Nonlinear optimization on regular black hole solutions

Sayed Hamid Mehdipour*,[1], Armin Ghane Kanafi[2], Seyed Mohsen Peyghoon[3]

[1] Department of Physics, College of Basic Sciences, Lahijan Branch, Islamic Azad University, P. O. Box 1616, Lahijan, Iran

[2] Department of Mathematics, College of Basic Sciences, Lahijan Branch, Islamic Azad University, P. O. Box 1616, Lahijan, Iran

[3]Ibne Shahr Ashoob-e Saravi Student Research Center, Administration of Education, District 1, Sari, Iran

Received: 13.06.2021 Revised: 24.09.2021 Accepted: 23.11.2021

Doi: 10.22055/jrmbs.2022.17346

Abstract

Using a nonlinear optimization approach, this paper seeks to find optimal solutions for different states of nonsingular black holes in noncommutative space-time that include nonlinear constraints of the inequality type. In order to solve the nonlinear optimization problem resulting from the physical model, the successive quadratic programming method is used. In the mentioned framework, an optimal maximum solution of the Lagrangian uncertainty function is obtained for the particular values of free parameters of the problem, so that the optimal state is somewhat independent of quantum effects and the solution corresponding to the classical state is achieved in very short distances. In other words, the final stage of evaporation of black holes depends only in part on the inherent property of manifold in noncommutative geometry and is independent of the magnetic charge. However, the noncommutative effects, albeit trivial, are individually sufficient to generate remnants at the end of black holes' lifetime and prevent the classical solution from being singular on a microscopic scale of space-time.

Keywords: Nonlinear optimization method, Successive quadratic programming, Nonlinear electrodynamics, Hayward black hole, Noncommutative effects, Singularity, Hawking radiation, Uncertainty principle

* Corresponding Author: mehdipour@liau.ac.ir

بهینه‌سازی غیرخطی روی جواب‌های سیاهچاله‌های ناتکین

سید حمید مهدی پور*[۱]، آرمین قانع کنفی[۲]، سید محسن پیغون[۳]

[۱] گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، لاهیجان، ایران

[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، لاهیجان، ایران

[۳] پژوهش سرای دانش آموزی ابن شهر آشوب، اداره آموزش و پرورش، ناحیهٔ۱، ساری، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۲۳ ویرایش نهائی: ۱۴۰۰/۰۷/۰۲ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۰۲

Doi: 10.22055/jrmbs.2022.17346

چکیده

این مقاله، با بهره‌گیری از رهیافت بهینه‌سازی غیر خطی، به جستجوی جواب‌های بهینه برای حالت‌های مختلف از سیاهچاله‌های ناتکین در فضا–زمان ناجابه‌جایی که شامل قیود غیرخطی از نوع نامساوی هستند، پرداخته است. به‌منظور حل مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی حاصل از مدل فیزیکی، از روش برنامه‌ریزی درجهٔ دوم متوالی بهره گرفته می‌شود. در چارچوب مذکور، یک جواب بیشینهٔ بهینه به‌ازای مقادیری ویژه از پارامترهای آزاد مسأله برای تابع عدم قطعیت لاگرانژی به‌دست می‌آید؛ به‌طوری‌که حالت بهینه تا حدودی مستقل از اثرات کوآنتومی بوده و جوابی متناظر با حالت کلاسیک در فواصلی بسیار کوتاه حاصل گردیده است. به‌عبارت دیگر، مرحلهٔ نهایی تبخیر سیاهچاله‌ها تنها به خاصیت ذاتی از خمینه در هندسهٔ ناجابه‌جایی به‌صورت جزئی وابسته است و مستقل از بار مغناطیسی می‌باشد؛ با این وجود، اثرات ناجابه‌جایی هرچند بسیار اندک به تنهایی کفایت می‌کنند تا باعث ایجاد پسماندهایی در پایان عمر سیاهچاله‌ها گردند و از تکین شدن جواب کلاسیک در مقیاس ریز فضا–زمان جلوگیری نمایند.

کلیدواژگان: بهینه سازی غیرخطی، برنامه ریزی درجهٔ دوم متوالی، الکترودینامیک غیرخطی، سیاهچالهٔ هیوارد، اثرات ناجابه‌جایی، تکینگی، تابش هاوکینگ، اصل عدم قطعیت

مقدمه

بهینه‌سازی را می‌توان علم تشخیص مطلوب‌ترین جواب برای مسأله‌ای که دارای تعریفی مشخص در ریاضیات است، معرفی نمود. در حقیقت، بهینه‌سازی به‌عنوان رهیافتی به‌سوی نتیجهٔ بهتر، در عملیاتی که دارای محدودیت‌های مشخصی است، به‌کار می‌رود. از زیرشاخه‌های اصلی در مباحث بهینه‌سازی، حل مسائل بهینه‌سازی غیر خطی[۱] است. امروزه، تکنیک‌های محاسباتی گوناگونی به‌منظور حل این‌گونه از مسائل ارائه شده‌اند که از پرکاربردترین آنها، می‌توان به رهیافت گرادیان، گرادیان مزدوج، نیوتن و شبه‌نیوتن اشاره نمود [۱]. حوزهٔ حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی شامل مسائل نامقید و مقید از نوع پیوسته و گسسته می‌باشد [۲]. روش‌های بسیاری برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی پیوسته توسط محققین متفاوت ارائه شده است. در بین سال‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ تلاش‌های بسیاری جهت توسعه روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی پیوسته صورت گرفت. به‌عنوان نمونه، روش شبه‌نیوتن، نخستین بار توسط داویدون[۲] برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید ارائه شد [۳]. سپس

* نویسنده مسئول: mehdipour@liau.ac.ir

[1] Nonlinear optimization
[2] Davidon

تحلیل ساختاری آن به‌طور کامل توسط دنیس و مور[1] مورد بررسی قرار گرفت [۴]. تاکنون گام‌های بسیاری جهت توسعهٔ نظریهٔ روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی پیوسته برداشته شده است، با این وجود همچنان محققین بسیاری به‌صورت مستمر در حال بررسی و ارائهٔ روش‌هایی در راستای بهبود نتایج حاصل، به‌ویژه برای مسائلی در ابعاد بالا، هستند؛ از آن جمله می‌توان به‌روش برنامه‌ریزی درجهٔ دوم متوالی (SQP)[2] و روش‌های لاگرانژ افزوده[3] اشاره نمود [۷–۵]. در سال‌های اخیر نیز، توجه ویژهٔ معطوف بر کاربرد تکنیک‌های بهینه‌سازی در فیزیک، اقتصاد و مهندسی بوده است که عموماً از متغیرهای گسسته یا پیوسته در فرمولبندی آنها استفاده شده است [۱۲–۸].

یکی از مسائل مهم در فیزیک ذرات و کیهان‌شناسی، مبحث تکینگی مرکزی[4] می‌باشد که مخصوصاً در فیزیک سیاهچاله‌ها به‌عنوان یک واقعیت تفکیک نشدنی از نظریهٔ نسبیت عام (GR)[5] اینشتین[6] درآمده و به‌شکل گسترده‌ای مورد پذیرش قرار گرفته است [۱۳]. با این وجود، رهیافت‌های گوناگونی در باب پدیده شناختی جهت حل این مسأله از طریق یک مرکز ناتکین مورد بحث قرار گرفته‌اند [۱۴]. به‌عنوان نمونه در یک مدل الهام یافته از هندسهٔ ناجابه‌جایی (NCG)[7]، یک ذره نقطه‌ای در فضا–زمان ناجابه‌جایی با یک تابع توزیع دلتا–دیراک[8] توصیف نمی‌شود، بلکه به‌صورت یک ذره لکه‌ای[9] توسط یک تابع توزیع گاؤسی[10] با پهنای $\sqrt{\vartheta}$ توصیف می‌گردد، به‌گونه‌ای که تفکیک مختصاتی فراسوی این پهنای کمینه امکان‌پذیر نیست [۱۵]. از این‌رو، تانسور انرژی–تکانه[11] دچار تغییر می‌گردد، اما تانسور اینشتین در معادلات میدان گرانش بدون هیچ گونه تغییری حفظ می‌شود. به‌عنوان یک نتیجهٔ جالب از گستردگی ساختار ریز[12] در این مدل ناجابه‌جایی می‌توان به حذف تکینگی انحنا در مبدأ سیاهچاله‌ها اشاره نمود. به‌جای یک تکینگی انحنا، یک حالت خلاء دوسیته ناتکین[13] ناشی از اثر افت و خیزهای شدید کوآنتومی در فواصل کوتاه پدیدار خواهد شد. در واقع یک سیاهچالهٔ ناجابه‌جایی دارای ترکیبی از یک هستهٔ دوسیته حول مبدأ به‌همراه متریک معمول سیاهچاله در نواحی دور از مبدأ می‌باشد. از این‌رو ماهیت هستهٔ دوسیته در مرکز سیاهچاله از فروپاشی آن به یک حالت تکین جلوگیری می‌کند و یک متریک معمول در فواصل بزرگ (نواحی که رفتار طول کمینه بی‌اهمیت است) حاصل می‌آید، در حالی‌که فیزیک جدیدی در فواصل کوچک پدیدار می‌گردد.

