac{\partial M}{\partial S}$ )، و ظرفیت گرمایی ( $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$ ) به صورت زیر به دست می‌آیند

$$T = \frac{-f}{4l^2\pi^{3/2}(W(-\eta e^{-S})+S)^{3/2}(1+W(-\eta e^{-S}))}, \quad 8$$

$$f = Q^2 l^2 \pi^2 - l^2 \pi W(-\eta e^{-S}) - l^2 \pi S$$

$$-3(W(-\eta e^{-S}))^2 - 6W(-\eta e^{-S})S - 3S^2, \quad 9$$

$$C = 2\frac{g}{h} \frac{\sqrt{(W(-\eta e^{-S})+S)^5(1+W(-\eta e^{-S}))^2}}{\sqrt{(W(-\eta e^{-S})+S)^3}}$$

$$g = Q^2 l^2 \pi^2 - l^2 \pi W(-\eta e^{-S}) - l^2 \pi S -$$

$$3(W(-\eta e^{-S}))^2 - 6W(-\eta e^{-S})S - 3S^2,$$

$$h = 2\pi^2(W(-\eta e^{-S}))^2 Q^2 l^2 + 2\pi W(-\eta e^{-S})Q^2 l^2 S -$$

$$3\pi W(-\eta e^{-S})Q^2 l^2 - 2\pi(W(-\eta e^{-S}))^3 l^2 -$$

$$4\pi(W(-\eta e^{-S}))^2 l^2 S - 2\pi W(-\eta e^{-S})S^2 l^2 -$$

$$3Q^2 l^2 \pi^2 + \pi(W(-\eta e^{-S}))^2 l^2 + \pi W(-\eta e^{-S})S l^2 +$$

$$l^2 \pi W(-\eta e^{-S}) + l^2 \pi S - 6(W(-\eta e^{-S}))^4 -$$

$$18(W(-\eta e^{-S}))^3 S - 18(W(-\eta e^{-S}))^2 S^2 - 6W(-\eta e^{-S})S^3 -$$

$$3(W(-\eta e^{-S}))^3 - 6(W(-\eta e^{-S}))^2 S - 3W(-\eta e^{-S})S^2 -$$

$$3(W(-\eta e^{-S}))^2 - 6W(-\eta e^{-S})S - 3S^2.$$

علاوه براین، با در نظر گرفتن ثابت کیهان‌شناسی

$$(P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2})$$

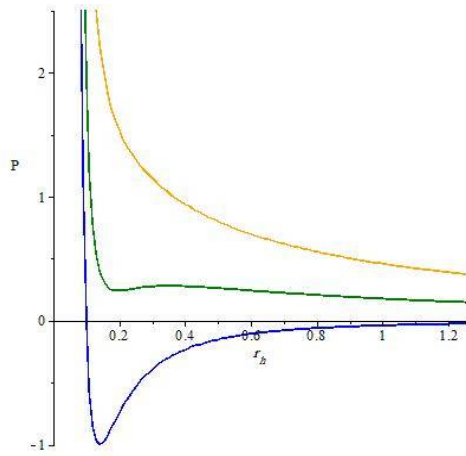
[33] و با استفاده از معادله 8، خواهیم داشت:

$$P = \frac{4T\sqrt{\pi}(W(-\eta e^{-S})+S)^{3/2}(W(-\eta e^{-S})+1)}{8(W(-\eta e^{-S}))^2 + 2W(-\eta e^{-S})S + S^2} + \quad 10$$

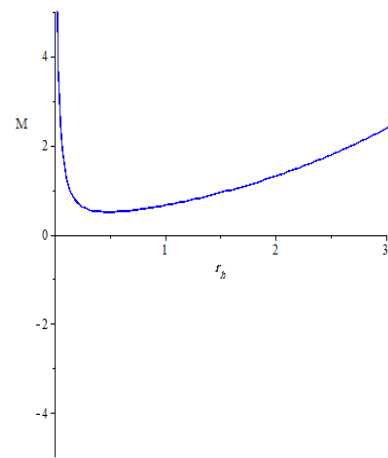
$$\frac{Q^2\pi - W(-\eta e^{-S}) - S}{8(W(-\eta e^{-S}))^2 + 2W(-\eta e^{-S})S + S^2}.$$

پارامترهای بحرانی (فشار بحرانی  $P_c$  و دما بحرانی  $T_c$ )، با مساوی صفر قراردادن مشتقات مرتبه اول و دوم فشار نسبت به حجم (و متناسب بودن حجم ویژه با افق

