

Photon Added Qutrit Like Entangled Coherent States of Light

Alireza Dehghani^{*1}, Bashir Mojaveri², Seyed Aliasghar Alenabi²,

¹Department of Physics, Payame Noor University, Tabriz, Iran

² Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Received: 04.05.2021 Final revised: 15.07.2021 Accepted: 17.10.2021

 [10.22055/JRMBS.2021.17268](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17268)

Abstract

In this study, we introduce a new class of two-mode qutrit-like entangled states based on the 'Near' coherent states. They link to a specific class of non-classical states, namely, photon added coherent states, which makes them capable candidates in quantum information processes. Based on these states, various superpositions such as the two-qubit entangled states, have been introduced and studied by various authorities, which is evidence for their valuable quantum properties. Therefore, based on the above-mentioned relationship and the emergence of controllable non-classical properties of these states, in this work, we seek to analyze the effect of adding photons to two-qutrit entangled states. For this purpose, we present a general analysis of non-classical properties such as the photon statistics and entanglement with emphases on the control role of the shift parameter of these states. We apply the generalized I-concurrence measure to quantify the entanglement and the condition in which quantum entanglement can be enhanced and maximized. Comparing with some cases already discussed in the literature, we can see that the photon addition, which is equivalent to selecting a specific shift parameter, plays an important role in non-classical effects, and this operation can be applied to enhance and preserve the entanglement.

Keywords: Coherent States, Entanglement, Squeezing Effect, Sub-Poissonian Statistics, Two-Qutrit

* Corresponding Author: alireza.dehghani@gmail.com



حالت‌های همدوس درهم‌تنیده شبه کیوتریت فوتون افزوده متناسب به نور

علیرضا دهقانی^{1*}، بشیر مجاوری²، سیدعلی اصغر آل‌نبی²¹گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران²گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

دریافت: 1400/02/14 ویرایش نهائی: 1400/04/24 پذیرش: 1400/07/25

doi [10.22055/JRMBS.2021.17268](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17268)

چکیده

در این مقاله، کلاس جدیدی از حالت‌های درهم‌تنیده شبه کیوتریت دو مدی را بر پایه حالت‌های شبه‌همدوس معرفی می‌کنیم. این حالت‌ها به کلاس خاصی از حالت‌های غیرکلاسیکی نور به نام حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده [1] نیز مرتبط هستند، بنابراین نامزد مناسبی برای فرآیندهای اطلاعات کوآنتومی می‌باشند [2]. شایان ذکر است که قبلاً بر پایه این حالت‌ها برهم‌نهی‌های گوناگونی از جمله حالت‌های درهم‌تنیده دو کیوبیتی معرفی و بررسی شده‌اند که شاهی مناسب برای ویژگی‌های ارزنده کوآنتومی آنها می‌باشد [2]. از اینرو با توجه به ارتباط مذکور و شهود ویژگی‌های کنترل‌پذیر غیرکلاسیکی این دسته از حالت‌های کوآنتومی، در این کار به دنبال تجزیه و تحلیل اثر افزودن فوتون به حالت‌های درهم‌تنیده دو کیوتریتی هستیم. برای این منظور، تحلیل جامعی از خصوصیات غیرکلاسیکی آنها، شامل آمار فوتونی و درهم‌تنیدگی با تأکید بر نقش پارامتر جابه‌جایی فاز ارائه می‌کنیم. در همین راستا، برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی از سنجه تلافی تعمیم یافته استفاده می‌کنیم [3] و شرایط ممکن برای بیشینه شدن درهم‌تنیدگی را بررسی می‌کنیم. در مقایسه با برخی موارد که پیش از این بحث شده است، مشاهده می‌کنیم که فرایند افزودن فوتون به حالت‌های دو کیوتریتی، که معادل با انتخاب خاصی از پارامتر جابه‌جایی فاز هست، نقش مهمی را در ظهور اثرات غیرکلاسیکی بازی می‌کند، همچنین ابزار مناسبی برای افزایش و حفظ درهم‌تنیدگی می‌باشد.

کلیدواژه‌گان: حالت‌های شبه‌همدوس، درهم‌تنیدگی، اثر چلانگی، آمار زیر پواسونی، دو-کیوتریت

مقدمه

توسعه و کاربردشان در اپتیک کوآنتومی و محاسبات کوآنتومی فراهم می‌آورد [5-7]. از جمله این حالت‌های غیرکلاسیکی می‌توان به دسته بسیار پرکاربرد و مهمی از آنها با عنوان حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده اشاره کرد که از m بار اعمال متوالی عملگر خلق فوتونی a^\dagger بروی حالت همدوس استاندارد $|\alpha\rangle$ به دست می‌آیند، یعنی $|\alpha, m\rangle \equiv (a^\dagger)^m |\alpha\rangle$ [1]. حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده، اولین بار توسط اگروال و همکارش در سال 1991 معرفی و مورد تجزیه

حالت‌های همدوس¹ (CSs)، دسته‌ای از حالت‌های گاوسی متناسب به نوسانگر هماهنگ ساده کوآنتومی هستند که ارتباط بین مکانیک کلاسیک و کوآنتوم را برقرار می‌کنند [4]. این حالت‌ها نقش کلیدی در اپتیک کوآنتومی دارند [5,6]، از اینرو تلاش‌های فراوانی برای تعمیم این حالت‌ها صورت گرفته است [7-9]. مجموع این تلاش‌ها منجر به تولید دسته‌های مختلف نور با ویژگی‌های غیر کلاسیکی شده و زمینه را برای

* نویسنده مسئول: alireza.dehghani@gmail.com¹Coherent States

همین راستا، حالت شبه‌همدوس زوج و فرد [10]، حالت‌های شبه‌همدوس فوتون‌افزوده و کاهیده [11] و حالت‌های شبه‌همدوس درهم‌تنیده دو مدی [2] معرفی و بررسی شده‌اند.