از سویی دیگر، منبع فیزیکی یک سیاهچاله ناتکین (RBH)[14] را می‌توان به‌صورت یک میدان گرانشی در نظریهٔ الکترودینامیک غیرخطی (NED)[15] نیز تفسیر نمود [۱۶]. دو هدف مهم در نظریهٔ NED وجود دارد: ۱– در نظر گرفتن میدان الکترومغناطیسی به‌همراه ذرات در چارچوبی با منبع فیزیکی ۲– ممنوعیت از واگرایی کمیت‌های فیزیکی. فرآیند مشابهی توسط یک مدل فیزیکی معتبر از NED جفت شده با گرانش حاصل می‌آید؛ به‌گونه‌ای که جواب‌های باردار الکتریکی ناتکین با تقارن کروی، شرط ضعیف انرژی را تصدیق کرده و شامل یک مرکز دوسیته غیر قابل انکار می‌باشند [۱۴].

---

[1] Dennis and Moré
[2] Successive quadratic programming
[3] Augmented Lagrangian methods
[4] Central singularity
[5] General relativity
[6] Einstein
[7] Noncommutative geometry
[8] Dirac-delta function distribution
[9] Smeared-like particle
[10] Gaussian distribution
[11] Energy-momentum tensor
[12] Extended microstructure
[13] Regular deSitter vacuum state
[14] Regular black hole
[15] Nonlinear electrodynamics

سیاهچاله باردین[1] به‌عنوان اولین مدل از سیاهچاله‌های ناتکین در GR شناخته می‌شود که توسط باردین در سال ۱۹۶۸ مطرح گردیده است [۱۷]. جواب هیوارد[2]، نوع معروف دیگری از فضا-زمان‌های ناتکین محسوب می‌شود. به‌طوری‌که ناحیهٔ ایستا در آن باردین-گونه است، در حالی‌که نواحی پویا در آن وایدیا-گونه[3] هستند [۱۸]. مطالعات بیشماری در خصوص جواب‌های دیگر نظریهٔ گرانش ترکیب شده با NED صورت گرفته است، به‌عنوان نمونه به مقالات [۲۲-۱۹] مراجعه نمایید.

در سال‌های اخیر، تصحیحات مهمی روی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ (HUP)[4] در مقیاس‌های حدی همچون مقیاس فرابنفش (UV)[5] و مقیاس فروسرخ (IR)[6] پیشنهاد شده‌اند [۲۳]. در مقیاس UV، ترکیب گرانش در نظریهٔ میدان کوآنتومی به‌طور مؤثری منجر به یک برش در رژیم انرژی بالا یعنی مقیاس طول کمینه از مرتبهٔ طول پلانک[7] $l_{Pl} \approx 10^{-35}\text{m}$ خواهد شد. مطالعات روی برخوردهای ریسمان در انرژی‌های پلانکی به‌همراه مجموعهٔ تحلیلی از نوع بازبهنجارش منجر به اصلاح HUP می‌شود که به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP)[8] معروف است [۲۴]. کاربرد GUP در ترمودینامیک سیاهچاله‌ها توجهات بسیاری را به‌خود جلب کرده است و به اصلاحات قابل توجهی در فرآیند گسیل، به‌خصوص در مراحل نهایی تبخیر، منجر گشته است [۲۵]. اشاره به‌این نکته حائز اهمیت است که ترمودینامیک سیاهچاله‌ها در حقیقت ارتباطی عمیق میان فیزیک سیاهچاله‌ها و نظریهٔ کوآنتوم برقرار می‌کند. به‌عنوان مثال، در سال ۲۰۰۱، آدلر[9] و همکاران [۲۶] ادعا کردند که برخلاف دیدگاه متعارف، GUP قادر است از ناپدید گشتن کامل سیاهچاله‌های کوچک ممانعت کند، درست به‌همان شیوه که HUP از فروپاشی کامل اتم هیدروژن جلوگیری می‌کند. آنها رهیافت GUP را برای استخراج تابش هاوکینگ[10] در یک روش ابتکاری به‌کار گرفتند تا دمای تصحیح یافته سیاهچاله را پیدا نمایند. در این روش ابتکاری، دمای هاوکینگ با بهره‌گیری از HUP و خواص عمومی سیاهچاله‌ها به‌دست می‌آید [۲۷]. از این رو، می‌توان از فیزیک سیاهچاله‌ها استنباط نمود که هر نظریهٔ گرانش کوآنتومی[11] می‌بایست دارای یک طول کمینهٔ ذاتی از مرتبهٔ طول پلانک باشد [۲۸]. از آن گذشته، مطالعات فراوانی در نظریهٔ ریسمان و NCG به‌نوع خاصی از تصحیحات روی HUP می‌پردازند که به‌حضور کرانی مشخص جهت تفکیک احتمالی فواصل در مقیاس‌های ویژه اشاره دارند [۲۹]. به‌راستی که به‌دلیل حضور انرژی‌های بالا در فواصل کوتاه در یک خمینه ناجابه‌جایی[12]، اثرات افت و خیزهای کوآنتومی خمینه قابل توجه می‌شوند و از هر نوع اندازه‌گیری جهت تعیین مکان یک ذره با دقتی بیشتر از مقیاس طول ذاتی، ممانعت می‌کنند. از این پدیده به‌عنوان مثالی از نقض موضعیت[13] در محدودهٔ طول پلانک یاد می‌شود [۳۰]. بر اساس ناجابه‌جایی، استخراج متریک سیاهچاله‌های ناجابه‌جایی با اجرایی کردن طول کمینه مشاهده پذیر روی GR انجام می‌شود. اخیراً، ما مراحل نهایی تبخیر سیاهچاله‌ها را برای جواب‌های باردین و هیوارد در فضای ناجابه‌جایی تحلیل نموده‌ایم [۳۱،۳۲]. نتایج نشان دادند که رفتار تابش هاوکینگ به‌طور قابل توجهی

[1] Bardeen black hole
[2] Hayward solution
[3] Vaidya-like
[4] Heisenberg uncertainty principle
[5] Ultraviolet scale
[6] Infrared scale
[7] Planck length
[8] Generalized uncertainty principle
[9] Adler
[10] Hawking radiation
[11] Quantum gravity theory
[12] Noncommutative manifold
[13] Locality violation

در رژیم شعاع‌های کوچک تغییر می‌کند، به‌گونه‌ای که سیاهچاله به‌طور کامل تبخیر نمی‌شود و یک باقیمانده پایدار از سیاهچاله در فاز نهایی تبخیر به‌جا خواهد ماند. همچنین در مرجع [۳۳] نشان داده شد که یک رابطه عدم قطعیت اصلاح یافته ناشی از بارهای مغناطیسی غیرخطی و اثرات ناجابه‌جایی در بطن پدیدۀ تابش هاوکینگ قابل استخراج است. در مقالۀ حاضر، ما می‌خواهیم به گسترش مقاله [۳۳] بپردازیم و چگالی لاگرانژی[1] بخش غیرخطی وابسته به تانسور میدان الکترومغناطیسی مربوط به متریک سیاهچاله متقارن کروی، ایستا و باردار ناتکین را به‌کمک حل مسألۀ بهینه سازی غیرخطی تحلیل نماییم. ما دمای هاوکینگ سیاهچاله هیوارد ناجابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم و از دمای تصحیح شده بهره می‌گیریم تا یک رابطۀ عدم قطعیت اصلاح یافته را که شامل چگالی لاگرانژی است، استخراج نماییم، دقیقاً به‌همان‌گونه که GUP، یک دمای هاوکینگ اصلاح شده را خلق می‌کند. جهت نائل آمدن به‌یک جواب بهینه از حل مدل سیاهچاله‌های ناتکین که شامل قیودی از نوع نامساوی غیرخطی می‌باشند، می‌توان از روش SQP استفاده نمود. مسألۀ قابل بحث در مقالۀ حاضر، دارای تابع هدف غیرخطی با محدودیت‌هایی از نوع نامساوی می‌باشد، لذا نمی‌توان از روش‌هایی نظیر جستجوی خطی با و بدون مشتق گیری، یا روش نیوتن و اصلاحات آن استفاده کرد. یکی از گزینه‌های مناسب، استفاده از تابع جریمه و تابع مانع است که می‌توان با اعمال جریمه‌هایی در تابع هدف مسألۀ بهینه‌سازی مقید را به نامقید تبدیل نمود [۱]. آنالیز همگرایی این روش‌ها نشان می‌دهد که دارای نرخ همگرایی پایین‌تری نسبت به روش‌های جهت‌های شدنی هستند. یکی از روش‌های پرکاربرد و مناسب این خانواده، روش SQP است که از نقطۀ شدنی در امتداد جهتی که مجهول است و باید تعیین شود، با طول گام مثبت حرکت می‌کند، به‌طوری‌که ضمن شدنی باقی ماندن نقطۀ جدید، شرایطی را به‌وجود می‌آورد که مقدار تابع هدف نامطلوب‌تر نگردد [۳۴].