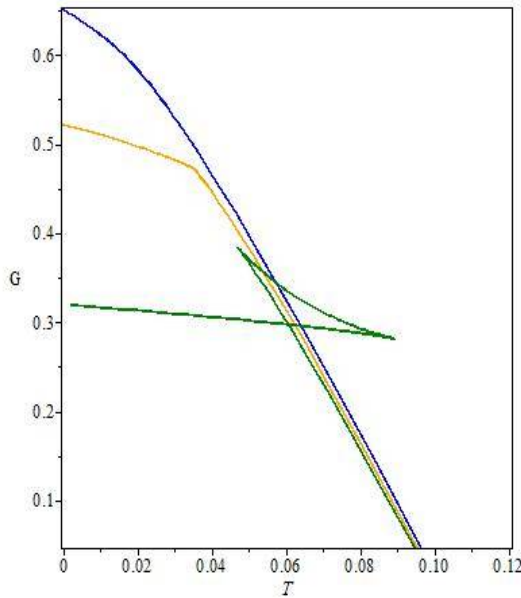
<sup>1</sup> Lambert W function



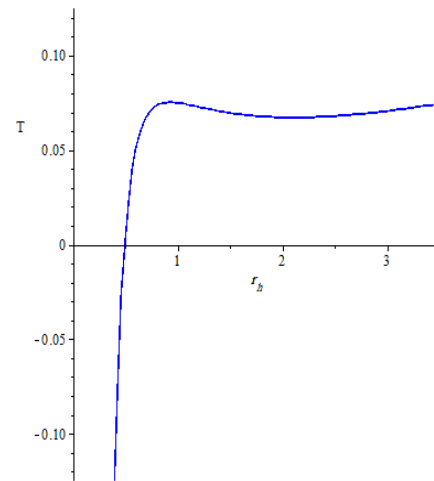
شکل 3. نمودار فشار برحسب شعاع افق رویداد به‌ازای پارامترهای  $Q=0.1$ ,  $\eta=0.1$ . خط نارنجی  $T > T_c$  خط سبز  $T = T_c$  و خط آبی  $T < T_c$ .



شکل 1. نمودار جرم سیاهچاله برحسب شعاع افق رویداد به‌ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $I=4$ .



شکل 4. نمودار انرژی آزاد گیبس برحسب دما به‌ازای پارامترهای  $Q=0.1$ ,  $\eta=0.1$ . خط آبی  $P > P_c$  خط نارنجی  $P = P_c$  و خط سبز  $P < P_c$ .



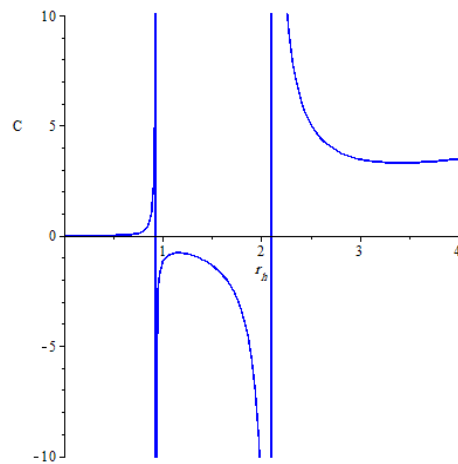
شکل 2. نمودار دمای سیاهچاله برحسب شعاع افق رویداد به‌ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $I=4$ .

افزایش شعاع افق رویداد، دمای سیاهچاله شروع به کاهش می‌کند ولی همواره مثبت است و دوباره با افزایش شعاع افق رویداد، دمای سیاهچاله شروع به افزایش می‌کند.

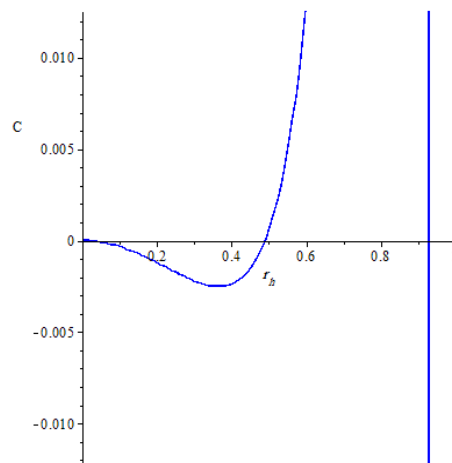
از نمودارهای فشار، انرژی آزاد گیبس و ظرفیت گرمایی، پایداری گرمایی و گذار فاز سیاهچاله قابل بررسی است. نمودار فشار برحسب شعاع افق رویداد در شکل 3 نشان داده شده است. همان‌گونه که از این شکل قابل مشاهده است، به ازای  $T > T_c$  سیاهچاله مذکور شبیه گاز ایده آل و به ازای  $T < T_c$  شبیه گاز واندروالس رفتار می‌کند [47] و در حالت  $T = T_c$  دارای نقطه عطف است.

شکل 4، نمودار آزاد گیبس برحسب دما را نمایش می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان دید که به ازای  $P < P_c$  یک شکستگی (معروف به دم چلچله‌ای) در نمودار آزاد گیبس در زیر فشار بحرانی وجود دارد و تأیید کننده گذار فاز مرتبه اول است [47].