اگر چه یک کیوبیت (یک سامانه کوآنتومی دو حالته) نامزد بدیهی برای ذخیره و پردازش یک واحد اطلاعات کوآنتومی می‌باشد، اما از نقطه نظر تجربی و نظری می‌بایست امکان استفاده از سامانه‌های کوآنتومی با تعداد بیشتر از دو ویژه‌حالت متعامد را نیز در نظر گرفت. برای نمونه، یک سیستم کوآنتومی d ترازه، تمامی ملاک‌های مورد نیاز برای رایانش کوآنتومی، مثل قابلیت کنترل دقیق، زمان واهمدوسی زیاد و همچنین مقیاس‌پذیری را برآورده می‌کند [12]. در این صورت می‌بایست رایانش کوآنتومی را باید با استفاده از این حالت‌ها، که به آنها کیوتریت و کیودیت می‌گویند، انجام داد [13]. از لحاظ نظری نیز نشان داده شده است که در رمزنگاری کوآنتومی، استفاده از کیودیت و کیوتریت‌ها امنیت فرایند را نسبت به کیوبیت‌ها بالاتر می‌برد [14]. همچنین طرح الگوریتم‌ها و فرایندهای کوآنتومی در بُعد دلخواه باعث می‌شود که درک بهتر و عمیق‌تری از چگونگی کارکرد آنها به دست آوریم [15,16]. یک کیودیت خالص به‌عنوان یک بردار مختلط متعلق به یک فضای هیلبرت d -بعدی C^d می‌باشد که با $2d-1$ پارامتر حقیقی مشخص شده و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\Psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \dots + a_{d-1}|d-1\rangle, \quad 4$$

این رابطه برای تک کیوتریت‌ها (یک سیستم 3 ترازه)، به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$|\Psi\rangle = a_0|\alpha\rangle + a_1|\beta\rangle + a_2|\gamma\rangle. \quad 5$$

و تحلیل فرار گرفت [1]. بعدها زاواتا آن را در آزمایشگاه آشکارسازی کرد [8]. در کنار تعمیم‌های فراوان این حالت‌ها، عثمان و همکارش در سال 2018، برای اولین بار یک مجموعه جدیدی از حالت‌های کوآنتومی به‌نام "حالت‌های شبه‌همدوس" را با استفاده از تعریف مشتق، به‌صورت زیر معرفی کردند [9]:

$$|\alpha, \delta\theta\rangle = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ne^{i\delta\theta} - r \cos \delta\theta) \alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad 1$$

در اینجا $\alpha = re^{i\theta}$ دامنه حالت همدوس و $\delta\theta$ پارامتر جابه‌جایی فاز می‌باشد که نقش مهمی در کنترل اثرات غیرکلاسیکی دارد. M ضریب بهنجار است که با رابطه $\frac{e^{-r^2/2}}{r\sqrt{1+r^2 \sin^2 \delta\theta}}$ برحسب r و $\delta\theta$ به دست می‌آید. این رابطه با انتخاب خاص $\delta\theta = \pi/2$ به حالت زیر تقلیل می‌یابد:

$$|\alpha, \delta\theta = \pi/2\rangle = \frac{ie^{-r^2/2}}{r\sqrt{1+r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad 2$$

از طرفی با توجه به شکل سری حالت همدوس فوتون افزوده، یعنی $|\alpha, m\rangle$ [1]، با انتخاب $m=1$ می‌توان نوشت

$$|\alpha, 1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{1+r^2}} |\alpha\rangle = \frac{e^{-r^2/2}}{re^{i\theta}\sqrt{1+r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad 3$$

لذا داریم $|\alpha, \delta\theta = \pi/2\rangle = e^{-i\theta} |\alpha, m=1\rangle$. بنابراین با انتخاب پارامتر جابه‌جایی فاز $\delta\theta = \pi/2$ حالت‌های شبه‌همدوس با حالت همدوس تک-فوتون افزوده متناظر خواهند شد. این ارتباط، زمینه را برای کاربرد بیشتر این حالت‌ها در حوزه‌های مختلف اپتیک کوآنتومی و نظریه اطلاعات کوآنتومی فراهم می‌کند. در

در ادامه مباحث فوق، ما خصوصیات درهم‌تنیدگی از یک حالت کوآنتومی شامل برهم‌نهی دو کیوتیتری از حالت‌های شبه‌همدوس داده شده در معادله 1 را بررسی می‌کنیم. با استفاده از سنجۀ تلاقی تعمیم‌یافته، خواص درهم‌تنیدگی حالت‌های به‌دست آمده را به‌عنوان تابعی از دامنه‌ها و فاز منبع تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. انتظار داریم که فاکتور $\delta\theta$ نقش مهمی در ویژگی‌های درهم‌تنیدگی و غیرکلاسیکی برهم‌نهی حالت‌های شبه‌همدوس دو مدی داشته باشد و بسته به انتخاب پارامترهای مسأله، به‌دنبال حالت‌های درهم‌تنیده با حداکثر میزان درهم‌تنیدگی و همچنین خصوصیات غیرکلاسیکی قابل کنترل خواهیم بود.

حالت همدوس درهم‌تنیده دو کیوتیتری

یک حالت همدوس درهم‌تنیده دو کیوتیتری با پارامترهای همدوس مختلط را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم [25]:

$$|\Psi\rangle_\phi = \frac{1}{\sqrt{3+2\text{Re}[e^{i\phi}(f_{12}^2+f_{32}^2)+f_{13}^2]}} \times \left[|\alpha, \delta\theta\rangle_1 |\alpha, \delta\theta\rangle_2 + e^{i\phi} |2\alpha, \delta\theta\rangle_1 |2\alpha, \delta\theta\rangle_2 + |3\alpha, \delta\theta\rangle_1 |3\alpha, \delta\theta\rangle_2 \right] \quad 6$$

که در این رابطه $f_{j,k}$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$f_{j,k=1,2,3} = \left\langle j\alpha, \delta\theta \left| k\alpha, \delta\theta \right. \right\rangle = \frac{e^{-\frac{|(j-k)r|^2}{2}}}{jk\sqrt{[1+(jr \sin \delta\theta)^2][1+(kr \sin \delta\theta)^2]}} \times [1+jkr^2(1+\cos^2 \delta\theta) - (j^2 e^{i\delta\theta} + k^2 e^{-i\delta\theta})r^2 \cos \delta\theta] \quad 7$$

مجموعه $\{|\alpha, \delta\theta\rangle, |2\alpha, \delta\theta\rangle, |3\alpha, \delta\theta\rangle\}$ مستقل خطی هستند و فضای هیلبرت سه بعدی $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ را

در مقایسه با یک کیوبیت، یک کیوتیتری فضای هیلبرت بزرگ‌تری دارد؛ متناظر با سیستمی است که حالت‌های آن در فضای هیلبرت سه بعدی قرار دارند و بنابراین می‌توانند برای کدگذاری اطلاعات بیشتری در فرایند اطلاعات و ارتباطات کوآنتومی، استفاده شوند [17].

