

Thermodynamic Geometry of an ideal gas with Taam-Dancoff deformed statistics

Hosein Mohammadzadeh^{1,*}, Zahra Ebadi¹, Ramin Roozehdar Mogaddam², Mehdi Amiri¹

¹Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

² Department of Physics, Faculty of Basic Science, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Received: 30.12.2019 Revised: 16.10.2021 Accepted: 23.11.2021

Doi link: [10.22055/jrmb.2022.17343](https://doi.org/10.22055/jrmb.2022.17343)

Abstract

We consider the thermodynamic properties of a system with particles obeying bosonic and fermionic Taam-Dancoff oscillator algebra. We construct the thermodynamic parameters space and using the metric elements of this space, we work out a quantity which is called the thermodynamic curvature. We will show that the statistical intrinsic interaction of deformed bosons (fermions) is attractive (repulsive) in full physical range and for all values of deformation parameter and deduce that the deformation parameter does not affect the statistical intrinsic interaction. Using the singular points of curvature, we obtain the deformation parameter dependent critical value of fugacity for bosonic system. We show that the singular points coincide with the condensation phase transition points of deformed gas.

Keywords: Taam-Dancoff oscillator, Thermodynamic curvature, Condensation

هندسه ترمودینامیکی گاز ایده‌ال با آمار دگرگون تام-دانکوف

حسین محمدزاده^{۱*}، زهرا عبادی^۱، رامین روزه دار مقدم^۲، مهدی امیری^۱

^۱گروه آموزشی فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

^۲گروه آموزشی فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹ ویرایش نهائی: ۱۴۰۰/۰۷/۲۴ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۰۲

Doi link: [10.22055/jrmb.2022.17343](https://doi.org/10.22055/jrmb.2022.17343)

چکیده

خواص ترمودینامیکی سیستمی را که ذرات آن از جبر نوسان گر تام-دانکوف بوزونی و فرمیونی تبعیت می‌کند، مطالعه می‌کنیم. فضای پارامترهای ترمودینامیکی را بنا می‌کنیم و با استفاده از عناصر متریک این فضا، کمیتی موسوم به انحای ترمودینامیکی را محاسبه می‌کنیم. نشان خواهیم داشت که برهم‌کنش آماری ذاتی ذرات دگرگون بوزونی (فرمیونی) در تمام ناحیه فیزیکی و به‌ازای تمام مقادیر پارامتر دگرگونی، جاذب (دافع) است و بنابراین پارامتر دگرگونی خاصیت برهم‌کنش آماری ذاتی را تغییر نمی‌دهد. با استفاده از نقاط تکینگی انحنا، مقدار گریزندگی بحرانی وابسته به پارامتر دگرگونی را برای سیستم بوزونی دگرگون شده به‌دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که این تکینگی بر نقاط گذار فاز چگالش گاز ایده‌ال بوزونی دگرگون شده منطبق است.

کلیدواژگان: نوسان گر تام-دانکوف، انحای ترمودینامیکی، چگالش

مقدمه

هر جفت ذره می‌تواند ضریب فاز اختیاری کسب کند که این ذرات انیون نامیده شدند [۶]. این ذرات رفتاری بین بوزون‌ها و فرمیون‌ها دارند [۷]. آمارهای میانی طرد کسری [۸]، آمار جتیل [۹] و آمار پلی کروناکوس [۱۰] همه به‌نوعی جزء آمارهای مبتنی بر تعمیم اصل طرد پائولی هستند. آمارهای میانی جدیدی نیز بر اساس روابط عملگرهای خلق و فنا با استفاده از q -حسابان و qp -حسابان معرفی شده‌اند که می‌توان از کیون‌ها، q -دگرگون‌ها، تام-دانکوف، qp -دگرگون‌ها و ... نام برد [۱۱-۱۳].

در سال‌های گذشته، استفاده از سیستم‌های نوسانی دگرگون یکی از روش‌های مناسب برای توصیف رفتارهای غیر خطی مانند اندرکنش کوانتومی در

از دیدگاه مکانیک آماری، ذرات به‌طور متداول به دو دسته بوزونی و فرمیونی تقسیم‌بندی می‌شوند [۱] که هر کدام ویژگی‌های خاص خود را دارند [۲-۳]. عملگر خلق و فنا بوزونی در رابطه جابه‌جایی شناخته شده‌ای صدق می‌کنند، در حالی که ذرات فرمیونی دارای عملگرهای خلق و فنا می‌باشند که در رابطه پاد جابه‌جایی آشنایی صدق می‌کند [۴]. همچنین تابع موج بس ذره‌ای ذرات بوزونی تحت جای‌گشت هر زوج ذره متقارن است حال آنکه تابع موج فرمیون‌ها پادمقارن است. فیزیک‌پیشه‌ها برای توصیف اثر کوانتومی کسری هال، به‌سراغ ذراتی با آمار تعمیم‌یافته رفتند [۵]. مثلاً در دو بعد فضایی، تابع موج ذرات تحت جای‌گشت

* نویسنده مسئول: mohammadzadeh@uma.ac.ir

ترمودینامیکی آمار تام-دانکوف در دو حد غیر نسبیتی و فرا نسبیتی برای سیستم‌های سه بعدی محاسبه می‌شود. همچنین گذار فاز چگالش و دمای چگالش آمار تام-دانکوف بوزونی با توجه به تکینگی‌های انحنای ترمودینامیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت ظرفیت گرمایی ویژه برای آمار تام-دانکوف بوزونی و فرمیونی آورده می‌شود.

جبر نوسان گر بوزونی تام-دانکوف

جبر عملگری نوسانگرهای بوزونی و فرمیونی، جبر جابه‌جایی و پاد جابه‌جایی آشنایی برای عملگرهای خلق \hat{a}^\dagger و فنا \hat{a} است [۳۲]:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - k\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad ۱$$

که در آن $k = 1$ مربوط به جبر بوزونی و $k = -1$ مربوط به جبر فرمیونی است. تعمیمی از این جبر، منجر به جبر q -دگرگون‌ها می‌شود که نوعی از آمارهای میانی‌اند.