لازم است در اینجا ارجحیت رهیافت SQP نسبت به سایر روش‌های بهینه‌سازی مورد ارزیابی قرار گیرد. الگوریتم SQP با بهره گرفتن از روش نیوتن به‌طور مستقیم، شرایط همگرایی کان-تاکر[2] را برای مسألۀ اولیه برقرار می‌سازد. یکی از خصوصیات جالب توجه رهیافت SQP آن است که زیر مسألۀ منتج شده‌ای که باید کمینه گردد، یک تقریب درجۀ دوم از تابع لاگرانژ بهنیه شده روی تقریب خطی از محدودیت‌ها است. این خصوصیت منجر به یافتن جواب‌های بهینۀ مسألۀ اولیه و مضارب لاگرانژ بهینه نیز می‌شود. ویژگی‌های نام برده در کنار پیاده سازی رایانه‌ای از دلایل استفاده از این روش می‌باشد. الگوریتم‌های دیگر همچون زوتندیک[3]، توپکیس و وینوت اصلاح شده[4] که از تقریب مرتبۀ اول استفاده می‌کنند، مستعد همگرایی کند و زیگزاگی[5] هستند [۳۵]. روش‌های دیگر از جمله برنامه‌ریزی خطی متوالی (SLP)[6] تنها زمانی‌که بهینگی در گوشه‌های ناحیۀ شدنی رخ دهد، دارای همگرایی مرتبۀ دوم خواهد بود [۳۶]. این روش برای جواب‌های بهینۀ غیرگوشه‌ای، همگرایی مرتبۀ اول و کند خواهد داشت. جهت رفع این مشکلات، از رهیافت SQP بهره می‌گیرند که با تقریب مرتبۀ دوم کار می‌کند [۳۴]. به‌طور خلاصه می‌توان ویژگی‌های مطلوب روش SQP و مزیت‌های به‌کارگیری این الگوریتم را در پیاده‌سازی آسان آن نسبت به‌روش‌های نامبرده و همچنین سرعت همگرایی قابل قبول تحت شرایط مناسب به‌همراه

[1] Lagrangian density
[2] Kuhn-Tucker convergence conditions
[3] Zoutendijk
[4] Topkis and Vienott’s modification algorithms
[5] Zigzag
[6] Successive linear programming

دست‌یابی به جواب‌های بهینۀ اولیه و همچنین مضارب لاگرانژ بهینه خلاصه نمود که در جمع‌بندی گزینه‌های پیش رو، مورد انتخاب قرار گرفته است.

در این مقاله، موارد زیر را به‌ترتیب بررسی می‌نماییم: در بخش بعد، به توصیف معادلات میدان الکترومغناطیسی غیرخطی در فضا–زمان‌های ناتکین می‌پردازیم. اثرات گستردگی ساختار ریز روی فضا–زمان هیوارد در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، دمای هاوکینگ سیاهچاله هیوارد ناجابه‌جایی را تعیین می‌کنیم و به‌منظور یافتن اثر چگالی لاگرانژی روی تابش هاوکینگ، به‌تحلیل رابطۀ عدم قطعیت اصلاح یافته برای فوتون‌های تابش شده‌ای که از طریق HUP استخراج شده‌اند، می‌پردازیم. در این راستا، ارتباطی میان چگالی لاگرانژی RBH و اصل عدم قطعیت آشکار می‌شود. همچنین، بهینه‌سازی غیرخطی را روی جواب سیاهچاله‌های ناتکین به اجرا گذاشته و جواب‌های بهینه را برای حالت‌های مختلف به‌کمک روش SQP به‌دست می‌آوریم. در بخش پایانی، نتایج نهایی به‌شکل خلاصه ارائه می‌گردند. در سرتاسر مقاله، شاخص‌های یونانی به اعداد صفر تا سه اشاره دارند. همچنین برای سادگی، از واحدهای طبیعی با تعریف $\hbar = c = G = k_B = 1$ استفاده کرده‌ایم.

جفت‌شدگی میان گرانش اینشتین و الکترودینامیک غیر خطی

در این بخش، ما شکل عام متریک‌های RBH با تقارن کروی، ایستا و باردار در GR را که با NED جفت شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. ما با کنشی که توصیف‌گر دینامیک یک میدان خود–گرانشی NED در GR است، شروع می‌کنیم:

$$I = \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{1}{4}R - \mathcal{L}(F)\right)\sqrt{-g}\,d^4x\,, \tag{۱}$$

که در آن R، اسکالر انحنای[۱] مرتبط با عنصر خط $g_{\mu\nu}$ می‌باشد و چگالی لاگرانژی $\mathcal{L}(F)$ یک تابع غیرخطی دلخواه از ناوردای لورنتس[۲]، $F = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$، است. تانسور میدان الکترومغناطیسی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]}\,, \tag{۲}$$

که در آن A_μ، ۴–بردار پتانسیل می‌باشد. این نکته می‌بایست مورد توجه قرار گیرد که چگالی لاگرانژی در میدان الکترومغناطیسی ضعیف به مجانب ماکسولی[۳] میل می‌نماید، یعنی هنگامی‌که $F \to 0$، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(F) \to F, \\ \mathcal{L}_F \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} \to 1\,. \end{cases} \tag{۳}$$

معادلات میدان اینشتین–NED منتج از کنش۱ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$G_\mu{}^\nu = 2\left(\mathcal{L}_F F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} - \delta_\mu{}^\nu \mathcal{L}\right), \tag{۴}$$

$$\nabla_\mu\left(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}\right) = 0\,. \tag{۵}$$

حال یک جواب حدسی عام برای سیاهچاله‌ای که دارای ترکیب تقارن کروی ایستا به‌همراه بار مغناطیسی غیرخطی است، لحاظ می‌کنیم:

$$ds^2 = U(r)dt^2 - U^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{۶}$$

که در آن $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$، عنصر سطح کرۀ واحد ۲–بعدی است. تابع متریک $U(r)$ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$U(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{۷}$$

که در آن $M(r)$، تابع توزیع جرم است. تانسور میدان الکترومغناطیسی برای یک سیاهچاله ایستای باردار با تقارن کروی دارای ۲ مؤلفۀ غیر صفر، یعنی: F_{01} و F_{23}، متناظر با به‌ترتیب میدان‌های شعاعی الکتریکی و مغناطیسی می‌باشد. در این صورت، ۴–بردار پتانسیل در مختصات کروی (t, r, θ, ϕ) به‌شکل

[۱] Curvature scalar
[۲] Lorentz invariant
[۳] Maxwell asymptotic

$A_\mu = -\frac{Q_{\rm e}}{r}\delta_\mu^0 - Q_{\rm m}\cos\theta\,\delta_\mu^3$ نمایش داده می‌شود. در رابطهٔ فوق، $Q_{\rm e}$ و $Q_{\rm m}$ به‌ترتیب بارهای الکتریکی و مغناطیسی هستند. به‌کمک معادلات ۵، ۲ و ۴-بردار پتانسیل می‌توان مؤلفه‌های غیر صفر $F_{\mu\nu}$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{cases} F_{01} = -\frac{Q_{\rm e}}{r^2\mathcal{L}_F}\,, \\ F_{23} = Q_{\rm m}\sin\theta\,. \end{cases} \qquad ۸$$

شایان ذکر است که حل تحلیلی معادلات حرکت به‌ازای بارهای دوگانهٔ الکتریکی و مغناطیسی بسیار بغرنج است. لذا در اینجا می‌خواهیم به جواب‌های دقیق سیاهچاله‌ای صرفاً با محتوای بار مغناطیسی بپردازیم؛ یعنی: $Q_{\rm e} = 0$؛ به‌این دلیل که در NED، علت ناتکین بودن جواب فقط برخاسته از بار مغناطیسی است. به بیانی دیگر، در یک ترکیب مغناطیسی خالص، تنها مؤلفهٔ غیر صفری که از تانسور میدان الکترومغناطیسی باقی می‌ماند، مؤلفهٔ F_{23} است. برای جزئیات محاسباتی بیشتر می‌توان به مقالهٔ [۲۲] مراجعه نمود. بار مغناطیسی کل سیاهچاله را نیز می‌توان با رابطهٔ زیر ارائه نمود:

$$Q_m = \frac{1}{4\pi}\int dA\,. \qquad ۹$$

با استفاده از معادلهٔ۵، مربع شدت میدان به‌صورت $F = \frac{2Q_m^2}{r^4}$ به‌دست می‌آید.