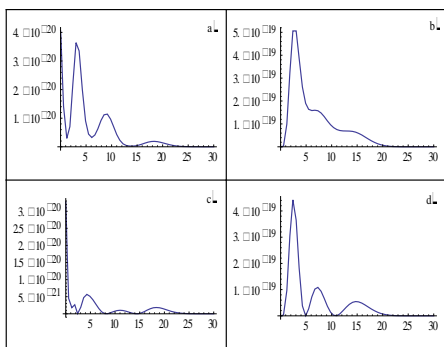
به‌خوبی مشخص است که درهم‌تنیدگی کوآنتومی در ابعاد بالا نه تنها روش نوینی را برای آزمون‌های بنیادی غیر موضعی مکانیک کوآنتوم فراهم می‌آورد، بلکه برای محاسبات کوآنتومی مبتنی بر ابعاد بالا مانند ارتباطات کوآنتومی، تصحیح خطای کوآنتومی و شبیه‌سازی کوآنتومی نیز به‌کار می‌رود [18]. علاوه بر معیارهایی که توسط چاوز و همکاران برای تشخیص درهم‌تنیده بودن یک کیوتیتری ارائه شده است [18]، بیسواس و همکاران نشان دادند که چگونه می‌توان حالت‌های درهم‌تنیده دو-کیوتیتری را از طریق مدهای دو کاواک و با استفاده از درهم‌تنیدگی دو مدۀ چند اتمی، تولید کرد [19]. جعفری‌زاده و همکاران چندین شاهد درهم‌تنیدگی، با استفاده از ماتریس‌های گل‌من، جهت سنجش درهم‌تنیدگی سیستم دوکیوتیتری معرفی و بررسی کرده‌اند [20]. یک چارچوب نظری برای ارتباطات کوآنتومی در مرجع [21] آورده شده که مبادله مستقیم پیام‌ها را با استفاده از حالت دو-مد کیوتیتری گزارش کرده است. همچنین در مرجع [22]، از یک مدار اپتیکی برای ساخت حالت دو-مد کیوتیتری با بیشینه درهم‌تنیدگی شامل فوتون‌های قطبیده استفاده شده است. در مرجع [23] نیز نویسندگان نشان داده‌اند که اندازه‌گیری نوسانات برگشتی می‌تواند برای مقابله با میرایی دامنه واهمدوسی و بازیابی درهم‌تنیدگی دو کیوتیتری مفید باشد. در مرجع [24]، برخی از حالت‌های کیوبیت و کیوتیتری نور مانند حالت درهم‌تنیده چلانده و حالت همدوس مقایسه شده و بعضی ویژگی‌های آن‌ها بررسی شده است.

در این رابطه داریم:

$$A = \left(3 + 2\text{Re} \left[e^{i\varphi} (f_{12}^2 + f_{32}^2) + f_{13}^2 \right] \right)^{-1/2},$$

$$\langle n | j\alpha, \delta\theta \rangle = \frac{(j\alpha)^n [n e^{i\delta\theta} - (jr)^2 \cos \delta\theta] e^{-(jr)^2/2}}{jr \sqrt{n! [1 + (jr)^2 \sin^2 \delta\theta]}}.$$

در شکل 1 تابع توزیع فوتونی $P(n_1, n_2)$ نسبت به $n (= n_1 = n_2)$ ، و با انتخاب $\varphi = 0, \pi$ رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که تابع توزیع فوتونی در امتداد محور افقی n نوسان می‌کند و شاهدی بر غیرکلاسیکی بودن این حالت‌ها است. شکل 1 نشان می‌دهد که تغییرات پارامتر $\delta\theta$ اثر قابل توجهی در این نوسانات دارد. برای نمونه با انتخاب $\delta\theta = 0$ توزیع احتمال فوتون برای هر دو حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0, \pi}$ برای مقادیر معینی از n به صفر می‌رسد، اگرچه این نوسانات دوباره با انتخاب $\delta\theta = \pi/2$ ظاهر می‌شوند. بنابراین اختلاف فاز $\delta\theta$ را می‌توان به‌عنوان پارامتر کلیدی برای کنترل ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi}$ در نظر گرفت.



شکل 1. تابع توزیع تعداد فوتون $P(n_1, n_2)$ برحسب $n = n_1 = n_2$. اشکال (a) و (b) برای $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ و به ترتیب نظیر به انتخاب $\delta\theta = 0, \pi/2$ می‌باشند. اشکال (c) و (d) نیز برای $|\Psi\rangle_{\varphi=\pi}$ و با انتخاب مقادیر یکسان برای $\delta\theta$ هستند.

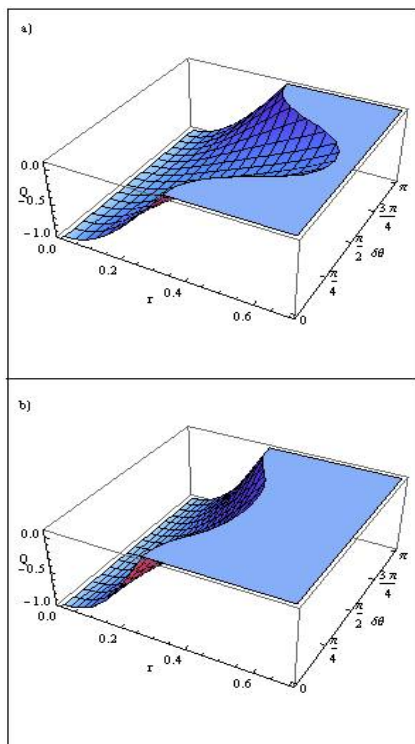
می‌پوشانند؛ لذا $|\Psi\rangle_{\varphi}$ می‌تواند به شکل دو کیوتریت بازنویسی شود. ضریب $e^{i\varphi}$ عددی مختلط است و برای سادگی در ادامه $\varphi = 0, \pi$ را انتخاب می‌کنیم. انتخاب حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0, \pi}$ کاملاً اختیاری بوده و صرفاً به این خاطر است که به‌ازای این مقادیر از متغیر φ ویژگی‌های غیرکلاسیکی قابل ملاحظه‌ای بروز می‌کنند. شایان ذکر است که با انتخاب $\delta\theta = \pi/2$ ، حالت $|\Psi\rangle_{\varphi}$ را می‌توان به صورت برهم‌نهی خطی درهم‌تنیده دو کیوتریتی از حالت‌های همدوس فوتون-افزوده در نظر گرفت. این حالت‌ها را می‌توان به ترتیب با اثر دو عملگر خلق a^\dagger و b^\dagger روی مدهای اول و دوم حالت‌های همدوس درهم‌تنیده شبه-کیوتریت به دست آورد، از این رو حالت $|\Psi\rangle_{\varphi}$ را می‌توان به‌عنوان برهم‌نهی دو کیوتریتی از حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده در نظر گرفت. در ادامه برخی از ویژگی‌های آماری این حالت‌ها را بررسی می‌کنیم.