در ادامه، برای بررسی بهتر پایداری گرمایی و گذار فاز سیاهچاله، ظرفیت گرمایی بررسی می‌شود. تغییرات ظرفیت گرمایی سیاهچاله برحسب شعاع افق رویداد در شکل 5 (الف و ب)، نشان داده شده است. قابل ذکر است که ریشه ظرفیت گرمایی ( $C = T = 0$ )، مرز بین حالات فیزیکی ( $T > 0$ ) و غیر فیزیکی ( $T < 0$ ) است. علامت ظرفیت گرمایی در این نقطه تغییر می‌کند. در واقع دو نوع گذار فاز برای سیاهچاله وجود دارد. ریشه ظرفیت گرمایی، نشان دهنده نقطه گذار فاز نوع اول است (ظرفیت گرمایی سیاهچاله از فاز منفی وارد فاز مثبت می‌شود). علاوه بر این، واگرایی ظرفیت



الف



ب

شکل 5. الف: نمودار ظرفیت گرمایی سیاهچاله برحسب شعاع افق رویداد به ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $l=4$ . ب: نمای نزدیک قسمت الف.

همچنین نمودار دمای سیاهچاله برحسب شعاع افق رویداد در شکل 2 نمایش داده شده است. همان‌گونه که این شکل نشان می‌دهد، دمای سیاهچاله به ازای مقادیر خاصی از شعاع افق رویداد منفی است، سپس با افزایش شعاع افق رویداد، دما صفر شده و پس از آن مثبت می‌شود و به بیشینه مقدار خود می‌رسد. در ادامه با

12

گرمایی نشان دهنده نقطه گذار فاز نوع دوم است [28-29].

$$ds^2 = \left\{ \begin{array}{ll} Mg_{ab}^w dX^a dX^b & \text{Weinhold} \\ -\frac{1}{T} Mg_{ab}^R dX^a dX^b & \text{Ruppeiner} \\ (SM_s + QM_Q + IM_I)(-M_{SS}dS^2 + M_{QQ}dQ^2 + M_{II}dI^2) & \text{QuevedoCaseI} \\ SM_s(-M_{SS}dS^2 + M_{QQ}dQ^2 + M_{II}dI^2) & \text{QuevedoCaseII} \\ \frac{SM_s}{\left(\frac{\partial^2 M}{\partial Q^2}\right)^3 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial I^2}\right)} (-M_{SS}dS^2 + M_{QQ}dQ^2 + M_{II}dI^2) & \text{HPEM} \\ \frac{1}{T} (-M_{SS}dS^2 + M_{QQ}dQ^2 + M_{II}dI^2) & \text{NTG} \end{array} \right.$$

در اینجا،  $j = S, Q, I$  و  $M_{ij} = \frac{\partial^2 M}{\partial j^2}$ ،  $M_j = \frac{\partial M}{\partial j}$  برای بررسی تکنیکی این متریک‌ها، می‌بایست اسکالر ریچی آنها محاسبه شود. از آنجا که نقاط واگرایی اسکالر ریچی مهم هستند و بیشتر اوقات محاسبه تحلیلی اسکالر ریچی بسیار طولانی است، بنابراین مخرج اسکالر ریچی می‌تواند مفید باشد. مخرج‌های اسکالر ریچی متریک‌های فوق به صورت زیر می‌باشند

13

$$\text{denom}(R) = \left\{ \begin{array}{ll} -2M^3(M_{SS}M_{QI} + M_{QQ}M_{SI} + M_{II}M_{SQ}) - (M_{SS}M_{QQ}M_{II} - 2M_{QI}M_{SI}M_{SQ})^2 & \text{Weinhold} \\ -2M^3T^3(M_{SS}M_{QI} + M_{QQ}M_{SI} + M_{II}M_{SQ}) - (M_{SS}M_{QQ}M_{II} - 2M_{QI}M_{SI}M_{SQ})^2 & \text{Ruppeiner} \\ 2(SM_s + QM_Q + IM_I)^3 M_{SS}^2 M_{QQ}^2 M_{II}^2 & \text{QuevedoCaseI} \\ 2S^3 M_s^3 M_{SS}^2 M_{QQ}^2 M_{II}^2 & \text{QuevedoCaseII} \\ 2S^3 M_s^3 M_{SS}^2 & \text{HPEM} \\ 2TM_{SS}^2 M_{QQ}^2 M_{II}^2 & \text{NTG} \end{array} \right.$$

