

# The effect of nonlinear terms on the gluon distribution function and its Mellin moments in small- $x$ region

Behnaz Torkamanzahi, Hoda Nematollahi\*

Faculty of Physics, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

Received: 12.10.2021 Revised: 23.11.2021 Accepted: 08.02.2022

Doi link: [10.22055/jrmb.2022.17416](https://doi.org/10.22055/jrmb.2022.17416)

## Abstract

We investigate  $Q^2$  evolution of gluon distribution function in small- $x$  region. In general, the evolution of parton distribution functions of hadrons is given by linear DGLAP evolution equations. In small- $x$  region the gluon density increases. So in order to consider the effect of gluon recombination in this region, some corrections as nonlinear terms are added to DGLAP equations. This modified equation is known as GLR-MQ evolution equation. In this work, the GLR-MQ equation for gluon distribution of proton is solved and the obtained results compared with those of DGLAP evolution equation. We also calculate the first and second order Mellin moments of this distribution. The obtained results show important effect of nonlinear corrections on the evolution of gluon distribution function.

**Keywords:** Quantum Chromodynamics, Gluon Distribution Function, Small- $X$  Region, Gluon Recombination, Evolution Equations, Nonlinear Effects

---

\* Corresponding Author: [hnematollahi@uk.ac.ir](mailto:hnematollahi@uk.ac.ir)

## اثر جملات غیرخطی بر تابع توزیع گلوئون و ممان‌های ملین آن در ناحیه $x$ های کوچک

بهناز ترکمان زهی، هدا نعمت الهی\*

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۲۰ ویرایش نهائی: ۱۴۰۰/۰۹/۰۲ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۹

Doi link: [10.22055/jrmb.2022.17416](https://doi.org/10.22055/jrmb.2022.17416)

### چکیده

نحوه تحول تابع توزیع گلوئون را نسبت به  $Q^2$  در ناحیه  $x$  های کوچک بررسی می‌کنیم. به‌طور کلی تحول توابع توزیع پارتون‌های درون هادرون نسبت به مقیاس انرژی به‌وسیله معادلات تحول خطی DGLAP داده می‌شود. در ناحیه  $x$  های کوچک چگالی گلوئون‌ها افزایش می‌یابد. بنابراین به‌منظور در نظر گرفتن اثر بازترکیب گلوئون‌ها در این ناحیه، تصحیحاتی به‌صورت جملات غیر خطی به معادلات DGLAP افزوده می‌شود که این معادله تصحیح شده به‌عنوان معادله GLR-MQ شناخته می‌شود. در این کار معادله GLR-MQ برای تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون حل می‌شود و نتایج حاصل با نتایج معادله DGLAP مقایسه می‌گردد. همچنین ممان‌های ملین مرتبه اول و دوم این تابع توزیع را محاسبه می‌کنیم، نتایج حاصل نشان دهنده اثر مهم تصحیحات غیر خطی در تحول تابع توزیع گلوئون هستند.

**کلیدواژگان:** کرومودینامیک کوانتومی، تابع توزیع گلوئون، ناحیه  $x$  های کوچک، بازترکیب گلوئون‌ها، معادلات تحول، اثرات غیرخطی

### مقدمه

افزایش تکانه عرضی متوسط پارتون‌ها، ۳: افزایش چشمگیر چگالی پارتون‌ها به‌ویژه گلوئون‌ها.

توابع توزیع پارتونی نقش بسیار مهمی در فهم فرآیندهای مدل استاندارد و همچنین پیش‌بینی این فرآیندها در شتاب‌دهنده‌ها دارند. شناخت دقیق تابع توزیع گلوئون در ناحیه  $x$  های کوچک به‌منظور پیش‌بینی دقیق فرآیندهای انرژی بالا در LHC<sup>۲</sup> بسیار مهم و اساسی است. تعیین چگالی گلوئون‌ها در این ناحیه اهمیت بسیاری دارد زیرا انتظار می‌رود که گلوئون‌ها پارتون‌های غالب در این ناحیه باشند.

مطالعه توابع توزیع پارتون‌ها (کوآرک و گلوئون) در ناحیه  $x$  های کوچک ( $x < 10^{-2}$ ) یکی از جذاب‌ترین چالش‌های کرومودینامیک کوانتومی<sup>۱</sup> است. QCD اختلالی پیش‌بینی می‌کند که چندین پدیده جدید در ناحیه  $x$  های کوچک رخ می‌دهد. مهم‌ترین پدیده‌هایی که در این ناحیه رخ می‌دهند و تصویر فیزیکی نحوه تحول تابع توزیع پارتونی را تعیین می‌کنند، عبارتند از: ۱: افزایش سطح مقطع هادرونی در انرژی‌های زیاد، ۲:

\* نویسنده مسئول: hneematollahi@uk.ac.ir

<sup>۱</sup>Quantum Chromo Dynamics (QCD)

<sup>۲</sup> Large Hadron Collider



تصحیح می‌شوند و این تصحیحات به صورت جملاتی غیرخطی به معادلات DGLAP وارد می‌شوند.