تابع توزیع تعداد فوتون

احتمال یافتن فوتون یک معیار مهم برای بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی یک حالت می‌باشد. رفتار نوسانی این تابع دلیل بر غیر کلاسیکی بودن حالت کوآتومی دارد [26 و 27]. تابع احتمال یافتن n فوتون در یک حالت اختیاری $|\Psi\rangle$ ، با رابطه $P = |\langle n | \Psi \rangle|^2$ داده می‌شود [28] که ناحیه همپوشانی بین حالت‌های $|n\rangle$ و $|\Psi\rangle$ را تعیین می‌کند. احتمال یافتن n_1 فوتون در مد اول و n_2 فوتون در مد دوم از حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(n_1, n_2) = \left| \langle n_1, n_2 | \Psi \rangle_{\varphi} \right|^2 = A \left| \langle n_1 | \alpha, \delta\theta \rangle \langle n_2 | \alpha, \delta\theta \rangle + e^{i\varphi} \langle n_1 | 2\alpha, \delta\theta \rangle \langle n_2 | 2\alpha, \delta\theta \rangle + \langle n_1 | 3\alpha, \delta\theta \rangle \langle n_2 | 3\alpha, \delta\theta \rangle \right|^2. \quad 8$$

به‌منظور تبیین دلیل انتخاب $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ نسبت به سایر ترکیبات داده شده در رابطه 6، پارامتر مندل نظیر شبه کیوتریت $|\Psi\rangle_{\varphi}$ با φ های متفاوت در شکل 3 داده شده است. شکل 3 گویای این واقعیت است که آمار زیرپواسونی شبه‌کیوتریت $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ در مقایسه با سایر ترکیبات همواره غالب است.



شکل 2. نمودار پارامتر مندل Q برای مدهای $i = 1, 2$ و مقادیر مختلف r و $\delta\theta$ ، به ترتیب برای a) $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ و b) $|\Psi\rangle_{\varphi=\pi}$.

آمار زیر-پواسونی فوتونها

در این قسمت، آمار فوتونی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ را بررسی می‌کنیم. برای این منظور از پارامتر مندل که به‌صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم [29]

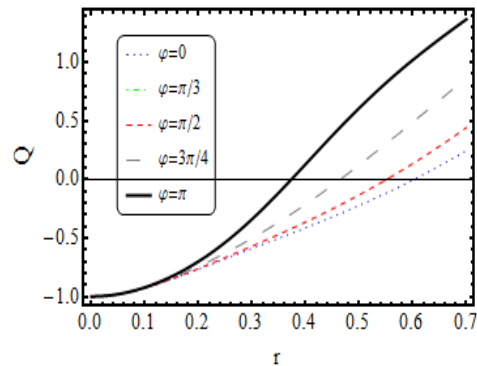
$$Q_i := \frac{\langle N_i^2 \rangle - \langle N_i \rangle^2}{\langle N_i \rangle} - 1, \quad (i = 1, 2) \quad 9$$

پارامتر مندل برای تعیین میزان انحراف از آمار پواسونی ($Q_i = 0$) استفاده می‌شود. به عبارت دیگر اگر $Q_i < 0$ (> 0) باشد، آمار زیر پواسونی (فوق پواسونی) است [29, 30]. آمار زیر پواسونی یک ویژگی غیر کلاسیکی برای حالت‌های میدان می‌باشد [28]. با محاسبه مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای N_i و N_i^2 ، به راحتی می‌توان پارامتر مندل Q_i را برای حالت‌های همدوس درهم‌تنیده دو کیوتریتی به دست آورد. لازم به ذکر است که پارامتر مندل نظیر هر دو مد ($i = 1, 2$) یکسان هستند، لذا در ادامه از ذکر اندیس برای پارامتر مندل صرف نظر کرده‌ایم، یعنی $Q_1 = Q_2 = Q$.

شکل 2 پارامتر مندل Q نظیر هر دو مد را برای حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ نسبت به r ($=|\alpha|$) و $\delta\theta$ نشان می‌دهد. این شکل به‌طور واضح آمار زیر پواسونی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ را به‌ازای هر مقداری از $\delta\theta$ و برای مقادیر کوچک r به‌نمایش می‌گذارد. واضح است که با انتخاب $\delta\theta = \pi/2$ عمق و بازه غیرکلاسیکی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ به‌طور قابل ملاحظه‌ای از هر مقدار دیگر است و زمانی که r بزرگ می‌شود، آمار به فرا-پواسونی میل می‌کند. همچنین می‌توان دید که حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ غیرکلاسیکی‌تر از حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=\pi}$ می‌باشد.

حال با انتخاب $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ و درحالی‌که پارامترهای فاز را ثابت اختیار کرده‌ایم، می‌توان چلانندگی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ را برای عملگرهای کوادراتور $X_{1(2)}$ برحسب تابعی از α_1 و α_2 تحلیل کرد، این نتایج در شکل‌های 4 و 5 و برای $\delta\theta = 0, \pi/2$ و $\varphi = 0$ رسم شده‌اند. در شکل‌های $3a$ و $4a$ می‌بینیم که با انتخاب $\delta\theta = 0$ چلانندگی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ فقط برای یک ناحیه کوچکی از α_1 و α_2 در هر دو مؤلفه $X_{1(2)}$ ، اتفاق می‌افتد. به‌علاوه می‌توان دید که نواحی چلانندگی نسبت به خط $\alpha_2 = 0$ برای مؤلفه X_1 و نسبت به خط $\alpha_1 = 0$ برای مؤلفه X_2 متقارن هستند.

از طرفی دیگر با ثابت نگه داشتن پارامتر فاز $\delta\theta = \pi/2$ ، چلانندگی و میزان غیرکلاسیکی بودن حالت‌ها افزایش می‌یابد، هرچند که این افزایش با رشد پارامتر $|\alpha|$ کاهش می‌یابد. نتیجه می‌گیریم که برای هر زاویه فازی و در حد دامنه‌های بزرگ، حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ تقریباً کمترین میزان چلانندگی را دارد. شایان ذکر است که دلیل انتخاب مقادیر خاص برای اختلاف فاز $\delta\theta = 0, \pi/2$ ظاهر شدن ویژگی‌های غیرکلاسیکی است که پیش‌تر برای این مقادیر در معیارهای پارامتر مندل و تابع توزیع فوتونی آشکار شده بود.



شکل 3. نمودار پارامتر مندل Q برای مدهای $i = 1, 2$ به‌ازای $\delta\theta = \pi/2$ و مقادیر مختلف φ .