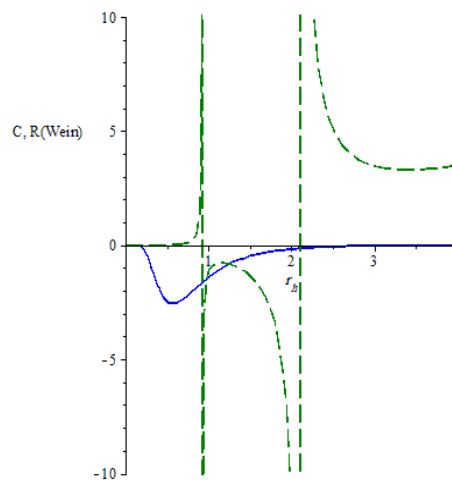
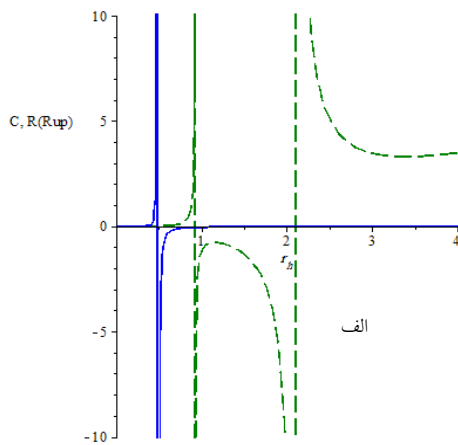
همان‌گونه که از شکل 5 قابل مشاهده است، ظرفیت گرمایی سیاهچاله، یک صفر دارد و دو واگرایی. ظرفیت گرمایی ابتدا از منطقه منفی شروع می‌شود (حالت ناپایدار و غیر فیزیکی)، سپس صفر شده و در ادامه مثبت (حالت پایدار و فیزیکی) می‌شود. پس از آن، دوباره وارد منطقه منفی می‌شود (حالت ناپایدار). سپس با افزایش شعاع افق رویداد، وارد منطقه مثبت (حالت پایدار) می‌شود. از دیگر روش‌های مهم برای مطالعه پایداری سیاهچاله‌ها، استفاده از هندسه ترمودینامیک است که در بخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### هندسه ترمودینامیک

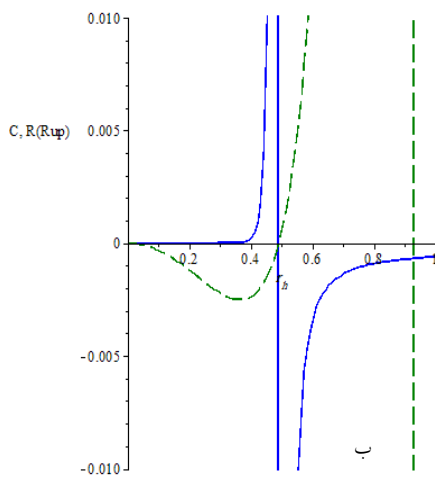
در این بخش، به کمک روش‌های هندسی وینهلد [22و23]، راپینر [24و25]، کوودو [26و27]، اچ پی ای ام [28-30] و ان تی جی [31و32]، ساختار هندسی سیاهچاله را بررسی می‌کنیم. در واقع تطابق بین تکنیکی‌های اسکالر خمشی این متریک‌ها با نقاط گذار فاز سیاهچاله مورد بررسی قرار می‌گیرند. متریک‌های مذکور به صورت زیر می‌باشند