با انتخاب یک تابع جرم فیزیکی مناسب می‌توان چگالی لاگرانژی را برای حالت متقارن کروی ایستا که شامل بار مغناطیسی باشد، استخراج نمود. تابع جرم هیوارد [۱۸] قادر است تا شرایط مذکور را ارضاء نماید:

$$M(r) = \frac{mr^3}{r^3+h^3}\,, \qquad ۱۰$$

که در آن h (برحسب واحد طول)، پارامتر آزاد هیوارد نام دارد و مرتبط با بار مغناطیسی کل سیاهچاله است [۳۲]. مقدار h محدود به‌اعداد مثبت است؛ چون جواب سیاهچاله تنها به‌ازای مقادیر مثبت از این پارامتر موجود است. حال چگالی لاگرانژی برحسب تابع r، با حل معادلات میدان و بهره‌گیری از رابطهٔ۷ به‌صورت زیر قابل حصول است:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{dM(r)}{dr}\,, \qquad ۱۱$$

که برای سیاهچاله هیوارد به‌راحتی با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{3mh^3}{(r^3+h^3)^2}\,. \qquad ۱۲$$

به‌آسانی دیده می‌شود که برای حالت جرم ADM[1] در فاصلهٔ بینهایت ($r \to \infty$)، تابع جرم به مقدار ثابتی کاهش می‌یابد، یعنی: $M(r) = m$ و همان‌طور که انتظار آن می‌رفت، سیاهچاله شوارتزشیلد[2] بازیابی می‌شود که در حقیقت به‌جواب معادلات اینشتین در خلأ اشاره دارد ($\mathcal{L} = 0$). همچنین برای حالت $\mathcal{L} = F$ به‌جواب سیاهچالهٔ باردار مغناطیسی رایزنر-نوردشتروم[3] می‌رسیم، یعنی: $M(r) = m - \frac{Q_m^2}{2r}$، که مطابق با انتظار به‌جواب نظریهٔ اینشتین-ماکسول اشاره می‌کند.

اثر گستردگی ساختار ریز روی سیاهچاله هیوارد

در این بخش، می‌خواهیم تأثیر یک ساختار گسترش یافته متناظر با دیدگاه مقیاس ریز فضا-زمان را روی سیاهچاله هیوارد تحلیل نماییم. ما ناجابه‌جایی را جهت داشتن مقیاس طول کمینهٔ ذاتی، معادل با $\sqrt{\vartheta}$ لحاظ می‌کنیم. بنابراین، یک ساختار نقطه‌ای را نمی‌توان با یک تابع توزیع دلتا-دیراک تشریح نمود، بلکه آن را به‌کمک تابع توزیع گاؤسی لکه‌ای با پهنای کمینه $\sqrt{\vartheta}$ توصیف می‌نماییم. در اینجا ϑ، به‌عنوان کوچکترین سلول بنیادی از یک سطح مشاهده پذیر در نظریهٔ تغییر شکل یافته محسوب می‌شود. با وجود اینکه تانسور اینشتین

[1] Arnowitt-Deser-Misner mass
[2] Schwarzschild black hole
[3] Reissner-Nordström

مستقیماً تغییر شکل نمی‌دهد، اما تغییر شکل در تانسور انرژی–تکانه توسط یک ساختار گسترش یافته منجر به القای یک تغییر شکل در معادلهٔ اصلی اینشتین خواهد شد. متریک کلاسیک متعارف در فواصل بزرگ بازیابی می‌شود، در حالی‌که در فواصل کوتاه انتظار فیزیک جدیدی را خواهیم داشت؛ جایی‌که از اثر گستردگی ساختار ریز نمی‌توان چشم‌پوشی نمود.

در رهیافت مختصهٔ حالت‌های همدوس[1] که توسط اسمایلاجیک و اسپالوچی[2] [۳۰] پیشنهاد شده است، یک جرم نقطه‌ای m به‌جای اینکه به‌طور کامل در یک نقطه متمرکز شده باشد، به‌صورت یک ساختار لکه‌ای در سرتاسر ناحیه‌ای خطی به‌اندازهٔ $\sqrt{\vartheta}$ پخش می‌شود. رویکرد انتخابی ما در اینجا به‌جستجوی یک توزیع جرم گاؤسی، با پهنای کمینه، متقارن کروی و ایستا می‌پردازد؛ به‌گونه‌ای که اندازهٔ ناجابه‌جایی در آن توسط پارامتر $\sqrt{\vartheta}$ تعیین می‌شود. بنابراین، می‌بایست توزیع‌های جرم را توسط تابع توزیع لکه‌ای مدل نماییم:

$$\rho_\vartheta(r) = \frac{m}{(4\pi\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right). \qquad ۱۳$$

چگالی جرمی ۱۳ نمایش دهندهٔ یک منبع فیزیکی است که در فواصل خیلی بزرگ شباهت بسیار زیادی با یک منبع نقطه‌ای دارد؛ اما در فواصل بسیار کوتاه فیزیک جدیدی ارائه می‌دهد. همان‌طور که در مراجع [۳۲،۳۳] نشان داده شده است، تابع جرم هیوارد ناجابه‌جایی $M(r)$ برحسب h و ϑ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$M(r) = \frac{mr^3\left[\mathcal{G}\left(\frac{r}{2\sqrt{\vartheta}}\right)-\frac{r}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right)\right]}{r^3+h^3}, \qquad ۱۴$$

که در آن تابع خطای گاؤسی، به‌صورت

$$\mathcal{G}(n) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^n e^{-y^2}dy\,, \qquad ۱۵$$

تعریف می‌شود. در حد جابه‌جایی و $h \neq 0$، تابع $M(r)$ به‌سوی تابع جرم هیوارد میل می‌کند، یعنی:

$$M(r) \to \frac{mr^3}{r^3+{}^3}, \qquad ۱۶$$

در حالی‌که برای حالت $\vartheta \neq 0$ و $h = 0$، خواهیم داشت:

$$M(r) \to m\left[\mathcal{G}\left(\frac{r}{2\sqrt{\vartheta}}\right) - \frac{r}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right)\right]. \qquad ۱۷$$

این بدان معناست که به‌ازای $\vartheta \to 0$ و $h \to 0$، تابع جرم ۱۴ با جرم ADM در فواصل بسیار دور، یعنی: m که متناظر با حالت شوارتزشیلد است، معادل می‌شود.

عدم قطعیت در تعیین چگالی لاگرانژی

بنیان HUP به‌عنوان یک ابزار مفهومی لازم جهت درک تمایزها میان نظریهٔ کلاسیک و کوآنتوم به‌شکل گسترده‌ای مورد پذیرش قرار گرفته است. با فرض آنکه HUP همیشه قادر نیست تا شالودهٔ چیزی که غیر کلاسیک است را در حوزهٔ مکانیک کوآنتومی کشف کند، منطقی است که از تعمیم دادن آن صحبت نماییم. به‌عبارت دیگر، یک فرمولبندی کامل از HUP می‌تواند عصارهٔ کوآنتومی را از نظریهٔ کوآنتوم استخراج نماید. به‌عنوان مثال، حضور یک طول کمینه مشاهده‌پذیر گویای یک خصیصهٔ پدیده شناختی از تمامی رهیافت‌های منتهی به گرانش کوآنتومی است که به GUP منجر می‌شود:

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{1}{2}\left(1 + \mathcal{g}(\Delta p)^2\right), \qquad ۱۸$$

که در آن $\mathcal{g}$، ثابتی از مرتبهٔ واحد است که معمولاً مثبت اختیار می‌شود و وابسته به جزئیات نظریهٔ گرانش کوآنتومی است. رابطهٔ GUP به یک عدم قطعیت کمینهٔ معین $\Delta x_{\min} = \sqrt{\mathcal{g}}$ اشاره دارد. از این‌رو، $\Delta x_{\min} > 0$ را می‌توان نمودی از فضای فازی دانست و یا به‌عنوان نتیجه‌ای از ساختار لکه‌ای ذرات بنیادی در نظر گرفت. در بیانی متفاوت، ساختار فضا–زمان با مفهوم طول کمینهٔ مؤثر گره خورده است؛ به‌گونه‌ای که تمامی اندازه

[1] Coordinate coherent states approach

[2] Smailagic and Spallucci

گیری‌ها را با هدف مشاهدهٔ موقعیت یک ذره با دقتی بیش از مقیاس طول ذاتی، غیر ممکن می‌سازد.