چلانندگی

چلانندگی معیار دیگری برای تعیین غیرکلاسیکی بودن یک حالت کوآنتومی است [31,32]. برای مطالعه ویژگی چلانندگی حالت‌های $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ ، عملگرهای کوادراتور دومدبی بعد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \right), \quad 10-1$$

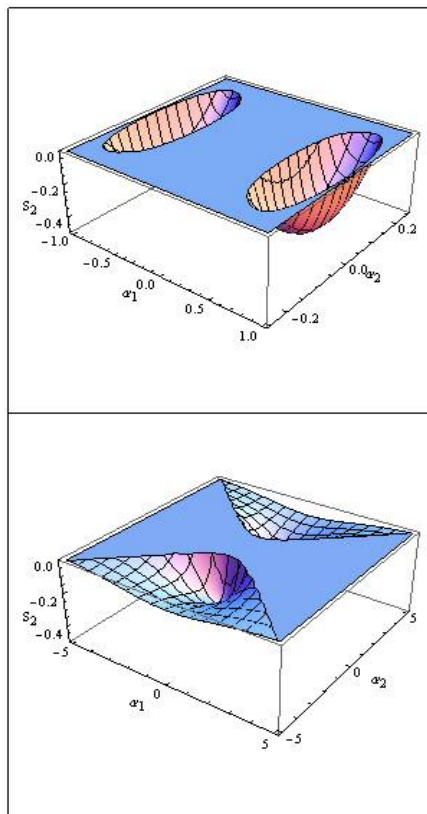
$$X_2 = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \right), \quad 10-2$$

که \hat{a}_1 و \hat{a}_2 و \hat{a}_1^\dagger و \hat{a}_2^\dagger به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق مد اول (دوم) میدان هستند. با در نظر گرفتن رابطه جابه‌جایی $[X_1, X_2] = i/2$ و رابطه عدم قطعیت $(\Delta X_1)^2 (\Delta X_2)^2 \geq 1/16$ ، شرط وجود چلانندگی دو مد به‌صورت زیر بیان می‌شود [28]:

$$(\Delta X_1)^2 < 1/4 \text{ or } (\Delta X_2)^2 < 1/4. \quad 11$$

بر همین اساس می‌توان پارامتر چلانندگی را به‌صورت $S_i = 4(\Delta X_i)^2 - 1$ تعریف کرد [33]، بنابراین شرط وجود چلانندگی دو مدی به‌صورت زیر خواهد بود

$$S_1 < 0 \text{ or } S_2 < 0. \quad 12$$

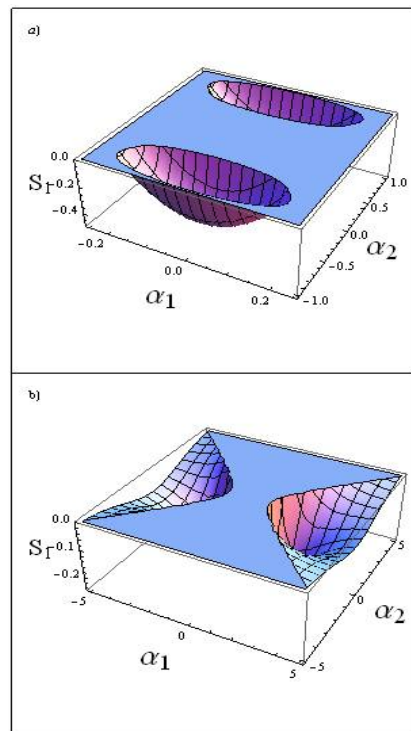


شکل 5. چلانگی S_2 برای حالت همدوس شبه-کیوتریت دومدی برای عملگر کوادراتور X_2 نسبت به α_1 و α_2 نظیر حالت $\delta\theta = \pi/2(b, \delta\theta = 0(a); |\Psi\rangle_{\varphi=0}$.

محاسبات نشان می‌دهد که حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=\pi}$ ، به‌ازای $\delta\theta = 0$ دارای هیچ گونه چلانگی در عملگرهای $X_{1(2)}$ نمی‌باشد در حالی‌که با انتخاب $\delta\theta = \pi/2$ رفتار پارامترهای چلانگی برای هر دو حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ مشابه است.

درهم‌تنیدگی

در این قسمت، درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس شبه-کیوتریت دومدی داده شده در رابطه 6 را با استفاده از سنجه تلاقی تعمیم یافته بررسی می‌کنیم. در حالت کلی یک حالت خالص دوجزئی اختیاری که عضوی از



شکل 4. چلانگی S_1 برای حالت همدوس شبه-کیوتریت دو مدی برای عملگر کوادراتور X_1 نسبت به α_1 و α_2 نظیر حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$: $\delta\theta = \pi/2(b, \delta\theta = 0(a)$

همچنین از شکل‌های 4b و 5b، واضح است که با انتخاب $\delta\theta = \pi/2$ محدوده غیرکلاسیکی حالت‌ها بیشتر می‌شود. این بدین دلیل است که برای مقادیر مذکور، حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ می‌تواند همانند برهم‌نهی از یک حالت همدوس درهم‌تنیده شبه‌کیوتریت فوتون افزوده دو مد در نظر گرفته شود. بنابراین با انتخاب زاویه فاز $\delta\theta = \pi/2$ چلانگی افزایش می‌یابد (یادآوری می‌شود چلانگی با افزودن فوتون به حالت‌های همدوس، افزایش می‌یافت).

$$v = -\frac{1}{f_{12}}; \quad |N_1| = \sqrt{\frac{|f_{12}|^2}{1-|f_{12}|^2}},$$

$$\lambda = -\frac{\bar{f}_{12}}{f_{13}\bar{f}_{12} + [f_{13}\bar{f}_{12} - f_{23}]|N_1|^2},$$

$$\mu = -\frac{1 + \lambda f_{13}}{f_{12}},$$

$$|N_2| = (1 + 2\text{Re}[\mu f_{12} + \lambda f_{13} + \bar{\mu}\lambda f_{23} + |\mu|^2 + |\lambda|^2])^{-1/2}$$

حال با قرار دادن این رابطه‌ها در رابطه 7، به راحتی می‌توان $|\Psi\rangle_\phi$ را برحسب پایه‌های متعامد بنویسیم:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_\phi = & (3 + 2\text{Re}[e^{i\phi}(f_{12}^2 + f_{32}^2) + f_{13}^2])^{-1/2} \\ & \times \left[(1 + e^{i\phi}f_{12}^2 + \frac{(1 + \mu f_{12})^2}{\lambda^2})|e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \right. \\ & - \frac{1 + \mu f_{12}}{\lambda^2 N_2} (|e_3\rangle \otimes |e_2\rangle + |e_2\rangle \otimes |e_3\rangle) \\ & + \frac{(\lambda^2 e^{i\phi} + \mu^2)f_{12}^2}{\lambda^2 N_1^2} |e_2\rangle \otimes |e_2\rangle \\ & \left. + \frac{1}{\lambda^2 N_2^2} |e_3\rangle \otimes |e_3\rangle \right. \\ & - \frac{(e^{i\phi}\lambda^2 + \mu^2)f_{12}^2 + f_{12}\mu}{\lambda^2 N_1} (|e_1\rangle \otimes |e_2\rangle + |e_2\rangle \otimes |e_1\rangle) \\ & \left. + \frac{f_{12}\mu}{\lambda^2 N_2 N_1} (|e_1\rangle \otimes |e_3\rangle + |e_3\rangle \otimes |e_1\rangle) \right] \quad 17 \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان سنجه تلافی تعمیم‌یافته حالت دو-کیوتریت را با توجه به رابطه 14، به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} C^{|\Psi\rangle_\phi} = & 2 \left[\sum_{i < j}^2 \sum_{k < l}^2 |a_{ik} a_{jl} - a_{il} a_{jk}| \right]^{\frac{1}{2}} \quad 18 \\ = & 2 \left[|a_{00} a_{11} - a_{01} a_{10}|^2 + |a_{00} a_{21} - a_{01} a_{20}|^2 \right] \end{aligned}$$