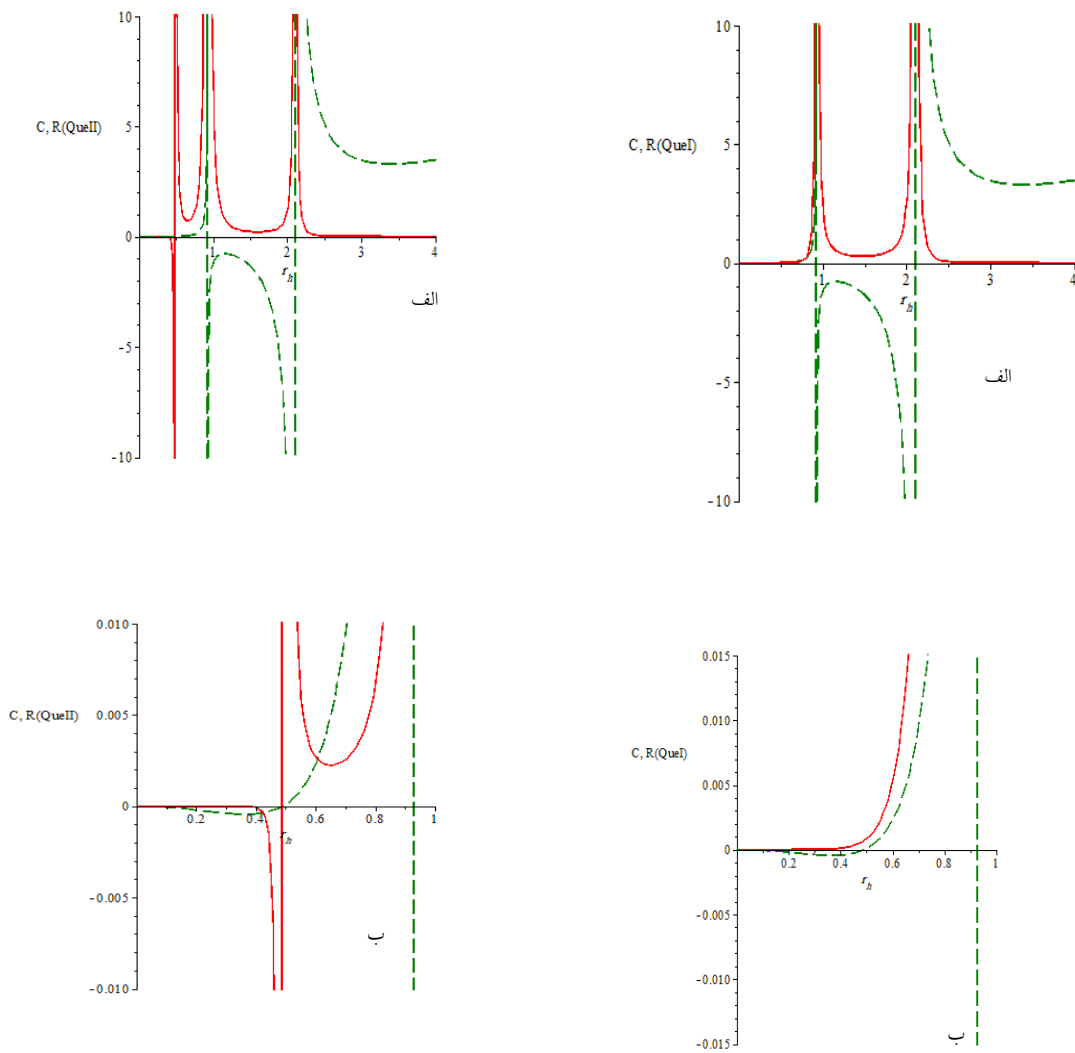
نمودار تغییرات اسکالر ریچی متریک‌های فوق به همراه ظرفیت گرمایی برحسب شعاع افق رویداد، در شکل‌های 6 الی 11، نشان داده شده‌اند.



شکل 6. نمودار تغییرات اسکالر خمش وینهلد (خط آبی) و ظرفیت گرمایی سیاهچاله (خط چین سبز) بر حسب شعاع افق رویداد به ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $l=4$ .

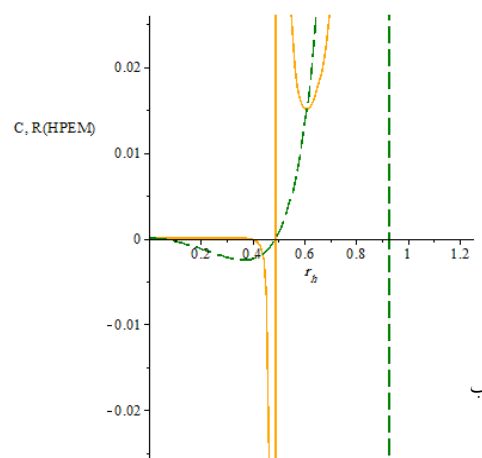
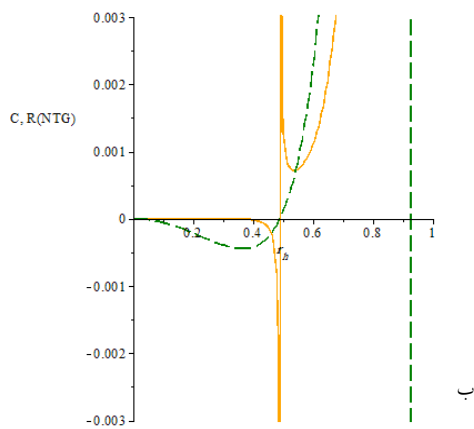
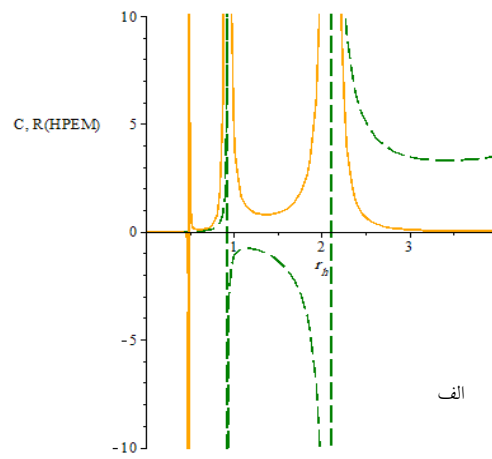
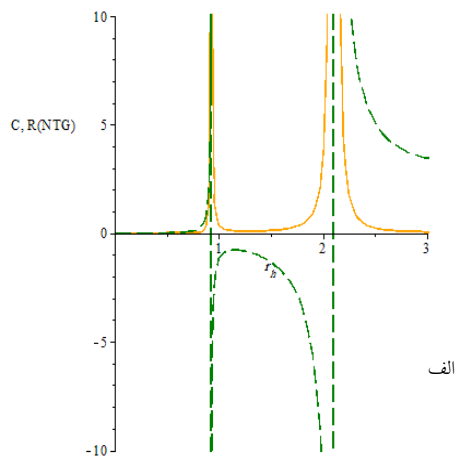


شکل 7. الف: نمودار تغییرات اسکالر خمش رابینر (خط آبی) و ظرفیت گرمایی سیاهچاله (خط چین سبز) بر حسب شعاع افق رویداد به ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $l=4$ . ب: نمای نزدیک قسمت الف.