پایه و اساس مدل جبری نوسانگر تام-دانکوف بوزونی یک بعدی رابطه

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger - q^{-1}\hat{a}^\dagger\hat{a} = q^{-\hat{N}} \quad ۲$$

به‌همراه روابط

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad ۳$$

است [۱۵] که در آن \hat{N} عملگر تعداد نامیده می‌شود. همچنین q پارامتر دگرگونی مثبت حقیقی است. حال با توجه به تعریف عملگر خلق و فنا برای نوسانگر تام-دانکوف می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{(n+1)q^{-n}} |n+1\rangle \\ \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{nq^{-(n-1)}} |n-1\rangle \\ N |n\rangle &= n |n\rangle \end{aligned} \quad ۴$$

سیستم‌های بس‌ذره‌ای بوده است. از سوی دیگر، سیستم‌های نوسانی دگرگون برای به‌دست آوردن فرمول‌بندی‌های جدید برای مدل‌های مؤثر در فیزیک آماری مورد استفاده قرار گرفته است [۱۴]. با استفاده از آمارهای میانی و توابع دگرگون می‌توان توابع توزیعی را به‌دست آورد که در حدهایی به توابع توزیع بوزونی و فرمیونی معمول تبدیل شود [۱۶-۱۵].

خواص ترمودینامیکی سیستم‌های مختلف را می‌توان با استفاده از بررسی هندسهٔ مربوط به پارامترهای ترمودینامیکی بررسی کرد. بررسی ترمودینامیک سیستم‌ها به‌روش هندسی، اولین بار توسط گیس شروع شد [۱۷]. رویهٔ حالت‌های ترمودینامیکی یک سیستم اولین ابزار برای بررسی هندسه آن است. وینهولد مشتقات مرتبهٔ دوم انرژی داخلی را به‌عنوان متریک در نظر گرفت و تصویر هندسی از ترمودینامیک ساخت [۱۸]. در سال ۱۹۷۹ ساختار متریک ریمان توسط راپینر معرفی شد که افت و خیزهای ترمودینامیک را بررسی می‌کرد که به مشتقات مرتبهٔ دوم آنتروپی مرتبط است [۱۹]. یکی از مهمترین نتایج نظریهٔ او معرفی انحنای ترمودینامیکی ریمانی به‌عنوان ابزاری جدید برای بررسی کیفی پدیده‌های افت و خیز بود [۲۰]. انحنای ترمودینامیکی سیستم‌هایی با انواع آمار از جمله آمار q -دگرگون‌ها و ... بررسی شده است [۲۱-۲۶]. اخیراً نیز انحنای ترمودینامیکی آمارهای تعمیم یافته‌ای نظیر آمار نافزایشی سالیس، آمار دوگان، آمار کانادایاکیس نیز بررسی شده است [۲۷-۲۹]. همچنین انحنای ترمودینامیکی سیستم‌هایی سیال و اندروالسدوتایی و سیال مدل هسته گاوسی نیز مطالعه شده است [۳۰، ۳۱].

در این مقاله، ابتدا جبر عملگر بوزونی و فرمیونی تام-دانکوف معرفی می‌شود. با استفاده از این جبر، تابع پارش آمار تام-دانکوف ساخته می‌شود. سپس انحنای

در تمامی روابط بالا $\beta = 1/k_B T$ است که در آن k_B ثابت بولتزمان و T دمای سیستم است.

همان‌طور که انتظار داشتیم در عبارت فوق با قرار دادن $q=1$ ، عبارت عدد اشغال تبدیل به توزیع بوز-اینشتین برای بوزون‌های متداول خواهد شد. از آنجایی که رابطه ۷ باید همواره مثبت باشد یا معادل آن تابع توزیع نامنفی باشد، باعث ایجاد شرط $z < q$ می‌شود که $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$ گریزندگی سیستم نامیده می‌شود. پس گریزندگی حد بالایی دارد که برابر q است. با استفاده از رابطه ۷ لگاریتم تابع پارش بزرگ q -دگرگون شده بوزونی به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$\ln Z_B = -\sum_i \ln \left(1 - q^{-1} z e^{-\beta \varepsilon_i} \right) \quad ۸$$

جبر نوسانگر فرمیونی تام-دانکوف

برای نوسانگر فرمیونی نیز مانند نوسانگر بوزونی عمل می‌شود با این تفاوت که رابطه ۲ به صورت:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger + q\hat{a}^\dagger\hat{a} = q^{\hat{N}} \quad ۹$$

قرار داده می‌شود و رابطه ۳ بی‌تغییر باقی می‌ماند [۲۹]. به عبارت دیگر رابطه ۳ برای نوسانگر فرمیونی تام-دانکوف نیز برقرار است. با این تغییر، مدل جبری یک نوسانگر تام-دانکوف فرمیونی به صورت زیر تعریف و محاسبه می‌گردد [۱۵، ۳۴]:

که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ جزء اعداد حسابی است. از آنجایی که برای هامیلتونی یک نوسانگر کوآنتومی بوزونی منفرد همواره عبارت $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})$ را داریم، با جای‌گذاری روابط برای ویژه مقادیر هامیلتونی طبق $\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle$ داریم:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}q^{-n}(n(q+1)+1) \quad ۵$$

رابطه فوق طیف انرژی برای نوسانگر تام-دانکوف به صورت q -دگرگون شده است و با قرار دادن $q=1$ طیف انرژی نوسانگر بوزونی معمول را خواهیم داشت. با توجه به معادله ۵ مشاهده می‌شود در $q > 1$ با افزایش n مقدار انرژی به سمت صفر میل می‌کند. اگر $0 < q < 1$ باشد با افزایش n انرژی به بینهایت میل می‌کند [۳۳]. برای آمار تام-دانکوف، هامیلتونی دگرگون شده سیستم آنسامبل کانونی بزرگ به صورت $\hat{H}_q = \sum_i (\varepsilon_i - \mu)\hat{N}_i$ فرض می‌شود که در آن ε_i انرژی جنبشی ذره در تراز i و μ پتانسیل شیمیایی سیستم است. با تعریف عدد اشغال در حالت کلی به صورت $[n_i] = \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_q} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i)$ که در آن $Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_q})$ تابع پارش بزرگ سیستم است و همین‌طور استفاده از خاصیت دوره‌ای رد ماتریس، می‌توان نوشت:

$$\frac{[n_i]}{[n_i + 1]} = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \quad ۶$$