با توجه به انگیزش اشاره شده در بالا، برای شروع می‌توان ایده‌ای مشابه اما وارون با ایده اوهانیان و رافینی[1] [۲۷] را ارائه نمود، تا به نوعی GUP دست پیدا کنیم. آنها از HUP بهره گرفتند، تا به یک رهیافت ابتکاری جهت استخراج تابش هاوکینگ دست یابند. ما در رهیافت خود می‌توانیم ابتدا دمای هاوکینگ اصلاح یافته را محاسبه نماییم و از دیدگاهی ابتکاری مشابه با مرجع [۲۷] استفاده کنیم تا به اصل عدم قطعیت اصلاح یافته برای فوتون‌های تابیده دست یابیم. سیاهچاله‌ها، یک طیف گرمایی مشابه با طیف تابش جسم سیاه را که سازگار با علم ترمودینامیک است و به تابش هاوکینگ معروف می‌باشد، از خود ساطع می‌کنند که دمای آن بدین صورت داده می‌شود:

$$T_H = \frac{1}{4\pi}\frac{dU(r)}{dr}\bigg|_{r=R_{\rm EH}}, \qquad ۱۹$$

که در آن $R_{\rm EH}$، شعاع افق رویداد[2] سیاهچاله است. با استفاده از معادلات ۷، ۱۱ و تابع جرم روی افق رویداد، یعنی:

$$M(R_{\rm EH}) = \frac{R_{\rm EH}}{2}, \qquad ۲۰$$

به‌آسانی می‌توان دمای هاوکینگ سیاهچاله هیوارد ناجابه‌جایی را به‌دست آورد:

$$T_H = \frac{1}{4\pi R_{\rm EH}} - \frac{R_{\rm EH}}{8\pi}\mathcal{L}(R_{\rm EH}). \qquad ۲۱$$

این دما به رابطهٔ عدم قطعیت اصلاح شده منجر می‌شود. در این چارچوب، می‌توان انرژی مشخصهٔ فوتون‌های تابش شده ناشی از HUP را تخمین زد. نزدیک سطح سیاهچاله، یک عدم قطعیت ذاتی در یافتن مکان هر ذره‌ای در محدودهٔ شعاع افق ($\Delta x \sim R_{\rm EH}$) وجود دارد. بنابراین می‌توان عدم قطعیت تکانه برحسب عدم قطعیت فاصله و چگالی لاگرانژی را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\Delta p \sim \frac{1}{2R_{\rm EH}} - \frac{R_{\rm EH}}{4}\mathcal{L}(R_{\rm EH}). \qquad ۲۲$$

عدم قطعیت در تعیین انرژی نیز عبارت است از :

$$\Delta E \sim 4\pi T_H, \qquad ۲۳$$

که به‌صورت انرژی مشخصهٔ فوتون‌های تابشی و یا دمای مشخصه‌ای که معادل با دمای هاوکینگ به انضمام ضریب هماهنگی 4π است، بیان می‌شود. رابطهٔ عدم قطعیت اصلاح یافته‌ای که شامل تابع چگالی لاگرانژی می‌باشد را می‌توان از HUP، به‌صورت زیر استخراج نمود:

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\Delta x)^2}{2}\mathcal{L}(\Delta x)\right). \qquad ۲۴$$

عبارت دوم سمت راست معادلهٔ ۲۴ وابسته به پارامترهای هیوارد و ناجابه‌جایی است. بخش اصلاح یافته در معادلهٔ بالا، برگرفته از بار مغناطیسی غیرخطی به‌همراه اثرات ناجابه‌جایی به‌هنگام ردیابی فوتون است و هیچگونه ارتباطی با اثرات گرانش در قیاس با GUP ندارد. انحراف از جواب متعارف، تنها در ناحیه‌ای محدود حول مبدأ رخ می‌دهد. در حد $\Delta x \gg 1$، عبارت اول سمت راست رابطهٔ عدم قطعیت اصلاح یافته، جملهٔ غالب است؛ لذا HUP بازیابی می‌شود. در حالی‌که در حد $\Delta x \ll 1$، عبارت دوم غالب است و نقش مهمی در نواحی حول مبدأ ایفا می‌کند؛ جایی‌که گرانش با یک میدان الکترومغناطیسی غیرخطی توصیف می‌گردد و نظریهٔ NCG جایگزین GR می‌شود. چگالی لاگرانژی متناظر برای سیاهچاله هیوارد ناجابه‌جایی برحسب h و ϑ با استفاده از روابط ۱۱ و ۱۴ به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}(r) = 4\pi\rho_\vartheta + \frac{3mh^3}{(r^3+h^3)^2}, \qquad ۲۵$$

که در حد $\vartheta \to 0$، به رابطهٔ۱۲ برای سیاهچاله هیوارد کاهش می‌یابد و در حد $h \to 0$، تنها عبارت اول آن

[1] Ohanian and Ruffini

[2] Event horizon radius

باقی می‌ماند که به چگالی لاگرانژی برای سیاهچاله شوارتزشیلد ناجابه‌جایی اشاره دارد.

لاگرانژی مشخصهٔ فوتون‌های تابشی، از طریق HUP نیز قابل تخمین زدن است. از آنجایی‌که Δx متناسب با شعاع افق رویداد است، پس داریم:

$$M(\Delta x) \approx \frac{\Delta x}{2}. \qquad ۲۶$$

لذا از معادلهٔ ۲۵ می‌توان عدم قطعیت لاگرانژی را برحسب عدم قطعیت فاصله تعیین نمود:

$$\Delta \mathcal{L} \approx \frac{2m}{\Delta x^3 + \ {}^3}\left[\frac{\Delta x^3 \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{4\vartheta}\right)}{\sqrt{\pi \vartheta^3}} + \frac{3 \ \ {}^3}{m \Delta x^2}\right]. \qquad ۲۷$$

جملهٔ عدم قطعیت لاگرانژی نشأت گرفته از اثر ترکیبی منبع مغناطیسی غیرخطی و ناجابه‌جایی می‌باشد؛ به‌طوری‌که برای حالت $\mathcal{L}(\Delta x) \to 0$ جواب خلاء بازیابی می‌شود، یعنی:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}. \qquad ۲۸$$

بنابراین هنگامی‌که $r \to \infty$، تابع متریک هیوارد ناجابه‌جایی به‌صورت سیاهچاله شوارتزشیلد رفتار می‌کند که به HUP اشاره دارد. در اینجا می‌بایست خاطر نشان نمود که در فواصل کوتاه تنها جواب‌هایی قابل پذیرش هستند که تحت شرط $r \geq \Delta x_{\min}$ باشند. به‌عبارت دیگر، یک عدم قطعیت کمینه در تعیین مکان وجود دارد که هم ارز با شعاع کمینه غیر صفر سیاهچاله ($\Delta x_{\min} \sim R_{\min}$) است؛ به‌گونه‌ای که هر نوع اندازه‌گیری جهت یافتن مکان ذره با دقتی بیش از $\Delta x_{\min}$ را غیر ممکن می‌سازد. توصیف فیزیکی $R_{\min}$ معادل با کوچکترین فاصلهٔ شعاعی است که ذرهٔ آزمون نسبت به منبع قرار می‌گیرد، تا اندازه‌گیری انجام دهد. پس اگر $r < R_{\min}$ باشد، آنگاه با وضعیت دینامیکی غیر معمولی همچون دمای منفی مواجه می‌شویم [۳۷]. در حقیقت، هنگامی‌که سیاهچاله به ترکیب غایی در شعاع کمینه (شعاع پسماند) می‌رسد، دما صفر است و تابش هاوکینگ ناگهان متوقف می‌شود. این بدان معناست که به‌جای رفتار واگرای معمول به هنگام فاز نهایی تبخیر هاوکینگ در شعاع‌های کوچک، به‌ازای مقداری معین از شعاع، دما به صفر می‌رسد. به‌همان دلیل، فاز نهایی تبخیر سیاهچاله به‌عنوان پسمانده سیاهچاله غایی[1] در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان یک پیآمد مهم، حضور یک برش معین از پایین در مقیاس فواصل کوتاه ایجاب می‌کند که قیدی روی تمامی اندازه‌گیری‌ها جهت تعیین مکان ذره در نظریهٔ گرانش ناجابه‌جایی لحاظ شود. بنابراین، می‌بایست شرط $\mathcal{L} \leq \Delta \mathcal{L}_{\max}$ اعمال گردد؛ چون برای ناحیه‌ای از متریک که شرط $\Delta \mathcal{L} > \Delta \mathcal{L}_{\max}$ برقرار است، نمی‌توان هیچ‌گونه دمایی تعریف نمود. چنین قیدی از بالا روی عدم قطعیت لاگرانژی، یک شرط لازم در راستای جلوگیری از رفتار ترمودینامیکی غیر عادی در فواصل بسیار کوتاه محسوب می‌شود. در پایان این بخش، ذکر این نکته حائز اهمیت است که اگر جواب باردین به‌عنوان نمونه‌ای دیگر از RBH های معروف انتخاب گردد [۱۷]، با وجود یک تابع جرم متفاوت، باز هم خواص عمومی تماماً هم ارز با نتایج بالا به‌دست می‌آیند.