شکل 9. الف: نمودار تغییرات اسکالر خمش کوودو (II) (خط قرمز) و ظرفیت گرمایی سیاهچاله (خط چین سبز) برحسب شعاع افق رویداد به‌ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $l=4$ . ب: نمای نزدیک قسمت الف.

شکل 8. الف: نمودار تغییرات اسکالر خمش کوودو (I) (خط قرمز) و ظرفیت گرمایی سیاهچاله (خط چین سبز) برحسب شعاع افق رویداد به‌ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $l=4$ . ب: نمای نزدیک قسمت الف.



**شکل 11.** الف: نمودار تغییرات اسکالر خمش ان تی جی (خط نارنجی) و ظرفیت گرمایی سیاهچاله (خط چین سبز) برحسب شعاع افق رویداد به ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $I=4$ . ب: نمای نزدیک قسمت الف.

**شکل 10.** الف: نمودار تغییرات اسکالر خمش اچ پی ام (خط نارنجی) و ظرفیت گرمایی سیاهچاله (خط چین سبز) برحسب شعاع افق رویداد به ازای پارامترهای  $Q=0.5$ ,  $\eta=0.1$ ,  $I=4$ . ب: نمای نزدیک قسمت الف.

همانگونه که در شکل 6 نمایش داده شده است، هیچ گونه تکنیکی برای اسکالر خمش وینهولد وجود ندارد. بنابراین این فرمالیسم اطلاعات فیزیکی خاصی را به ما نمی دهد.

تغییرات اسکالر خمش راپینر در شکل 7 (الف و ب) نشان داده شده است. همانگونه که می بینیم اسکالر خمش راپینر فقط یک تکنیکی دارد که بر نقطه گذار

مذکور دارای یک ریشه و بنابراین یک گذار فاز نوع اول است و دارای دو تکینگی و در نتیجه دو گذار فاز نوع دوم است. این بدان معنی است که پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله به شدت تحت تأثیر اثرات کوآنتومی است [47].

در ادامه، هندسه ترمودینامیک این سیاهچاله به کمک روش‌های هندسی وینهلد، رایپنر، کوودو، اچ پی ای ام و ان تی جی، مطالعه شد و تناظر بین تکینگی‌های خمش این متریک‌های هندسی و نقاط گذار فاز سیاهچاله مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد که تطابق کاملی بین نقاط گذار فاز سیاهچاله (نوع اول و نوع دوم) و تکینگی‌های اسکالر خمش فرمالیسم‌های کوودو (II)، اچ پی ای ام و ان تی جی، وجود دارد و بنابراین اطلاعات کاملتری را نسبت به فرمالیسم‌های وینهلد، رایپنر و کوودو (I)، ارائه می‌دهند.

## مرجع‌ها

- [1] S. Soroushfar, R. Saffari, N. Kamvar, Thermodynamic geometry of black holes in  $f(R)$  gravity, *European Physical Journal C* **76** (2016) 476. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4311-6>
- [2] LIGO Scientific and Virgo collaborations, Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Physical Review Letters* **116** (2016) 061102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- [3] R.C. Tolman, Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid, *Physical Review* **55** (1939) 364373. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.364>
- [4] R.C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Dover Books on Physics Series, Dover Publications, New York (1987).

فاز نوع اول ظرفیت گرمایی سیاهچاله منطبق است و هیچ تکینگی دیگری که بر نقاط گذار فاز نوع دوم سیاهچاله منطبق باشد، ندارد.

شکل 8 (الف و ب)، تغییرات اسکالر خمش کوودو (I) برحسب شعاع افق رویداد را نشان می‌دهد. همانگونه که مشخص است، اسکالر خمش کوودو (I)، دو تکینگی دارد که بر نقاط گذار فاز نوع دوم ظرفیت گرمایی منطبق هستند ولی هیچ تکینگی دیگری که بر نقطه گذار فاز نوع اول سیاهچاله منطبق باشد، ندارد.

شکل‌های 9، 10 و 11، تغییرات اسکالر خمش‌های کوودو (II)، اچ پی ای ام و ان تی جی را نشان می‌دهند. همانگونه که از این شکل‌ها قابل مشاهده است، اسکالر خمش‌های این سه فرمالیسم، سه تکینگی دارند که یکی از آنها بر نقطه گذار فاز نوع اول و دوتای دیگر بر نقاط گذار فاز نوع دوم سیاهچاله انطباق دارند.