فضای هیلبرت $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^{N_1} \otimes \mathbb{C}^{N_2}$ می‌باشد، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle, \quad 13$$

که $|e_{i=1,2,\dots,N_1}\rangle$ و $|e_{j=1,2,\dots,N_2}\rangle$ به ترتیب پایه‌های متعامد و بهنجار از فضای هیلبرت \mathbb{C}^{N_1} و \mathbb{C}^{N_2} می‌باشد. برای این حالت سنجه تلافی به صورت زیر داده می‌شود: [3]

$$C^{|\Psi\rangle} = 2 \sqrt{\sum_{i < j}^{N_1} \sum_{k < l}^{N_2} |a_{ik} a_{jl} - a_{il} a_{jk}|^2}. \quad 14$$

مقدار بیشینه $C^{|\Psi\rangle}$ برابر $\sqrt{2(N-1)/N}$ است که $N = \min(N_1, N_2)$ می‌باشد. پس مطابق این سنجه، شبه کیوتریت داده شده در رابطه 6 درهم‌تنیده است اگر در نامساوی زیر صدق کند:

$$0 \leq C^{|\Psi\rangle_\phi} \leq \sqrt{4/3}, \quad 15$$

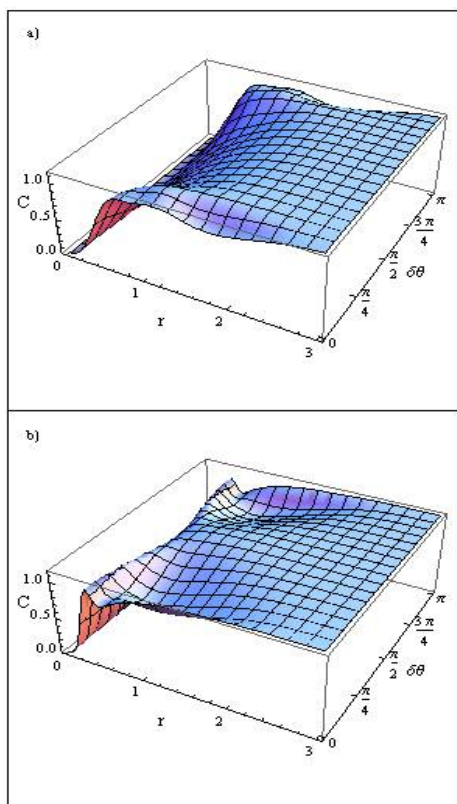
شرط $C^{|\Psi\rangle_\phi} = 0$ به یک حالت جداپذیر اشاره داشته و $C^{|\Psi\rangle_\phi} = \sqrt{4/3}$ یک حالت با بیشینه درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد. از آنجایی که حالت‌های پیوسته شبه همدوس $|\alpha, \delta\theta\rangle$ متعامد نیستند، با استفاده از روش گرام-اشمیت [3] پایه‌های متعامد و بهنجار $\{|e_3\rangle, |e_2\rangle, |e_1\rangle\}$ متناظر با هر دو زیرسامانه را به صورت زیر می‌سازیم

$$|0\rangle \equiv |\alpha, \delta\theta\rangle, \quad 16-1$$

$$|1\rangle \equiv N_1 (|\alpha, \delta\theta\rangle + v|2\alpha, \delta\theta\rangle), \quad 16-2$$

$$|2\rangle \equiv N_2 (|\alpha, \delta\theta\rangle + \mu|2\alpha, \delta\theta\rangle + \lambda|3\alpha, \delta\theta\rangle). \quad 16-3$$

که با استفاده از شرایط متعامد-بهنجارش، یعنی $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ می‌توانیم ضرایب بالا را به صورت زیر به دست آوریم:



شکل 6. نمودار سنجه تلافی برحسب r و مقادیر مختلف $\delta\theta$ و برای حالت‌های $a: |\psi\rangle_0$ و $b: |\psi\rangle_\pi$.

همچنین از شکل‌های 6a و 6b واضح است که درهم‌تنیدگی همواره برای حالت‌های $|\psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ و برای هر مقداری از r و $\delta\theta$ وجود دارد؛ با این وجود با کاهش r نواحی جداپذیر ظاهر می‌شوند، یعنی:

$$\lim_{r \rightarrow 0} C^{|\psi\rangle_0} = \lim_{r \rightarrow 0} C^{|\psi\rangle_\pi} = 0 \quad 19$$

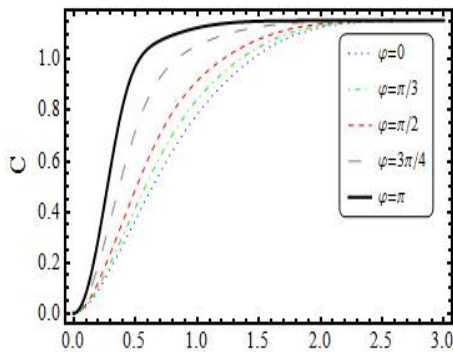
نتیجهٔ اخیر ریشه در این واقعیت دارد که در حد $r \rightarrow 0$ و با استناد به رابطه 1 و 7 داریم:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\alpha, \delta\theta\rangle = e^{i\delta\theta} |1\rangle - \cos \delta\theta |0\rangle, \quad 1-20$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_{jk} = \frac{1}{jk}, \quad 2-20$$

$$\begin{aligned} & + |a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}|^2 + |a_{00}a_{12} - a_{02}a_{10}|^2 \\ & + |a_{00}a_{22} - a_{02}a_{20}|^2 + |a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}|^2 \\ & + |a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}|^2 + |a_{01}a_{22} - a_{02}a_{21}|^2 \end{aligned}$$

در شکل 6، تغییرات سنجه تلافی C برای حالت‌های $|\psi\rangle_{\varphi=0}$ و $|\psi\rangle_{\varphi=\pi}$ ، نسبت به r و برای مقادیر مختلف $\delta\theta$ رسم شده است. این نکته قابل توجه است که این حالت‌ها برای هر مقداری از r و $\delta\theta$ درهم‌تنیده می‌باشند. از شکل 6 مشاهده می‌شود که سنجه تلافی تعمیم‌یافته برای حالت‌های $|\psi\rangle_{\varphi=0,\pi}$ رفتار مشابهی دارد که از صفر شروع می‌شوند و ناگهان در ناحیه کوچکی از r ($r < 0.5$) افزایش می‌یابند و سرانجام برای تمام مقادیر $\delta\theta$ به مقدار بیشینه $\sqrt{4/3}$ می‌رسند. به‌علاوه آهنگ افزایش درهم‌تنیدگی به‌ازای $\delta\theta = \pi/2$ تابعی یکنواخت از r است، در یک چنین شرایطی حالت‌های متناظر با هر کدام از زیر سیستم‌های 1 و 2 را همانند حالت همدوس تک-فوتون افزوده $|\alpha, m=1\rangle$ در نظر گرفته‌ایم. این نشان می‌دهد که اختلاف فاز $\delta\theta$ نقش اساسی در درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس شبه‌کیوتربیت دو مدی دارد.