با ساده سازی و یک سری محاسبات ریاضی ساده به عبارت زیر برای عدد اشغال برای نوسانگر تام-دانکوف بوزونی خواهیم رسید:

$$n = \frac{q^{-1}}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - q^{-1}} \quad ۷$$

با استفاده از رابطه ۱۳، لگاریتم تابع پارش بزرگ $-q$ - دگرگون شده سیستم فرمیونی به صورت زیر به دست می آید [۱۵]:

$$\ln Z_F = \sum_i \ln(1 + qze^{-\beta \varepsilon_i}) \quad ۱۴$$

ترمودینامیک هندسی سیستم آماری

سیستمی را در نظر می گیریم که بر حسب متغیرهای افزایشی $X = X(U, N^1, \dots, V, \dots, N^r)$ تعریف می شود. با استفاده از هندسه راپینر می توان ترمودینامیک هندسی این سیستم آماری را بیان کرد. هندسه راپینر بر اساس نمایش آنتروپی پایه گذاری شده است و مشتقات مرتبه دوم آنتروپی نسبت به متغیرهای افزایشی، عناصر متریک فضای پارامترهای ترمودینامیکی را مشخص می کند [۱۹]:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial X^i \partial X^j} \quad ۱۵$$

اگر سیستم با دسته دیگری از متغیرهای افزایشی نظیر $Y = Y(S, N^1, \dots, V, \dots, N^r)$ توصیف گردد، با استفاده از متریک وینهلد می توان هندسه ترمودینامیکی سیستم را توضیح داد. عناصر متریک وینهلد از مشتق دوم انرژی داخلی نسبت به متغیرهای افزایشی محاسبه می شود [۱۸]:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^i \partial Y^j} \quad ۱۶$$

بعدها نشان داده شد این دو متریک تبدیل همدیس یکدیگر به صورت $ds_R^2 = \beta ds_W^2$ هستند [۲۰، ۳۵] که فاکتور همدیس همان β است. البته می توان در نمایش هر یک از پتانسیل های ترمودینامیکی که تبدیل لژاندر آنتروپی یا انرژی داخلی هستند متریکی تعریف کرد. در

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1})} q^n |n+1\rangle \\ \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+(-1)^n)} q^{n-1} |n-1\rangle \\ N |n\rangle &= g_n |n\rangle \end{aligned} \quad ۱۰$$

که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ جزو اعداد حسابی است و g_n بدین صورت خواهد شد:

$$g_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) q^{n-1} = \begin{cases} 0 & n = 0, 2, 4, \dots \\ q^{n-1} & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad ۱۱$$

برای هامیلتونی یک نوسانگر کوآنتومی فرمیونی منفرد عبارت $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a})$ را داریم که با جایگذاری در $\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle$ خواهیم داشت [۳۴]:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}(q-1)q^{n-1} \left(1 - \frac{q+1}{q-1}(-1)^n\right) \quad ۱۲$$

به شیوه مشابه با بوزون های دگرگون شده تام-دانکوف، می توان عدد اشغال را برای مدل فرمیونی تام-دانکوف نیز به دست آورد:

$$n = \frac{q}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + q} \quad ۱۳$$

در این مورد هم انتظارات معمول برآورده می شود و با قرار دادن $q=1$ ، عبارت عدد اشغال تبدیل به عدد اشغال فرمی-دیراک برای توزیع ذرات فرمیونی معمول خواهد شد.

و γ در نظر بگیریم، می‌توان انحناى فضای هندسی ترمودینامیکی را با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

$$R = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{\beta\beta} & \alpha_{\gamma\gamma} & \alpha_{\beta\gamma} \\ 2\alpha_{\beta\beta,\beta} & \alpha_{\gamma\gamma,\beta} & \alpha_{\beta\gamma,\beta} \\ \alpha_{\beta\beta,\gamma} & \alpha_{\gamma\gamma,\gamma} & \alpha_{\beta\gamma,\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{\beta\beta} & \alpha_{\beta\gamma} \\ \alpha_{\gamma\beta} & \alpha_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}^2} \quad 18$$

که در آن α_{ij} عناصر متریک و $\alpha_{ij,k} = \partial \alpha_{ij} / \partial k$ مشتق عناصر متریک نسبت به پارامترهای ترمودینامیکی است [۱۹].

با نتایج حاصله از محاسبه انحناى ترمودینامیکی سیستم می‌توان نوع برهم‌کنش ذرات سیستم را مورد بررسی قرار داد. اگر انحناى ترمودینامیکی سیستم برابر با صفر باشد سیستم بدون برهم‌کنش و ذرات به صورت گاز ایده‌آل کلاسیکی رفتار می‌کنند [۲۳]. برای گاز ایده‌آل بوزونی همواره اندرکنش جاذب است و انحناى ترمودینامیکی مثبت به دست می‌آید در حالی که برای گاز فرمیونی به دلیل برهم‌کنش دافع ذرات، کمیت انحناى ترمودینامیکی منفی خواهد بود. همچنین در برخی سیستم‌ها انحناى ترمودینامیکی دارای تکنیکی است که نشانه گذار فاز در آنها است [۲۱].

گاز ایده‌آل بوزونی و فرمیونی دگرگون تام-دانکوف در حد ترمودینامیکی

اگر ذراتی دشته باشیم که درون جعبه‌ای D بعدی با ابعاد L محبوس باشند و انرژی ذرات در حالت کلی در معادله $\mathcal{E} = ap^\sigma$ صدق کنند که p تکانه ذرات و همین‌طور a و σ ضرایب ثابتی باشند، در حد ترمودینامیکی (حالت‌های با تعداد زیاد ذرات)، می‌توان

این صورت سیستم با دسته‌ای از متغیرهای نا افزایشی به فرم $F^i = \partial S / \partial X^i$ نظیر

$$F = F(1/T, -\mu/T, \dots, P/T, \dots, -\mu^r/T)$$

توصیف خواهد شد. متریک فیشر-رائو بر اساس تابع پارش ساخته می‌شود که در مرجع [۲۰] ارائه شده است:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^i \partial \beta^j} \quad 17$$

که در آن $\beta^i = F^i / k$ است.