بنابراین برای این سیاهچاله، فرمالیسم‌های کوودو (II)، اچ پی ای ام و ان تی جی، اطلاعات کاملتری را نسبت به فرمالیسم‌های وینهلد، رایپنر و کوودو (I)، به ما می‌دهند.

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، متریک سیاهچاله AdS باردار در نظر گرفته شد و تصحیحات نمایی آنتروپی آن مورد مطالعه قرار گرفت. پس از آن، کمیت‌های ترمودینامیکی این سیاهچاله شامل جرم، دما و ظرفیت گرمایی و همچنین فشار و انرژی آزاد گیبس، با در نظر گرفتن تصحیحات نمایی آنتروپی، مورد بررسی قرار گرفتند. پایداری گرمایی و گذار فاز سیاهچاله از روی نمودارهای فشار، انرژی آزاد گیبس و ظرفیت گرمایی مورد بررسی قرار گرفتند. رفتار واندروالس گونه با گذار فاز مرتبه اول برای این سیستم از روی این نمودارها قابل مشاهده بود. همچنین مشاهده شد که ظرفیت گرمایی سیاهچاله

- [14] M. Eune, W. Kim, S.H. Yi, Hawking-Page phase transition in BTZ black hole revisited, *Journal of High Energy Physics* **03** (2013) 020.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2013\)020](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)020)
- [15] A.M. Frassino, D. Kubiznak, R.B. Mann *et al.* Multiple reentrant phase transitions and triple points in Lovelock thermodynamics. *Journal of High Energy Physics* **2014** (2014) 80.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2014\)080](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)080)
- [16] R.A. Hennigar, E. Tjoa, R.B.J. Mann, Thermodynamics of hairy black holes in Lovelock gravity. *Journal of High Energy Physics* **2017** (2017) 70.  
[https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2017\)070](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2017)070)
- [17] S.H. Hendi, F. Azari, E. Rahimi, M. Elahi, Z. Owjifard, Z. Armanfard, Thermodynamics and phase transition of topological dilatonic Lifshitz-like black holes, *Annalen der Physik* **532** (2020) 10.  
<https://doi.org/10.1002/andp.202000162>
- [18] S. Upadhyay, Quantum corrections to thermodynamics of quasitopological black holes, *Physics Letters B* **775** (2017) 130.  
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.10.059>
- [19] B. Pourhassan, M. Faizal, S. Upadhyay, L.A. Asfar, B. PV, criticality of the second order quantum corrected Hořava–Lifshitz black hole, *European Physical Journal C* **77** (2017) 555.  
<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7257-7>
- [20] S. Upadhyay, B. Pourhassan, H. Farahani, P–V criticality of first-order entropy corrected AdS black holes in massive gravity, *Physical Review D* **95** 106014 (2017).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.106014>
- [21] A. Chatterjee, A. Ghosh, Exponential corrections to black hole entropy, *Physical Review Letters* **125** (2020) 041302.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.041302>
- [5] J.R. Oppenheimer, G.M. Volkoff, *Physical Review* **55** (1939) 374381.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374>
- [6] J.D. Bekenstein, Black holes and the second law. *Lettere al Nuovo Cimento* **4** (1972) 737–740.  
<https://doi.org/10.1007/BF02757029>
- [7] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, The four laws of black hole mechanics, *Communications in Mathematical Physics*, **31** (1973) 161–170.  
<https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103858973>
- [8] S.W. Hawking Black hole explosions?, *Nature* **248** (1974) 30.  
<https://doi.org/10.1038/248030a0>
- [9] S. Hawking, D.N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Communications in Mathematical Physics* **87** (1983) 577.  
<https://doi.org/10.1007/BF01208266>
- [10] G. Gibbons, R. Kallosh, B. Kol, Moduli, Scalar Charges, and the First Law of Black Hole Thermodynamics, *Physical Review Letters* **77** 4992 (1996).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.4992>
- [11] T. Padmanabhan, Classical and quantum thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **19** (2002) 5387.  
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/21/306>
- [12] D. Kothawala, T. Padmanabhan, S. Sarkar, Is gravitational entropy quantized?, *Physical Review D* **78** (2008) 104018.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.104018>
- [13] B.P. Dolan, Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics, *Class. Quantum Gravit* **28** (2011) 235017.  
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/23/235017>