بهینه‌سازی غیرخطی جواب‌ها در مدل سیاهچاله‌های ناتکین

در این بخش، می‌خواهیم یک بهینه‌سازی غیرخطی از جواب‌های خود که در حالت‌های گوناگونی از مدل سیاهچاله‌های ناتکین حاصل می‌گردد، ارائه نماییم. اما قبل از آن، به‌طور مختصر به چگونگی روش بهینه‌سازی غیرخطی در وضعیت‌های گوناگون می‌پردازیم. جهت توصیف این روش، مسأله بهینه‌سازی غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min \ f(x), \qquad ۲۹$$

[1] Extremal black hole remnant

$$\text{s.t. } g_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m$$
$$h_j(x) = 0, j = 1,\dots,l$$

در عبارت بالا، فرض بر آن است که توابع f، g_i و h_k به‌ازای $i = 1,\dots,m$ و $j = 1,\dots,l$، دو بار به‌طور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشند. ضمناً فرض می‌شود که $x \in \mathbb{R}^n$، متغیر تصمیم باشد. طبق تعریف، برای مجموعه شدنی داریم:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \le 0,\ i = 1\dots,m,\ h_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,l\}. \quad ۳۰$$

به‌سادگی می‌توان قیود از نوع بزرگتر مساوی را با ضرب طرفین نامعادله در عدد (-1) به قیود از نوع کوچکتر مساوی تبدیل کرد. همچنین در مسائل بیشینه سازی می‌توان قرینهٔ تابع هدف را کمینه نمود. بنابراین مسألهٔ فوق به‌شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\min f(x). \quad ۳۱$$
$$\text{s.t. } x \in X$$

اگر به‌ازای هر $x \in X$، داشته باشیم: $f(x^*) \le f(x)$، آنگاه جواب شدنی $x^* \in X$ را یک جواب بهینه برای مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی فوق گویند. در این‌صورت x^* جواب بهینه و $f(x^*)$، مقدار بهینهٔ مسألهٔ فوق خواهد بود. برای حل مسألهٔ ۳۱ روش‌های متفاوتی وجود دارد که یک دسته‌بندی از آنها شامل روش جهت‌های شدنی می‌باشد. در این گونه از روش‌ها، برای حل یک مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی از یک نقطهٔ آغازین شدنی حرکت کرده و در راستای یک جهت بهبود دهنده شدنی به نقطهٔ بهبود یافته دست می‌یابند. نحوهٔ عملکرد این نوع از روش‌ها بدین صورت است که از نقطهٔ شدنی x_k در تکرار k ام و در راستای جهت شدنی d_k با طول گام معین $\lambda > 0$ و به‌اندازهٔ کافی کوچک حرکت می‌کنیم، به‌گونه‌ای که خواص زیر برقرار باشند:

الف) همواره $x_k + \lambda d_k$ شدنی باشد؛ یعنی به‌ازای مقدار k، داشته باشیم: $x_k + \lambda d_k \in X$.

ب) مقدار تابع هدف در $x_k + \lambda d_k$ بهتر از مقدار تابع هدف در نقطه x_k باشد.

پس از تعیین جهت، می‌بایست یک مسألهٔ بهینه‌سازی یک بعدی را برای تعیین طول گام مناسب در راستای جهت d_k حل نمود. این فرایند منجر به تعیین نقطهٔ x_{k+1} می‌گردد و همین چرخه مجدداً تکرار می‌شود. اینگونه رهیافت‌ها، معمولاً به جواب‌های کان–تاکر یا گاهی اوقات به نقطهٔ فریتزجان[1] همگرا می‌شوند. به‌عنوان مثال، مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی ۳۱ را در نظر بگیرید. سپس، تکرار (x_k, u_k, v_k) را لحاظ می‌کنیم که در آن $u_k \ge 0$ و v_k، نامقید بوده و به‌عنوان تخمین‌هایی از ضرایب لاگرانژ برای محدودیت‌های نامساوی و مساوی محسوب می‌شوند. حال، مسألهٔ SQP زیر را در نظر می‌گیریم:

۳۲

$$\min\ f(x_k) + \nabla f(x_k)'d + \frac{1}{2}d'\nabla^2 L(x_k)d$$
$$\text{s.t. } g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)'d \le 0, i = 1,2,\dots,m$$
$$h_j(x_k) + \nabla h_j(x_k)'d = 0, j = 1,2,\dots,l$$

که در آن $\nabla^2 L(x_k)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 L(x_k) = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^m \nabla^2 g_i(x_k) + \sum_{j=1}^l \nabla^2 h_j(x_k). \quad ۳۳$$

شرایط کان–تاکر برای مسألهٔ ۳۲ نیازمند این شرط است که در مجموع آغازین شدنی باشد. حال ضرایب لاگرانژ u و v را به‌گونه‌ای به‌دست می‌آوریم تا داشته باشیم:

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 L(x_k)d + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x_k) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(x_k) = 0, \quad ۳۴$$
$$u_i[g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)'d] = 0, i = 1,2,\dots,m$$
$$u \ge 0$$

که در آن v، متغیر آزاد است. بنابراین اگر d_k، مسألهٔ۳۲ را با ضرایب لاگرانژ u_{k+1} و v_{k+1} حل نماید و اگر

[1] Fritz John point

$d_k = 0$ باشد، آنگاه x_k در امتداد با (u_{k+1}, v_{k+1}) به جواب کان–تاکر برای مسألهٔ اصلی ۳۱ منجر خواهد شد. در غیر این صورت، عبارت $x_{k+1} = x_k + d_k$ را قرار می‌دهیم و فرایند را مجدداً تکرار می‌کنیم. از نقاط قوت و ضعف استفاده از این الگوریتم می‌توان روی این موارد تأکید نمود که تحت شرایط مناسب، همگرایی روش SQP به جواب بهینه، از مرتبهٔ دوم بوده و نزدیک بودن نقطهٔ x_k به جواب بهینه، شرط کافی برای همگرایی می‌باشد. از سویی دیگر، یکی از ضعف‌های این روش نیاز به محاسبهٔ مشتق دوم است و همچنین این امکان وجود دارد که ماتریس $\nabla^2 L(x_k)$ معین مثبت نباشد که می‌توان با بهره‌گیری از تقریب‌های معین مثبت روش شبه‌نیوتن، مشکل فوق را برطرف نمود. جزئیات بیشتر درباره شرایط همگرایی کان–تاکر، فریتزجان و روش SQP را می‌توان در مراجع [۴۳–۳۸] مشاهده نمود. در این مقاله برای حل مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی حاصله از مدل فیزیکی، از روش SQP استفاده می‌شود. مدل فیزیکی ما متناظر با جواب‌های ناشی از حضور بارهای متنوع در سیاهچاله‌های ناتکین است که شامل قیودی از نوع صورت نامساوی غیرخطی می‌باشد. در اینجا می‌خواهیم تابع چگالی لاگرانژی ۲۵ را تحت شروطی فیزیکی بیشینه نماییم. مطابق این شروط، دمای هاوکینگ نمی‌تواند مقادیری منفی اختیار نماید، چون در غیر این‌صورت منجر به رفتار ترمودینامیکی غیر معمول خواهد شد. همچنین، شرط حضور افق رویداد این است که تابع متریک سیاهچاله، مقادیری منفی یا صفر داشته باشد. جهت رسیدن به این اهداف، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تابع دقیق چگالی لاگرانژی را (معادلهٔ ۲۵) تحت عنوان تابع هدف مجدداً معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{m}{r^3 + {}^{3}}\left(\frac{r^3 \exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right)}{2\sqrt{\pi\vartheta^3}} + \frac{3\ {}^{3}}{r^3 + {}^{3}}\left[\mathcal{G}\left(\frac{r}{2\sqrt{\vartheta}}\right) - \frac{r}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right)\right]\right). \qquad ۳۵$$

ب) مجموعهٔ قیود حاکم بر تابع هدف را به‌شکل معادلات قیدی زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} U(r) \leq 0, \\ T_H \geq 0. \end{cases} \qquad ۳۶$$

در ادامه می‌توان حالت‌هایی متفاوت از جواب سیاهچاله‌های ناتکین را به‌ازای مقادیر ویژه‌ای از h و ϑ، ایجاد نمود. در اینجا، سه مدل از سیاهچاله‌های ناتکین را ایجاد می‌نماییم:

۱) هیوارد ($h = 1$ و $\vartheta = 0$)

۲) شوارتزشیلد ناجابه‌جایی ($h = 0$ و $\vartheta = 1$)

۳) هیوارد ناجابه‌جایی ($h = 1$ و $\vartheta = 1$)

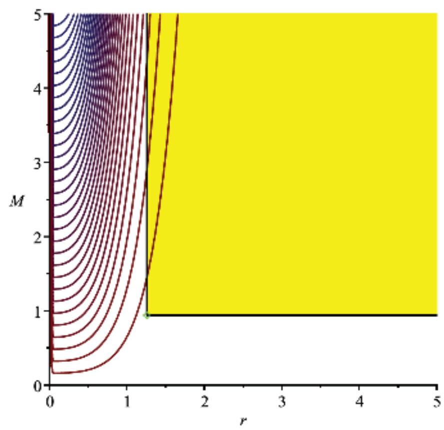
علت ناتکین شدن جواب در این سیاهچاله‌ها به‌ترتیب به حضور بار مغناطیسی، اثر ناجابه‌جایی و بار مغناطیسی در فضای ناجابه‌جایی نسبت داده می‌شود. در این وضعیت‌ها، می‌توان جواب‌های بهینه را با بهره‌گیری از رهیافت بهینه‌سازی غیرخطی استخراج نمود. این نتایج در جدول۱ به نمایش گذاشته شده‌اند.