در نهایت می‌توان گفت که استفاده از متریک در نمایش‌های مختلف، بستگی به داشته‌های ما از سیستم دارد. مثلاً در صورت مشخص بودن تابع پارش سیستم از متریک فیشر-رائو، در صورت مشخص بودن رابطه آنروپی سیستم، از متریک رایپنر و در صورت مشخص بودن انرژی داخلی، استفاده از متریک وینهلد پیشنهاد می‌گردد. البته در نهایت با استفاده از این متریک، انحناى فضای پارامترهای ترمودینامیکی محاسبه خواهد شد که کمیتی اسکالر است و مستقل از انتخاب نمایش یا متریک به کار گرفته شده خواهد بود.

انحناى ترمودینامیکی سیستم‌های ترمودینامیکی

حال که فضای پارامترهای ترمودینامیکی بنا نهاده شده است و متریکی نیز برای آن تعیین شده است، با استفاده از یک پارامتر هندسی می‌توان برخی ویژگی‌های یک سیستم ترمودینامیکی را تعیین کرد. انحناى ترمودینامیکی نخستین بار توسط رایپنر برای چند سیستم ترمودینامیکی محاسبه شد. این کمیت بعد حجم دارد و نشان‌دهنده نوع اندرکنش ذرات درون سیستم است. در حالت خاص که فضای پارامترهای ترمودینامیکی را یک فضای دو بعدی با متغیرهای β

انحنای ترمودینامیکی گاز ایده‌ال دگرگون تام-دانکوف

با فرض اینکه ابعاد سیستم تثبیت شده باشد، فضای پارامترهای ترمودینامیکی گاز ایده‌ال تام-دانکوف یک فضای دو بعدی است که متغیرهای مناسب برای آن $(\beta^1, \beta^2) = (\beta, \gamma)$ هستند که در آن به ترتیب $\beta = 1/k_B T$ و $\gamma = -\mu/k_B T$ است. حال می‌توان متریک فضای پارامترهای ترمودینامیکی را با استفاده از پتانسیل‌های ترمودینامیکی بنا کرد. در این مورد از لگاریتم تابع پارش که در معادلات ۲۰ و ۲۱ آورده شده است، استفاده می‌شود. عناصر متریک فیشر-رائو گاز ایده‌ال تام-دانکوف بوزونی بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$\alpha_{\beta\beta} = \frac{A \left(\frac{D}{\sigma} + 1\right) \Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma} + 2}} g_{\frac{D}{\sigma} + 1} \left(\frac{z}{q}\right) \quad 24$$

$$\alpha_{\beta\gamma} = \frac{A \Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma} + 1}} g_{\frac{D}{\sigma}} \left(\frac{z}{q}\right) \quad 25$$

$$\alpha_{\gamma\beta} = \alpha_{\beta\gamma} \quad 26$$

$$\alpha_{\gamma\gamma} = \frac{\sigma}{D} \frac{A \Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma}}} g_{\frac{D}{\sigma} - 1} \left(\frac{z}{q}\right) \quad 27$$

به مشتقات عناصر متریک نسبت به پارامترهای ترمودینامیکی برای محاسبه انحنای ترمودینامیکی نیاز داریم که به راحتی به دست می‌آوریم:

$$\alpha_{\beta\beta, \beta} = -\frac{A \left(\frac{D}{\sigma} + 1\right) \left(\frac{D}{\sigma} + 2\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma} + 3}} \times \Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right) g_{\frac{D}{\sigma} + 1} \left(\frac{z}{q}\right) \quad 28$$

عمل جمع در تابع پارش کانونیکی بزرگ را طبق قاعده زیر به انتگرال تبدیل کرد [۳۶]:

$$\sum_i \rightarrow A \int \varepsilon^{\sigma} d\varepsilon \quad 19$$

که در آن $A = \frac{(2/\sigma)}{\Gamma(D/2)} \left(\frac{\sqrt{\pi}L}{ha^{1/\sigma}}\right)^D$ ضریبی ثابت

و D بعد سیستم است و تابع گامای شناخته شده نیز

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \quad \text{برای}$$

به صورت $\text{Re}(z) > 0$ داده می‌شود.

با اعمال رابطه ۱۹ در رابطه ۸ و ۱۴ و استفاده از توابع

پلی لگاریتم، لگاریتم تابع پارش گاز ایده‌ال بوزونی و

فرمیونی دگرگون تام-دانکوف به صورت زیر به دست

می‌آید:

$$\ln Z_B = \frac{\sigma A}{D \beta^{D/\sigma}} \Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right) g_{\frac{D}{\sigma} + 1} \left(\frac{z}{q}\right) \quad 20$$

$$\ln Z_F = \frac{\sigma A}{D \beta^{D/\sigma}} \Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right) f_{\frac{D}{\sigma} + 1} (qz) \quad 21$$

که در آن منظور از توابع g و f عبارت است از:

$$g_\nu(qz) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{(qz)^{-1} e^x - 1} \quad 22$$

$$f_\nu(qz) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{(qz)^{-1} e^x + 1} \quad 23$$

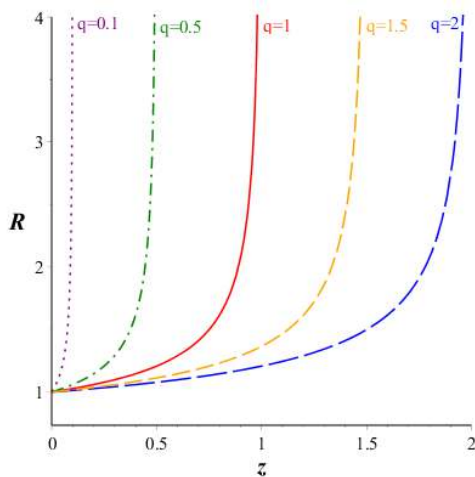
که ν پارامتری است که در توان متغیر انتگرالگیری

ظاهر شده است و نتیجه انتگرال به‌ازای مقادیر مختلف

ν ، توابع متفاوتی خواهد بود.