- <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.064028>
- [31] S.A. Hosseini Mansoori, B. Mirza, Geometrothermodynamics as a singular conformal thermodynamic geometry, *Physics Letters B* **799** (2019) 135040. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135040>
- [32] S.A. Hosseini Mansoori, Thermodynamic geometry of the novel 4-D Gauss Bonnet AdS Black Hole, [arXiv: 2003.13382 [gr-qc]] (2020).
- [33] S. Soroushfar, S. Upadhyay, Phase transition of a charged AdS black hole with a global monopole through geometrical thermodynamics, *Physics Letters B* **804** (2020) 135360. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135360>
- [34] S. Soroushfar, R. Saffari, S. Upadhyay, Thermodynamic geometry of a black hole surrounded by perfect fluid in Rastall theory. *Gen Relativ Gravit* **51** (2019) 130. <https://doi.org/10.1007/s10714-019-2614-2>
- [35] N.J. Gogoi, P. Phukon, Thermodynamic geometry of 5D R-charged black holes in extended thermodynamic space, *Physical Review D* **103** 126008 (2021) 126008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.126008>
- [36] S. Upadhyay, S. Soroushfar, R. Saffari, First-order corrected thermodynamic geometry of a static black hole in  $f(R)$  gravity (2018).
- [37] B. Eslam Panah, Effects of energy dependent spacetime on geometrical thermodynamics and heat engine of black holes: Gravity's rainbow, *Physics Letters B* **787** (2018) 45. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.10.042>
- [38] T. Vetsov, Information geometry on the space of equilibrium states of black holes in higher derivative theories, *European Physical Journal C* **79** (2019) 71.
- [22] F. Weinhold, Metric geometry of equilibrium thermodynamics, *Journal of Chemical Physics* **63** (1975) 2479. <https://doi.org/10.1063/1.431689>
- [23] F. Weinhold, Metric geometry of equilibrium thermodynamics. II. Scaling, homogeneity, and generalized Gibbs–Duhem relations, *Journal of Chemical Physics* **63** (1975) 2484. <https://doi.org/10.1063/1.431635>
- [24] G. Ruppeiner, Thermodynamics: A Riemannian geometric model, *Physical Review A* **20** (1979) 1608. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.20.1608>
- [25] G. Ruppeiner, Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory, *Reviews of Modern Physics* **67** (1995) 605. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.605>
- [26] H. Quevedo, R.D. Zarate, Differential geometry and thermodynamics, *Revista Mexicana de Física* **49** (2003) 125.
- [27] H. Quevedo, Geometrothermodynamics, *Journal of Mathematical Physics* **48** (2007) 013506. <https://doi.org/10.1063/1.2409524>
- [28] S.H. Hendi, S. Panahiyan, B. Eslam Panah, M. Momennia, Thermodynamic instability of nonlinearly charged black holes in gravity's rainbow, *European Physical Journal C* **75** (2015) 507. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-3994-z>
- [29] S.H. Hendi, S. Panahiyan, B. Eslam Panah, Geometrical Method for Thermal Instability of Nonlinearly Charged BTZ Black Holes, *Advances in High Energy Physics* **2015** (2015) 743086. <https://doi.org/10.1155/2015/743086>
- [30] S.H. Hendi, A. Sheykhi, S. Panahiyan, B. Eslam Panah, Phase transition and thermodynamic geometry of Einstein–Maxwell–dilaton black holes, *Physical Review D* **92** (2015) 064028.

- [43] B. Pourhassan, M. Faizal, Thermal fluctuations in a charged AdS black hole, *EPL* **111** (2015) 40006. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/111/40006>
- [44] B. Pourhassan, K. Kokabi, Z. Sabery, Higher order corrected thermodynamics and statistics of Kerr-Newman-Godel black hole, *Annals of Physics* **399** (2018) 181-192. <https://doi:10.1016/j.aop.2018.10.011>
- [45] B. Pourhassan, M. Faizal, Quantum Corrections to the Thermodynamics of Black Branes [arXiv:2011.00198 [hep-th]].
- [46] B. Pourhassan, M. Dehghani, M. Faizal, S. Dey, Non-perturbative quantum corrections to a Born-Infeld black hole and its information geometry, *Classical and Quantum Gravity* **38** (2021) 10500. <https://doi:10.1088/1361-6382/abdf6f>
- [47] S.H. Hendi, R. Ramezani-Arani, E. Rahimi, Thermal stability of d-dimensional Lifshitz like topological black holes in special class of F(R) gravity, *Journal of Research on Many-body Systems* (1399). <https://doi.org/10.22055/jrmb.2020.15569>
- [39] M. Chabab, H. El Moumni, S. Iraoui. K. Masmar, Phase transitions and geothermodynamics of black holes in dRGT massive gravity, *European Physical Journal C* **79** (2019) 342. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6850-0>
- [40] H. Lü, C.N. Pope, Q. Wen Thermodynamics of AdS black holes in Einstein-Scalar gravity, *Journal of High Energy Physics* **165** (2015). [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2015\)165](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2015)165)
- [41] P. Wang, H. Wu, H. Yang Thermodynamic geometry of AdS black holes and black holes in a cavity *European Physical Journal C* **80** (2020) 216. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7776-2>
- [42] A. Belhaj, H. Belmahi, M. Benali, A. Segui, Thermodynamics of AdS black holes from deflection angle formalism, *Physics Letters B* **817** (2021) 136313. <https://doi:10.1016/j.physletb.2021.136313>