جدول۱. جواب‌های متناظر با انواع ویژه‌ای از سیاهچاله‌ها. نتایج عددی زیر، گویای فاصلهٔ کمینه و عدم قطعیت لاگرانژی بیشینه به‌ازای مقادیر ویژه‌ای از h و ϑ می‌باشند.

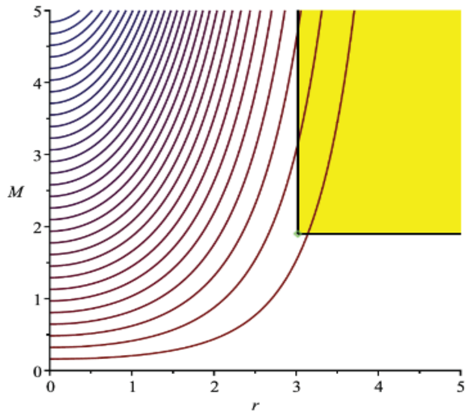
سیاهچاله هیوارد	**سیاهچاله شوارتزشیلد ناجابه‌جایی**	**سیاهچاله هیوارد ناجابه‌جایی**
$\Delta x_{\min} \cong 1/3$	$\Delta x_{\min} \cong 3$	$\Delta x_{\min} \cong 3/1$
$\Delta \mathcal{L}_{\max} \cong 1/3$	$\Delta \mathcal{L}_{\max} \cong 0/2$	$\Delta \mathcal{L}_{\max} \cong 0/2$

در جدول۱، نتایج عددی عدم قطعیت کمینه در تعیین فاصله و همچنین عدم قطعیت بیشینه در تعیین چگالی لاگرانژی به‌ازای مقادیر ویژه‌ای از h و ϑ ارائه شده‌اند. همان‌گونه که از مقادیر جدول۱ پیداست، نتایج ما با جواب‌های عددی مراجع [۳۲،۳۳] مطابقت دارند. در

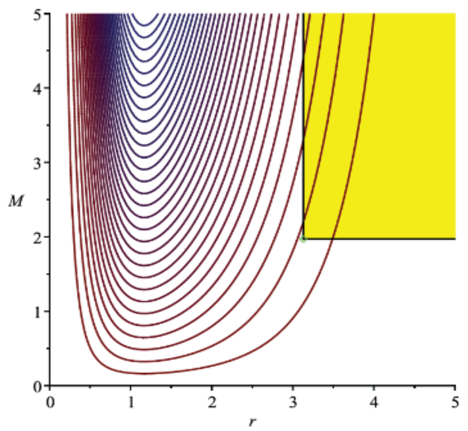
ضمن، می‌توان نمودارهای جرم برحسب شعاع سیاهچاله را با توجه به قیود اعمالی در سه حالت مذکور رسم نمود و نواحی شدنی را روی جواب‌ها متمایز کرد. این نتایج را می‌توانید در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ که به‌ترتیب به سیاهچاله‌های هیوارد، شوارتزشیلد ناجابه‌جایی و هیوارد ناجابه‌جایی اشاره دارند، ملاحظه نمایید. نتایج حاصل در توافق با جدول ۱ می‌باشند. جرم‌های کمینه در سیاهچاله‌های پسماند به‌ترتیب برای حالت‌های مذکور تقریباً معادل با $M_{\min} \cong 0{,}9$، $M_{\min} \cong 1{,}9$ و $M_{\min} \cong 2$ محاسبه می‌گردند. نتایج هر سه نوع سیاهچاله به‌ازای فواصل خیلی بلند، یعنی: $\Delta x \to \infty$، با یکدیگر معادلند که به $\Delta\mathcal{L} \to 0$ منجر می‌شود. همان‌طور که از قبل بیان شده است، تنها جواب‌هایی قابل قبول هستند که تحت شرط $r \gtrsim R_{\min}$ برقرار باشند. با توجه به مقادیر پارامترهای سیاهچاله پسماند در ۲ حالت شوارتزشیلد ناجابه‌جایی و هیوارد ناجابه‌جایی، مشاهده می‌گردد که پارامتر ناجابه‌جایی در قیاس با پارامتر هیوارد اثر غالب داشته است؛ به‌گونه‌ای که پارامترهای غائی در ۲ حالت مذکور بسیار نزدیک به‌هم می‌باشند، در حالی‌که تفاوت محسوسی در سیاهچاله هیوارد که صرفاً به‌کمک بار مغناطیسی در مبدأ آن ناتکین شده است، دیده می‌شود.



شکل۱. منحنی‌های M برحسب r برای سیاهچاله هیوارد تحت قید $\Delta x_{\min} \gtrsim 1{,}3$ رسم شده است. نقطهٔ سبز رنگ به مقادیر کمینه جرم و شعاع سیاهچالهٔ پسماند اشاره دارد. جرم پسماندهٔ کمینه در این حالت تقریباً معادل با $M_{\min} \cong 0{,}9$ می‌باشد. ناحیهٔ شدنی با رنگ زمینه زرد و ناحیه غیرشدنی با زمینه سفید مشخص گردیده است.



شکل۲. منحنی‌های M برحسب r برای سیاهچاله شوارتزشیلد ناجابه‌جایی تحت قید $\Delta x_{\min} \gtrsim 3$ رسم شده است. نقطهٔ سبز رنگ به مقادیر کمینهٔ جرم و شعاع سیاهچالهٔ پسماند اشاره دارد. جرم پسماندهٔ کمینه در این حالت تقریباً معادل با $M_{\min} \cong 1{,}9$ می‌باشد. ناحیه شدنی با رنگ زمینه زرد و ناحیهٔ غیرشدنی با زمینه سفید مشخص گردیده است.



شکل۳. منحنی‌های M برحسب r برای سیاهچاله هیوارد ناجابه‌جایی تحت قید $\Delta x_{\min} \gtrsim 3{,}1$ رسم شده است. نقطهٔ سبز رنگ به مقادیر کمینه جرم و شعاع سیاهچالهٔ پسماند اشاره دارد. جرم پسماندهٔ کمینه در این حالت تقریباً معادل با $M_{\min} \cong 2$ می‌باشد. ناحیهٔ شدنی با رنگ زمینهٔ زرد و ناحیهٔ غیرشدنی با زمینه سفید مشخص گردیده است.

حال با فرض نامنفی بودن پارامترهای آزاد h و ϑ، به‌کمک روش SQP، مقدار بیشینهٔ تابع هدف را تحت قیود اعمالی ۳۶ تعیین می‌نماییم. بر این اساس، به‌طور مشابه با حالت قبل، یک جواب بهینه به‌ازای مقادیر ویژهٔ

h، ϑ، $M_{\min}$ و $R_{\min}$ به‌دست می‌آید که به یک مقدار بیشینهٔ بهینه برای تابع عدم قطعیت لاگرانژی منجر می‌شود:

$$\begin{cases} h = 0 \\ \vartheta \cong 7 \times 10^{-10} \\ M_{\min} \cong 13 \\ R_{\min} \cong 2 \times 10^{-5} \end{cases} \Rightarrow \Delta\mathcal{L}_{\max} \cong 4 \times 10^{7}. \quad (۳۷)$$

با توجه به جواب بالا مشاهده می‌گردد که حالت بهینه تقریباً مستقل از اثرات کوآنتومی است، یعنی جوابی متناظر با حالت کلاسیک در فواصلی بسیار کوتاه حاصل شده است؛ البته با این تفاوت که این بار حضور یک جرم پسماند کاملاً مشهود است و قطعاً این نتیجه منجر به ناتکین شدن جواب خواهد شد که با وجود صفر شدن بار مغناطیسی، می‌توان دلیل آن را تنها به غیر صفر بودن (اگرچه بسیار کوچک) پارامتر ناجابه‌جایی نسبت داد. چنین نتیجه‌ای اذعان دارد که اثرات ناجابه‌جایی هرچند بسیار اندک به تنهایی کفایت می‌کند تا از تکین شدن جواب کلاسیک در فواصل بسیار کوتاه جلوگیری نماید.

خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به‌طور خلاصه به جستجوی جواب‌های بهینه در سیاهچاله‌های ناتکین در چارچوب نظریه اینشتین–NED به‌همراه اثرات ناجابه‌جایی و بر اساس فرمولبندی مختصه حالت همدوس پرداخته شد. در این راستا، به‌کمک روش SQP، مقدار بیشینهٔ تابع هدف تحت قیود غیرخطی از نوع نامساوی تعیین گردید و یک مقدار بیشینهٔ بهینه برای تابع عدم قطعیت لاگرانژی به‌ازای مقادیری ویژه از پارامترهای آزاد مسأله حاصل شد. تفسیر فیزیکی حاصل از خروجی نهایی الگوریتم SQP، اذعان دارد که فاز نهایی تبخیر سیاهچاله به جواب کلاسیک نزدیکتر است؛ با این تفاوت که حضور اثرات ناچیز ناجابه‌جایی در آن باعث ایجاد سیاهچاله پسماند و در نتیجه ناتکین شدن جواب شده است.