ترمودینامیکی گاز ایده‌آل دگرگون تام-دانکوف بوزونی آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود انحنای ترمودینامیکی در تمام ناحیه فیزیکی مثبت است. بنابراین برهم‌کنش آماری ذاتی مربوط به ذراتی که از چنین آماری تبعیت می‌کنند، جاذب است. به عبارت دیگر دگرگونی جبر بوزونی بر خاصیت برهم‌کنش آماری ذرات تأثیرگذار نبوده است. همچنین مشاهده می‌شود که انحنای ترمودینامیکی به‌ازای مقدار معینی برای گریزندگی که مقدار بحرانی گریزندگی نامیده می‌شود، واگرا است. مقدار بحرانی گریزندگی با توجه به شکل برابر است با:

$$z_c = q \quad (34)$$



شکل ۱. انحنای ترمودینامیکی ذرات برای آمار میانی تام-دانکوف بوزونی سه بعدی برحسب گریزندگی برای مقادیر مختلف q در حالت غیر نسبیتی. خط پر معادل با آمار بوز-اینشتین ایده‌آل است.

در شکل ۲ انحنای ترمودینامیکی گاز ایده‌آلی که ذرات آن از آمار تام-دانکوف فرمیونی آورده شده است. به‌طور واضح انحنای ترمودینامیکی گاز ایده‌آل فرمیونی دگرگون تام-دانکوف در تمام ناحیه فیزیکی منفی است. این امر حاکی از آن است که برهم‌کنش آماری ذراتی که از چنین آماری تبعیت می‌کنند، همانند آمار فرمی-دیراک دافع است.

$$\alpha_{\beta\beta,\gamma} = -\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma} + 2}} g_{\frac{D}{\sigma}}\left(\frac{z}{q}\right) \quad (29)$$

$$\alpha_{\beta\gamma,\beta} = \alpha_{\beta\beta,\gamma} \quad (30)$$

$$\alpha_{\gamma\gamma,\beta} = -\frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma} + 1}} g_{\frac{D}{\sigma}-1}\left(\frac{z}{q}\right) \quad (31)$$

$$\alpha_{\beta\gamma,\gamma} = \alpha_{\gamma\gamma,\beta} \quad (32)$$

$$\alpha_{\gamma\gamma,\gamma} = -\frac{\sigma}{D} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{\sigma} + 1\right)}{\beta^{\frac{D}{\sigma}}} g_{\frac{D}{\sigma}-2}\left(\frac{z}{q}\right) \quad (33)$$

توجه داریم که در مشتق‌گیری از توابع پلی‌لگاریتم برحسب γ رابطه‌ای به‌فرم روابط بازگشتی وجود دارد به صورت $\partial Li_n(qz) / \partial \gamma = -Li_{n-1}(qz)$ که مورد استفاده قرار گرفته است.

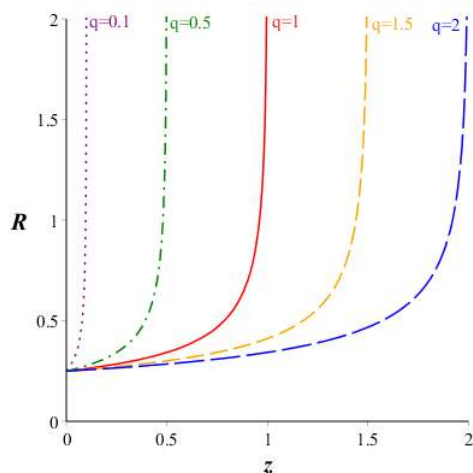
برای به‌دست آوردن عناصر متریک فیشر-رائو برای گاز ایده‌آل فرمیونی دگرگون تام-دانکوف کافیت در معادلات ۲۴ تا ۳۳ تغییرات $g \rightarrow f$ و $q^{-1} \rightarrow q$ را اعمال کنیم.

حال می‌توان انحنای ترمودینامیکی که طبق رابطه ۱۸ داده می‌شود را تشکیل داد. انحنای ترمودینامیکی را در سه بعد برای دو حد غیر نسبیتی و فرانسیتی مورد محاسبه قرار خواهیم داد.

حد غیر نسبیتی

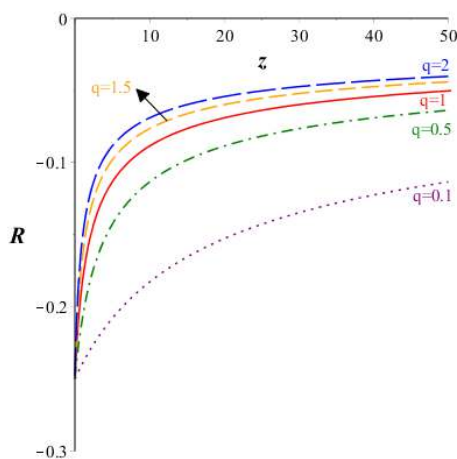
حال که هم عناصر متریک و هم مشتقات آنها محاسبه شده است، با استفاده از رابطه ۱۸ می‌توان انحنای ترمودینامیکی را به‌دست آورد.

در حد غیر نسبیتی رابطه بین انرژی و تکانه ذرات توسط $\varepsilon \approx p^2$ داده می‌شود. در شکل ۱ انحنای



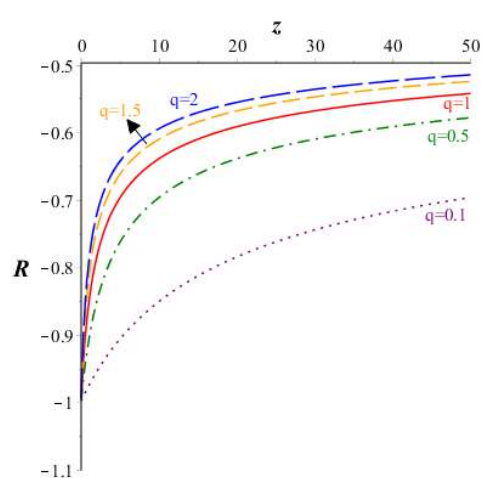
شکل ۳. انحنای ترمودینامیکی ذرات برای آمار میانی تام-دانکوف بوزونی سه بعدی برحسب گریزندگی برای مقادیر مختلف q در حالت فرانسبیتی. خط پر معادل با آمار بوز-اینشتین ایده آل است.