شکل 7. نمودار سنجه تلافی برحسب r به ازای $\delta\theta = \pi/2$ و برای مقادیر مختلف φ .

بحث و نتیجه‌گیری

در اینجا ما دسته جدیدی از حالت‌های غیر کلاسیکی نور را به صورت برهم‌نهی دو مُده از حالت‌های شبه همدوس $|\alpha, \delta\theta\rangle$ معرفی کردیم. ارتباط این حالت‌های کوآنتمی را با دسته خاصی از حالت‌های غیر کلاسیکی بنام حالت‌های فوتون افزوده مورد بحث قرار دادیم. در ادامه با ذکر کارهای اخیر انجام شده در راستای معرفی ترکیب‌های مختلف از این حالت‌های کوآنتمی جدید و ذکر اهمیت آنها، برهم‌نهی جدیدی از حالت‌های شبه‌همدوس به فرم ترکیب‌های دو کیوتریتی از آنها را معرفی کردیم. با توجه به ارتباط حالت‌های شبه‌همدوس با حالت‌های غیر کلاسیکی فوتون افزوده نشان دادیم که انتخاب پارامتر جابه‌جایی فاز $\delta\theta = \pi/2$ معادل افزودن فوتون است. از اینرو به دنبال تأثیر افزودن فوتون در ترکیب‌های دو کیوتریتی ویژگی‌های غیر کلاسیکی این حالت‌ها را از قبیل تابع توزیع تعداد فوتونی، آمار فوتونی، چلانگی و درهم‌تنیدگی را ارزیابی و بررسی کردیم. از تحلیل شکل‌ها می‌توان دریافت که افزودن فوتون سبب افزایش ویژگی‌های کوآنتمی شده و حالت‌هایی با بیشینه درهم‌تنیدگی را پدید می‌آورد.

از اینرو در حد مذکور، شبه‌کیوتریت داده شده در رابطه 6 را می‌توان به صورت ضرب تانسوری از حالت‌های زیر سیستم-1 در حالت‌های زیر سیستم-2 نوشت، یعنی:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\Psi\rangle_{\varphi} = \frac{2+e^{i\varphi}}{\sqrt{3+2\operatorname{Re}\left[\frac{10}{36}e^{i\varphi}+\frac{1}{9}\right]}} \times \left[\left(e^{i\delta\theta} |1\rangle_1 - \cos \delta\theta |0\rangle_1 \right) \otimes \left(e^{i\delta\theta} |1\rangle_2 - \cos \delta\theta |0\rangle_2 \right) \right], \quad 21$$

به عبارت دیگر در حد $r \rightarrow 0$ و به ازای هر مقدار دلخواه از متغیرهای φ و $\delta\theta$ حالت $|\Psi\rangle_{\varphi}$ جداپذیر بوده و فاقد درهم‌تنیدگی می‌باشد. برای مقادیر بزرگ دامنه α مقدار سنجه تلافی متناظر حالت‌های $|\Psi\rangle_0$ و $|\Psi\rangle_{\pi}$ برابر $\sqrt{4/3}$ می‌شود. همچنین شکل 6b نشان می‌دهد که درهم‌تنیدگی برای $\delta\theta = \pi/2$ خیلی سریعتر به مقدار بیشینه می‌رسد و ثابت باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، خانواده‌ای از حالت‌های همدوس درهم‌تنیده شبه-کیوتریت دومی وجود دارند که مانند فوتون اضافی‌های دومی به حفظ درهم‌تنیدگی کمک می‌کنند.

در ادامه به منظور ارزیابی نقش پارامتر φ در خصوص درهم‌تنیدگی شبه‌کیوتریت $|\Psi\rangle_{\varphi}$ ، سنجه تلافی تعمیم‌یافته داده شده در رابطه 18 را برای φ های متفاوت در شکل 7 ترسیم کرده‌ایم، در حالی که $\delta\theta = \pi/2$ اختیار شده است. همان‌طور که شکل 7 نشان می‌دهد، درهم‌تنیدگی شبه‌کیوتریت $|\Psi\rangle_{\varphi=\pi}$ از همه ترکیبات $|\Psi\rangle_{\varphi}$ داده شده در رابطه 6 با φ های متفاوت همواره بیشتر است.

General 38 6777 (2005).
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/30/011>

[4] E. Schrodinger, Quantization as an eigenvalue problem, *Annals of Physics* **79** 361 (1926).
<https://doi.org/10.1002/andp.19263840404>

[5] R.J. Glauber, coherent and incoherent states of the radiation field, *Physical Review* **131** 2766 (1963).
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766>

[6] E.C.G. Sudarshan, Equivalence of Semi classical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams, *Physical Review Letter* **10** 277 (1963).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.277>

[7] V.V. Dodonov, I.A. Malkin, V.I. Man'ko, Even And Odd Coherent States And Excitation of a Singular Oscillator, *Physica* **72** 597 (1974).
[https://doi.org/10.1016/0031-8914\(74\)90215-8](https://doi.org/10.1016/0031-8914(74)90215-8)

[8] A. Zavatta, S. Viciani, M. Bellini, Quantum-to-Classical Transition with Single-Photon-Added Coherent States of Light, *Science* **306** 660 (2004).
[10.1126/science.1103190](https://doi.org/10.1126/science.1103190)

[9] A. Othman, D. Yevick, Quantum Properties of the Superposition of Two Nearly Identical Coherent States, *International Journal of Theoretical Physics* **57** 2293 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10773-018-3752-0>

[10] A. Dehghani, B. Mojaveri, R. Jafarzadeh Bahrbeig, Near'-Cat States: Nonclassicality and Generation, *Journal of Russian Laser Research* **40** 121 (2019).
<https://doi.org/10.1007/s10946-019-09779-3>

[11] A. Dehghani, B. Mojaveri, A.A. Alenabi, Excitation and depression of coherent state of the simple harmonic oscillator, *Journal of Mathematical Physics* **60** 083501 (2019).
<https://doi.org/10.1063/1.5055915>

[12] X. Xiao and Yan-Ling Li, Protecting qutrit-qutrit entanglement by weak measurement and reversal, *European*