مرجع‌ها

[1] W.P. Fox, *Nonlinear Optimization: Models and Applications*, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, (2021). https://www.routledge.com/Nonlinear-Optimization-Models-and-Applications/Fox/p/book/9780367444150

[2] J.E. Dennis. Jr, R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, PA, (1996). https://www.amazon.com/Numerical-Unconstrained-Optimization-Nonlinear-Mathematics/dp/0898713641

[3] W.C. Davidon, Optimally conditioned optimization algorithms without line searches, *Mathematical Programming* ***9*** (1975) 1-30. https://doi.org/10.1007/BF01681328

[4] J.E. Dennis. Jr, J.J. Moré, Quasi-Newton methods, motivation and theory, *SIAM review* ***19*** (1977) 46-89. https://doi.org/10.1137/1019005

[5] J.S. Arora, Computational design optimization: a review and future directions, *Structural Safety* *7* (1990) 131-148. https://doi.org/10.1016/0167-4730(90)90063-U

[6] J.S. Arora, A.I. Chahande, J.K. Paeng, Multiplier methods for engineering optimization, *International journal for numerical methods in engineering* ***32*** (1991) 1485-1525. https://doi.org/10.1002/nme.1620320706

[7] J.S. Arora, *Introduction to optimum design* (*4th Edition*), Academic Press, Elsevier, (2016). https://www.elsevier.com/books/introduction-to-optimum-design/arora/978-0-12-800806-5

Singularities, Milano, Italy, (2007). https://arxiv.org/pdf/0802.0330

[15] P. Nicolini, Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review, *International Journal of Modern Physics A* ***24*** (2009) 1229-1308. https://doi.org/10.1142/S0217751X09043353

[16] E. Ayon-Beato, A. Garcia, Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics, *Physical review letters* ***80*** (1998) 5056-5059. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5056

[17] J.M. Bardeen, *Non-singular general-relativistic gravitational collapse*, Proceedings of the International Conference GR5, Tbilisi, Georgia, (1968). http://scholar.google.com/scholar_lookup?&title=Proceedings%20of%20International%20Conference%20GR5&publication_year=1968&author=Bardeen%2CJ.%20M.

[18] S.A. Hayward, Formation and evaporation of nonsingular black holes, *Physical review letters* ***96*** (2006) 031103. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.031103

[19] Z.Y. Fan, X. Wang, Construction of regular black holes in general relativity, *Physical Review D* ***94*** (2016) 124027. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124027

[20] K.A. Bronnikov, Nonlinear electrodynamics, regular black holes and wormholes, *International Journal of Modern Physics D* ***27*** (2018) 1841005. https://doi.org/10.1142/S0218271818410055

[21] S.N. Sajadi, N. Riaz, Correction to: Nonlinear electrodynamics and regular black holes, *General Relativity and Gravitation* ***52*** (2020) 18. https://doi.org/10.1007/s10714-020-02668-0

[8] A. Ajagekar, T. Humble, F. You, Quantum computing based hybrid solution strategies for large-scale discrete-continuous optimization problems, *Computers & Chemical Engineering* ***132*** (2020) 106630. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2019.106630

[9] M.J. Mahmoodabadi, F. Sadeghi Googhari, Numerical solution of time-dependent Schrodinger equation by combination of the finite difference method and particle swarm optimization, *Journal of Research on Many-body Systems* ***11*** (2021) 114-127. https://dx.doi.org/10.22055/jrmbs.2021.16786

[10] H. Li, L. Gao, H. Li, X. Li, H. Tong, Full-scale topology optimization for fiber-reinforced structures with continuous fiber paths, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* ***377*** (2021) 113668. https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113668

[11] F. Karimi-Pour, V. Puig, C. Ocampo-Martinez, Economic model predictive control of nonlinear systems using a linear parameter varying approach, *International Journal Robust Nonlinear Control* (2021) 1-21. https://doi.org/10.1002/rnc.5477

[12] A. Pourrajabian, M. Dehghan, S. Rahgozar, Genetic algorithms for the design and optimization of horizontal axis wind turbine (HAWT) blades: A continuous approach or a binary one?, *Sustainable Energy Technologies and Assessments* ***44*** (2021) 101022. https://doi.org/10.1016/j.seta.2021.101022

[13] S.W. Hawking, G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, (1973). https://doi.org/10.1017/CBO9780511524646

[14] S. Ansoldi, Spherical black holes with regular center: a review of existing models including a recent realization with Gaussian sources, *Proceedings of BH_2, Dynamics and Thermodynamics of Blackholes and Naked*

[22] S.H. Mehdipour, Teleparallel gravity coupled to matter content from nonlinear electrodynamics with dyonic configuration, *The European Physical Journal Plus* ***136*** (2021) 351. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01345-8

[23] H. Hinrichsen, A. Kempf, Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta, *Journal of Mathematical Physics* ***37*** (1996) 2121-2137. https://doi.org/10.1063/1.531501

[24] A. Tawfik, A. Diab, Generalized uncertainty principle: Approaches and applications, *International Journal of Modern Physics D* ***23*** (2014) 1430025. https://doi.org/10.1142/S0218271814300250

[25] Y.S. Myung, Y.W. Kim, Y.J. Park, Black hole thermodynamics with generalized uncertainty principle, *Physics Letters B* ***645*** (2007) 393-397. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.12.062

[26] R.J. Adler, P. Chen, D.I. Santiago, The generalized uncertainty principle and black hole remnants, *General Relativity and Gravitation* ***33*** (2001) 2101-2108. https://doi.org/10.1023/A:1015281430411

[27] H.C. Ohanian, R. Ruffini, *Gravitation and spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge, (2013). https://doi.org/10.1017/CBO9781139003391

[28] M. Maggiore, A generalized uncertainty principle in quantum gravity, *Physics Letters B* ***304*** (1993) 65-69. https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91401-8

[29] M. Sprenger, P. Nicolini, M. Bleicher, Physics on the smallest scales: an introduction to minimal length phenomenology, *European Journal of Physics* ***33*** (2012) 853. https://doi.org/10.1088/0143-0807/33/4/853

[30] A. Smailagic, E. Spallucci, Feynman path integral on the non-commutative plane, *Journal of Physics A: Mathematical and General* ***36*** (2003) L467. https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/33/101

[31] S.H. Mehdipour, M.H. Ahmadi, A comparison of remnants in noncommutative Bardeen black holes, *Astrophysics and Space Science* ***361*** (2016) 314. https://doi.org/10.1007/s10509-016-2904-z

[32] S.H. Mehdipour, M.H. Ahmadi, Black hole remnants in Hayward solutions and noncommutative effects, *Nuclear Physics B* **926** (2018) 49-69. https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.09.021

[33] S.H. Mehdipour, Emergent GUP from Modified Hawking Radiation in Einstein-NED Theory, *Canadian Journal of Physics* ***98*** (2020) 801-809. https://doi.org/10.1139/cjp-2019-0416

[34] S. Nayak, *Fundamentals of Optimization Techniques with Algorithms*, Academic Press, Elsevier Inc., (2020). https://www.elsevier.com/books/fundamentals-of-optimization-techniques-with-algorithms/nayak/978-0-12-821126-7

[35] M.J. Kochenderfer, T.A. Wheeler, *Algorithms for optimization*, The MIT Press, Cambridge, MA, (2019). https://mitpress.mit.edu/books/algorithms-optimization

[36] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, New York, NY, (1999). https://doi.org/10.1007/b9887

[37] S.H. Mehdipour, Entropic force approach to noncommutative Schwarzschild black holes signals a failure of current physical ideas, *The European Physical Journal Plus* ***127*** (2012) 80. https://doi.org/10.1140/epjp/i2012-12080-4

[38] O.L. Mangasarian, S. Fromovitz, The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality

constraints, *Journal of Mathematical Analysis and applications* ***17*** (1967) 37-47. https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90163-1

[39] M.A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* ***80*** (1981) 545-550. https://doi.org/10.1016/0022-247X(81)90123-2

[40] M. Fukushima, A successive quadratic programming algorithm with global and superlinear convergence properties, *Mathematical Programming* ***35*** (1986) 253-264. https://doi.org/10.1007/BF01580879

[41] H. Pirnay, R. López-Negrete, L.T. Biegler, Optimal sensitivity based on IPOPT, *Mathematical Programming Computation* ***4*** (2012) 307-331. https://doi.org/10.1007/s12532-012-0043-2

[42] A. Ghane-Kanafi, E. Khorram, A new scalarization method for finding the efficient frontier in non-convex multi-objective problems, *Applied Mathematical Modelling* ***39*** (2015) 7483-7498. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.03.022

[43] A. Ghane-Kanafi, S. Kordrostami, A New Approach for Solving Nonlinear Equations by Using of Integer Nonlinear Programming, *Applied Mathematics* ***7*** (2016) 473-481. http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.7604