در شکل ۴ انحنای ترمودینامیکی برای گاز ایده آل فرمیونی دگرگون تام-دانکوف در حد فرانسبیتی آورده شده است:



شکل ۴. انحنای ترمودینامیکی ذرات برای آمار میانی تام-دانکوف فرمیونی سه بعدی برحسب گریزندگی برای مقادیر مختلف q در حالت فرانسبیتی. خط پر معادل با آمار فرمی-دیراک ایده آل است.

استدلالی مشابه حالت بوزونی نشان می دهد که برهم کنش آماری فرمیون های دگرگون تام-دانکوف مستقل از پارامتر دگرگونی در کل دافع است.



شکل ۵. انحنای ترمودینامیکی ذرات برای آمار میانی تام-دانکوف فرمیونی سه بعدی برحسب گریزندگی برای مقادیر مختلف q در حالت غیر نسبیتی. خط پر معادل با آمار فرمی-دیراک معمول است.

حد فرانسبیتی

در حد فرانسبیتی رابطه بین انرژی ذرات با تکانه آن به صورت $p \approx \varepsilon$ است. رفتار انحنای ترمودینامیکی برای آمار تام-دانکوف بوزونی در شکل ۳ آورده شده است. در شکل های ۳ و ۴، برای سادگی $A = 1$ قرار داده شده است و فرایندها را با انتخاب $(\beta = 1)$ هم دما فرض می کنیم. بعد سیستم برابر $D = 3$ و معادله پاشندگی انرژی نیز با انتخاب $\sigma = 1$ به صورت فرانسبیتی در نظر گرفته شده است.

در شکل ۳ باز مانند حد غیرنسبیتی انحنای ترمودینامیکی در تمام ناحیه فیزیک مثبت است و بنابراین برهم کنش آماری ذاتی جاذب است. با توجه به اینکه هم در حد غیرنسبیتی و هم در حد فرانسبیتی برهم کنش آماری جاذب است، بنابراین در کل برهم کنش آماری بوزون های دگرگون تام-دانکوف جاذب است.

تراکم بوز-اینشتین برای آمار تام-دانکوف

با استفاده از رابطه ۷ تعداد کل ذرات را برای آمار تام-دانکوف بوزونی بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$N = \sum_i \frac{q^{-1}}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - q^{-1}} \quad (35)$$

$$= \frac{A\Gamma(D/\sigma)}{\beta^{D/\sigma}} g_{\frac{D}{\sigma}} \left(\frac{z}{q} \right) + \frac{q^{-1}}{z^{-1} - q^{-1}}$$

که در آن جمله اول (دوم) از سمت راست معادله فوق، تعداد ذرات در حالت برانگیخته N_e (پایه N_0) است، به عبارت دیگر $N = N_e + N_0$ است. بزرگترین مقدار تابع پلی لگاریتم $g_{D/\sigma}(q^{-1}z)$ در گستره فیزیکی مورد نظر وقتی است که $z \rightarrow q$ میل کند و در این صورت $g_{D/\sigma}(q^{-1}z)$ به ازای $D > \sigma$ به تابع زتای ریمان [۳۶] تبدیل می‌شود و بنابراین خواهیم داشت:

$$N_0 = N - \frac{A\Gamma(D/\sigma)}{\beta^{D/\sigma}} \xi \left(\frac{D}{\sigma} \right) \quad (36)$$

حال، اگر تعداد ذراتی را داشته باشیم که برای آنها شرط $N \leq A\beta^{-D/\sigma} \Gamma(D/\sigma) \xi(D/\sigma)$ برقرار باشد، این ذرات بر روی حالت‌های برانگیخته توزیع خواهند شد و در غیر این صورت ذرات اضافی به حالت پایه سرازیر می‌شوند که در این حالت چگالش بوز-اینشتین برای آمار تام-دانکوف بوزونی اتفاق خواهد افتاد.

این پدیده می‌تواند در حالت دیگری نیز رخ دهد. با فرض اینکه تعداد ذرات ثابت باشند و دمای T را تغییر دهیم، از معادله ۳۶ می‌توان نوشت:

$$T < \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{A\Gamma(D/\sigma) \xi(D/\sigma)} \right)^{\sigma/D} \quad (37)$$

که سمت راست معادله فوق متناظر با دمای چگالش T_c ذراتی با آمار تام-دانکوف بوزونی است. همان‌طور که مشخص است دمای چگالش مستقل از مقدار پارامتر دگرگونی است و دمای چگالش گاز ایده‌آل بوزونی

دگرگون تام-دانکوف برابر با دمای چگالش گاز بوزونی ایده‌آل است.

در مقاله [۳۷] چگالش گاز بوزونی دگرگون متقارن که توزیع مربوط به آن به گونه دیگری استخراج شده است، مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده است که دمای چگالش به پارامتر دگرگونی بستگی دارد. در مورد آمار بوزونی دگرگون تام-دانکوف این وابستگی وجود ندارد، که تفاوت عمده مربوط به این دو نوع دگرگونی را نشان می‌دهد.