همانطور که قبلاً نیز اشاره کردیم انتخاب مقادیر $\varphi = 0, \pi$ و $\delta\theta = \pi/2$ برای شبه کیوتریت $|\Psi\rangle_\varphi$ داده شده در رابطه 6 و تحلیل ویژگی‌های کوآنتومی این دسته خاص از ترکیب‌های دوکیوتریتی به این خاطر است که اولاً به ازای $\delta\theta = \pi/2$ ، شبه کیوتریت $|\Psi\rangle_\varphi$ به حالت فوتون افزوده دو کیوتریتی استاندارد تبدیل می‌شود. لذا از این منظر می‌توان نقش افزودن فوتون به سیستم‌های دو کیوتریتی را مطرح و بررسی کرد که یکی از اهداف اصلی این مقاله بود. ثانیاً به ازای $\varphi = 0, \pi$ نشان دادیم که آمار زیرپواسونی حالت $|\Psi\rangle_{\varphi=0}$ ، به عنوان یکی از اصلیتین ویژگی‌های غیرکلاسیکی، در مقایسه با سایر ترکیبات $|\Psi\rangle_\varphi$ با φ های متفاوت همواره غالب است (شکل 3 را ببینید). در همین راستا و با مراجعه به شکل 7 نشان دادیم که درهم‌تنیدگی شبه کیوتریت $|\Psi\rangle_{\varphi=\pi}$ در مقایسه با سایر ترکیبات $|\Psi\rangle_\varphi$ با φ های متفاوت همواره بیشتر است. بنابراین این دسته از حالت‌های غیرکلاسیکی به دلیل غنای ویژگی‌های کوآنتومی می‌تواند در کنار سایر ترکیبات دوکیوتریتی داده شده در مراجع [24 و 25] به عنوان نامزدهایی مناسب با قابلیت کنترل ویژگی‌های کوآنتومی برای پروتکل‌های اطلاعات کوآنتومی و اپتیک غیر خطی باشند.

مرجع‌ها

[1] G.S. Agarwal, K. Tara, Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state, *Physical Review A* **43** 492 (1991).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.492>

[2] A. Dehghani, B. Mojaveri, M. Aryaie, A.A. Alenabi, Superposition of two-mode "Near" coherent states: non-classicality and entanglement, *Quantum Information Processing* **18** 148 (2019).
<https://doi.org/10.1007/s11128-019-2216-7>

[3] S.J. Akhtarshenas, Concurrence Vectors in Arbitrary Multipartite Quantum Systems, *Journal of Physics A: Mathematical and*

- Entangled States, *Modern Physics Letters B* **23** 2993 (2009).
<https://doi.org/10.1142/S0217984909021065>
- [22] J. Joo, T. Rudolph, B.C. Sanders, A heralded two-qutrit entangled state, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **42** 114007 (2009).
<https://doi.org/10.1088/0953-4075/42/11/114007>
- [23] X. Xiao and Yan-Ling Li, Protecting qutrit entanglement by weak measurement and reversal, *European Physical Journal D* **67** 204 (2013).
<https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-40036-3>
- [24] G. Najarbashi, S. Mirzaei, Recent advances in Wigner function approaches, *Optics Communications* **377** 33 (2016).
<https://doi.org/10.1063/1.5046663>
- [25] Y. Maleki, B. Ahansaz, Quantum correlations in qutrit-like superposition of spin coherent states, *Laser Physics Letters* **16** 075205 (2019).
<https://doi.org/10.1088/1612-202X/ab12e5>
- [26] W. Schleich, J.A. Wheeler, Oscillations in photon distribution of squeezed states and interference in phase space, *Nature* **326** 574 (1987). <https://doi.org/10.1038/326574a0>
- [27] W. Schleich, J.A. Wheeler, Oscillations in photon distribution of squeezed states, *Journal of Optical Society of America B* **4** 1715 (1987).
<https://doi.org/10.1364/JOSAB.4.001715>
- [28] C. Gerry, P. Knight, P.L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge, Cambridge University Press (2004).
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511791239>
- [29] X. Zou, X.L. Mandel, Photon-antibunching and sub-Poissonian photon statistics, *Physical Review A* **41** 475 (1990).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.475>
- [30] Y. He, E. Barkai, Super- and sub-Poissonian photon statistics for single molecule spectroscopy, *Journal of Chemical Physics* **122** 184703 (2005).
<https://doi.org/10.1063/1.1888388>
- [31] V.V. Dodonov, Nonclassical states in quantum optics: A 'squeezed' review of the *Physical Journal D* **67** 204 (2013).
<https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-40036-3>
- [13] A.A. Popov, E.O. Kiktenko, A.K. Fedorov, V.I. Man'ko, Information processing using three-qubit and qubit-qutrit encodings of noncomposite quantum systems, *Journal of Russian Laser Research* **37** 581 (2016).
<https://doi.org/10.1007/s10946-016-9610-8>
- [14] Th. Durt, N.J. Cerf, N. Gisin, M. Żukowski, Security of Quantum Key Distribution with Entangled Qutrits, *Physical Review A* **67** 012311 (2003).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.012311>
- [15] S. Gröblacher, T. Jennewein, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger, Experimental quantum cryptography with qutrits, *New Journal of Physics* **8** 75 (2006).
<https://doi.org/10.1088/1367-2630/8/5/075>
- [16] Y. Wang, Z. Hu, B.C. Sanders, S. Kais, Qudits and High-Dimensional Quantum Computing, *Frontiers in Physics* **8** 589504 (2020).
<https://doi.org/10.3389/fphy.2020.589504>
- [17] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Teleportation, Bell's inequalities and inseparability, *Physics Letters A* **223** 1 (1996).
[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(96\)00639-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00639-1)
- [18] Carlton M. Caves, Gerard J. Milburn, Qutrit entanglement, *Optics Communications* **179** 439 (2000).
[https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(99\)00693-8](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(99)00693-8)
- [19] A. Biswas, G.S. Agarawal, Preparation of W, GHZ, and two-qutrit states using bimodal cavities, *Journal of Modern Optics* **51** 1627 (2004).
<https://doi.org/10.1080/09500340408232477>
- [20] M.A. Jafarizadeh, Y. Akbari, N. Behzadi, Two-qutrit entanglement witnesses and Gell-Mann matrices, *European Physical Journal D* **47** 283 (2008).
<https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00041-3>
- [21] Ling-Ling Zhang and You-Bang Zhan, Quantum Dialogue by Using the Two-Qutrit

first 75 years, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **4** 1:R1 (2002).
<https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/1/201>

[32] D. Afshar, A. Anbaraki, Nonclassical properties and entanglement of superposition of two-mode separable nonlinear coherent states, *Journal of Optical Society of America B* **33** 558 (2016).
<https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.000558>

[33] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco, P.L. Knight, Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation, *Physical Review A* **45** 6570 (1992).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.6570>