ظرفیت گرمایی ویژه برای آمار تام-دانکوف

انرژی داخلی را برای آمار تام-دانکوف بوزونی می‌توان از معادله ۲۰ و به کمک رابطه $U_B = -\partial \ln Z_B / \partial \beta$ استخراج کرد که عبارت است از:

$$U_B = \frac{AG \left(\frac{D}{s} + 1 \right)}{b^{\frac{D}{s} + 1}} g_{\frac{D}{s} + 1} \left(\frac{z}{q} \right) \quad (38)$$

می‌توان گرمای ویژه گاز C_V را با مشتق‌گیری از رابطه ۳۸ نسبت به دما در حجم و تعداد ذرات ثابت به دست آورد. ابتدا با استفاده از رابطه ۳۵ مشتق گریزندگی z را نسبت به دما T به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_V = - \frac{D}{\sigma T} \frac{g_{\frac{D}{\sigma}}(z/q)}{g_{\frac{D}{\sigma}-1}(z/q)} \quad (39)$$

حال می‌توان در دماهای بالاتر از دمای چگالش گرمای ویژه C_V را برای گازی که از آمار تام-دانکوف بوزونی پیروی می‌کند را به دست آورد:

$$\left. \frac{C_V}{Nk_B} \right|_{T > T_c} = \frac{D}{\sigma} \left(\frac{D}{\sigma} + 1 \right) \frac{g_{\frac{D}{\sigma} + 1}(z/q)}{g_{\frac{D}{\sigma}}(z/q)} - \frac{D^2}{\sigma^2} \frac{g_{\frac{D}{\sigma}}(z/q)}{g_{\frac{D}{\sigma}-1}(z/q)} \quad (40)$$

فیشر-رائو استفاده می‌کنیم که برحسب مشتقات مرتبه دوم لگاریتم تابع پارش برحسب متغیرهای نافزون ور بنا می‌شود. با استفاده از این متریک می‌توان انحناى ترمودینامیکی را به‌دست آورد. همان‌طور که در شکل‌های ۱ تا ۴ مشخص است برای آمار دگرگون تام-دانکوف بوزونی (فرمیونی) در هر دو حد غیر نسبتی و فرانسیتی علامت انحناى ترمودینامیکی مثبت (منفی) است به این معنی است که سیستم دارای برهم‌کنش آماری جاذب (دافع) است. در واقع نتیجه عمده آن است که برهم‌کنش آماری ذرات دگرگون تام-دانکوف تحت تأثیر پارامتر دگرگونی قرار نمی‌گیرد.

در ادامه به بررسی گذار فاز در گاز ایده‌آل بوزونی دگرگون تام-دانکوف پرداختیم. با توجه به تعیین مقدار گریزندگی بحرانی، دمای گذار چگالش را در تعداد معین ذرات به‌دست آوردیم و نشان دادیم که این کمیت بر خلاف دگرگونی‌هایی دیگر، به مقدار پارامتر دگرگونی بستگی ندارد. همچنین رفتار ظرفیت گرمایی در زیر نقطه بحرانی برای سیستم دگرگون تام-دانکوف و بوزون‌های متداول یکسان است. بنابراین در فاز چگالیده برای انواع گازهای ایده‌آل بوزونی دگرگون تام-دانکوف که با هم در مقدار پارامتر دگرگونی متفاوت هستند، یک رفتار جهانی مستقل از مقدار پارامتر دگرگونی مشاهده می‌شود.

رفتار ظرفیت گرمایی برای سیستم گاز ایده‌آل بوزونی دگرگون تام-دانکوف در فاز عادی و همین‌طور گاز ایده‌آل فرمیونی دگرگون تام-دانکوف به‌طور طبیعی وابستگی به پارامتر دگرگونی دارد.

سپاس‌گذاری

این مقاله در قالب طرحی با تصویب و حمایت مالی حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه محقق اردبیلی اجرا گردیده است.

برای دماهای کوچکتر از دمای بحرانی، زمانی که گریزندگی در فاز چگالیده ثابت بوده و برابر مقدار بحرانی $Z = Z_c$ باشد و نسبت به دما تغییرات نداشته باشد می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{C_V}{Nk_B} \right|_{T < T_c} = \frac{D}{\sigma \xi} \left(\frac{D}{\sigma} + 1 \right) \times \xi \left(\frac{D}{\sigma} + 1 \right) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{D/\sigma} \quad (41)$$

با مقایسه با حالت بوزونی ایده‌آل می‌توان مشاهده کرد که رفتار ظرفیت گرمایی در فاز چگالیده مستقل از پارامتر دگرگونی است حال آنکه در فاز معمول این رفتار به مقدار پارامتر دگرگونی بستگی دارد. برای آمار تام-دانکوف فرمیونی کفایت در معادله ۴۰ تغییرات $f \rightarrow g$ و $q^{-1} \rightarrow q$ را اعمال کنیم:

$$\left. \frac{C_V}{Nk_B} \right|_{T < T_c} = \frac{D}{\sigma} \left(\frac{D}{\sigma} + 1 \right) \frac{f_{\frac{D}{\sigma}+1}(qZ)}{f_{\frac{D}{\sigma}}(qZ)} - \frac{D^2}{\sigma^2} \frac{f_{\frac{D}{\sigma}}(qZ)}{f_{\frac{D}{\sigma}-1}(qZ)} \quad (42)$$

که به‌طور واضح تعمیمی از ظرفیت گرمایی برای فرمیون‌های معمول است.

بحث و نتیجه‌گیری

در رهیافت ترمودینامیک هندسی، کمیتی به‌نام انحناى ترمودینامیکی R تعریف می‌شود که علامت این کمیت، نشان‌دهنده نوع برهم‌کنش آماری ذاتی در سیستم‌های ترمودینامیکی است. در واقع می‌توان فضای پارامترهای ترمودینامیکی برای مسئله مورد بررسی را تشکیل داد و برای این فضا متریکی تعریف کرد. متریک‌های مختلفی بسته به پارامترهای ترمودینامیکی سیستم قابل تعریف است. در این پژوهش از متریک

مرجع‌ها

- [9] K.V. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, *Physical Review Letters* **45** (1980) 494-497. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.494>
- [10] A.P. Polychronakos, Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics, *Physics Letters B* **365** (1996) 202-206. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)01302-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01302-4)
- [11] O.W. Greenberg, Example of infinite statistics, *Physical Review Letters* **64** (1990) 705-708.. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.705>
- [12] H.S. Green, A Generalized Method of Field Quantization, *Physical Review* **90** (1953) 270-273. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.90.270>
- [13] O.W. Greenberg, Particles with small violations of Fermi or Bose statistics, *Physical Review D* **43** (1991) 4111-4120. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.4111>
- [14] H. Mohammadzadeh, Y. Azizian-Kalandaragh, N. Cheraghpour, F. Adli, Thermodynamic geometry, condensation and Debye model of two-parameter deformed statistics, *Journal of statistical mechanics: Theory and Experiment* (2017) 083104. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa7ee0>
- [15] A. Algin, E. Ilik, Low-temperature thermo statistics of Tamm– Dancoff deformed boson oscillators, *Physics Letters A* **377** (2013) 1797–1803. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.05.013>
- [16] W. Chung, A. Algin, Duality of boson and fermion: New intermediate-statistics, *Physics Letters A* **381** (2017) 1797–1803. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.028>
- [1] W.H. Huang, Boson-fermion transmutation and the statistics of anyons, *Physical Review E* **51** (1995) 3729-3730. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.3729>
- [2] J.N. Ginocchio, I. Talmi, On the correspondence between fermion and boson states and operators, *Nuclear Physics A* **337** (1980) 431-444. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(80\)90152-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(80)90152-9)
- [3] T. Kostyrko, J. Ranninger, Spectral properties of the boson-fermion model in the superconducting state, *Physical Review B* **54**, 13105-13120. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.54.13105>
- [4] D.S. Tang, Formal relations between classical superalgebras and fermion–boson creation and annihilation operators, *Journal of Mathematical Physics* **25** (1984) 2966-2973. <https://doi.org/10.1063/1.526047>
- [5] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, *Physical Review Letters* **48** (1982) 1559-1562. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1559>
- [6] F. Wilczek, Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics, *Physical Review Letters* **48** (1982) 1144-1146. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1144>
- [7] F. Wilczek, Quantum Mechanics of Fractional Spin Particles, *Physical Review Letters* **49** (1982) 957-959. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.957>
- [8] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, Theory of Hall Effect in a Two- Dimensional Electron System, *Journal of the Physical Society of Japan* **39** (1975) 279-288. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.39.279>

<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.031137>

[26] G. Ruppeiner, Thermodynamic curvature and phase transitions in Kerr-Newman black holes, *Physical Review D* **78**, (2008) 024016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.024016>

[27] F. Adli, H. Mohammadzadeh, M.N. Najafi, Z. Ebadi, Nonperturbative thermodynamic geometry of nonextensive statistics, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **16**, (2019) 1950069. <https://doi.org/10.1142/S0219887819500695>

[28] Z. Ebadi, H. Mohammadzadeh, R. Rozedar Moghaddam, M. Amiri, Thermodynamic geometry, transition between attractive and repulsive interactions and condensation of dual statistics, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **8**, (2020) 083106. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/aba689>

[29] H. Mehri-Dehnavi, H. Mohammadzadeh, Thermodynamic Geometry of Kanadiakis Statistics, *Journal of Physics A: Theoretical and Mathematical*, **53**, (2020) 375009. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aba98a>

[30] G. Ruppeiner, A. Seftas, Thermodynamic Curvature of the binary van der Waals Fluid, *Entropy* **22** (2020) 1208. <https://doi.org/10.3390/e22111208>

[31] G. Ruppeiner, P. Mausbach, H.O. May, Thermodynamic Geometry of the Gaussian Core Model Fluid, *Fluid Phase Equilibria*, (2020) 113033. <https://doi.org/10.1016/j.fluid.2021.113033>

[32] A. Mcfarlan, On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$, *Journal of Physics A: Mathematical and general* **22** (1989) 4581. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/21/020>

[17] L. Tisza, Generalized thermodynamics, Cambridge, Mass: M.I.T. Press, (1966).

[18] F. Weinhold, Metric geometry of equilibrium thermodynamics, *The Journal of Chemical Physics* **63** (1975) 2479-2483. <https://doi.org/10.1063/1.431689>

[19] G. Ruppeiner, Thermodynamics: a Riemannian geometric model, *Physical Review A* **20** (1979) 1608-1613. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.20.1608>

[20] G. Ruppeiner, Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory, *Reviews of Modern Physics* **67** (1995) 605-609.

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.605>

[21] H. Mohammadzadeh, F. Adli, S. Nouri, Perturbative thermodynamic geometry of nonextensive ideal classical, Bose, and Fermi gases, *Physical Review E* **94** (2016) 062118. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062118>

[22] B. Mirza, H. Mohammadzadeh, Nonperturbative thermodynamic geometry of anyon gas, *Physical Review E* **80** (2009) 011132. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.011132>

[23] H. Janyszek, R. Mrugaa, Riemannian geometry and stability of ideal quantum gases, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **23** (1990) 467-476. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/4/016>

[24] W. Janke, D.A. Johnston, R. Kenna, Information geometry of the spherical model, *Physical Review E* **67**, (2003) 046106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.046106>

[25] B. Mirza, H. Mohammadzadeh, Thermodynamic geometry of fractional statistics, *Physical Review E* **82** (2010) 031137.

- [36] R.K. Pathria, P.D. Beale, *Statistical Mechanics*, Elsevier, New York, (2011).
- [37] B. Mirza, H. Mohammadzadeh, Thermodynamic geometry of deformed bosons and fermions, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011) 475003. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/47/475003>
- [33] W.S. Chung, A. Algin, q-Deformed Tamm Dancoff oscillators: Coherent state and thermostatics, *International Journal of Modern Physics B* **28** (2014) 1450130. <https://doi.org/10.1142/S0217979214501306>
- [34] W.S. Chung, A. Algin, q-Deformed Tamm Dancoff oscillators: Representation, Fermionic extension and physical application, *International Journal of Modern Physics B* **29** (2015) 1550177. <https://doi.org/10.1142/S0217979215501775>
- [35] P. Salamon, J. Nulton, E. Ihrig, On the relation between entropy and energy versions of thermodynamic length, *The Journal of Chemical Physics* **80** (1984) 438. <https://doi.org/10.1063/1.446467>