### معادله تحول GLR-MQ

اولین محاسباتی که در چهارچوب QCD اختلالی اثرات بازترکیب گلوئون را در نظر گرفت توسط گریبو، لوین و ریسکین و سپس توسط مولر و کیو انجام شد [۳،۴]. آنها پیشنهاد کردند که تصحیحات غیرخطی یا سایه‌ای ناشی از بازترکیب گلوئون می‌تواند در یک معادله تحول جدید به صورت جملاتی که در آن مجذور چگالی گلوئونی وجود دارد، وارد شود. این معادله که تحت عنوان معادله GLR-MQ<sup>۲</sup> شناخته می‌شود [۳،۴]، می‌تواند به عنوان نسخه جدید معادلات DGLAP با تصحیحاتی برای بازترکیب گلوئون در نظر گرفته شود.

معادله GLR-MQ بر اساس دو فرآیند در دریای پارتونی بنا شده است: ۱: شکافت گلوئون‌ها که منشأ آن رأس QCD  $g \rightarrow gg$  است. ۲: بازترکیب گلوئون‌ها که به دنبال فرآیند فوق در رأسی مشابه،  $g \rightarrow gg$ ، اتفاق می‌افتد.

احتمال فرآیند شکافت متناسب با  $\alpha_s \rho$  است در حالی که احتمال فرآیند بازترکیب با  $\alpha_s r^2 \rho^2$  متناسب است

که در آن  $\rho = \frac{xg(x, Q^2)}{\pi R^2}$ .

گلوئون،  $R$  شعاع همپوشانی بین دو گلوئون برهم‌کنشی [۵] و  $r$  اندازه گلوئونی است که در فرآیند بازترکیب وارد می‌شود و در پراکندگی ناکشسان ژرف<sup>۳</sup>

،  $r \sim \frac{1}{Q}$  در  $x \rightarrow 1$  تنها تابش گلوئون مؤثر است

زیرا در این ناحیه  $\rho \ll 1$  است. در  $x \rightarrow 0$  چگالی گلوئون‌ها،  $\rho$ ، بسیار زیاد است و بنابراین در این ناحیه

افزایش تعداد گلوئون‌های درون پروتون در ناحیه  $x$  های کوچک منجر به چگالی بالای آنها در این ناحیه می‌شود. بنابراین ساختار پروتون در این ناحیه متفاوت از ساختار آن در ناحیه  $x$  های میانی است که در آن چگالی گلوئون‌ها بسیار کمتر است. در نتیجه در مقادیر بسیار کوچک  $x$  نمی‌توان از احتمال برهم‌کنش بین دو گلوئون چشم‌پوشی کرد و به این ترتیب وضعیتی ایجاد می‌شود که در آن گلوئون‌ها همپوشانی می‌کنند و یا اصطلاحاً برهم سایه می‌اندازند. لازم به یادآوری است که در انرژی‌های زیاد می‌توان وارد ناحیه  $x$  های کوچک و کوچک‌تر شد و در این وضعیت بازترکیب گلوئون‌ها به اندازه شکافت آنها مؤثر است. در واقع با افزایش چگالی گلوئون‌ها در ناحیه  $x$  های کوچک احتمال بازترکیب گلوئون، یعنی فرآیند  $g \rightarrow gg$ ، به اندازه احتمال شکافت گلوئون به دو گلوئون دیگر، یعنی فرآیند  $g \rightarrow gg$ ، در این ناحیه قابل توجه است.

در استخراج معادلات خطی DGLAP<sup>۱</sup> [۱،۲]، همپوشانی گلوئون‌های اولیه در فرآیند فیزیکی برهم‌کنش و نیز بازترکیب گلوئون‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. توجه به این نکته ضروری است که در معادلات خطی DGLAP تنها فرآیندهای شکافت در تحول توابع توزیع پارتونی در نظر گرفته می‌شود یعنی فرآیندهای  $q \rightarrow qg$ ،  $q \rightarrow q\bar{q}$  و  $g \rightarrow gg$ . بنابراین در ناحیه  $x$  های کوچک با توجه به همپوشانی گلوئون‌ها لازم است که تصحیحاتی برای معادلات DGLAP در نظر گرفته شود. برهم‌کنش چندگانه گلوئون‌ها در این ناحیه منجر به وارد کردن تصحیحاتی غیرخطی یا سایه‌ای به معادلات خطی DGLAP می‌شود. به این ترتیب این معادلات به منظور وارد کردن سهم بازترکیب گلوئون‌ها در ناحیه  $x$  های کوچک،

<sup>۳</sup> Deep Inelastic Scattering (DIS)

<sup>۱</sup> Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi

<sup>۲</sup> Gribov-Levin-Ryskin-Mueller-Qiu

جمله اول سمت راست رابطه ۱ جمله معمول DGLAP را نمایش می‌دهد و بنابراین نسبت به چگالی گلوئونی خطی است. جمله دوم، نمایش دهنده تصحیحات سایه‌ای ناشی از بازترکیب دو گلوئون و تبدیل شدن آن به یک گلوئون است. این جمله نسبت به توزیع گلوئون غیرخطی است.

به منظور بررسی اثر تصحیحات غیرخطی یا سایه‌ای بر رفتار چگالی گلوئونی، معادله GLR-MQ را می‌توان به شکل:

$$\left. \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} \right|_{DGLAP} - \frac{\alpha_s(Q^2)}{16 R^2 Q^2} \int_x^1 \frac{d\omega}{\omega} \left[ G\left(\frac{x}{\omega}, Q^2\right) \right]^2, \quad 2$$

بازنویسی کرد [۱۰-۷].

در ناحیه  $x$ های کوچک، گلوئون‌ها اساساً بیشترین فراوانی را نسبت به بقیه پارتون‌ها دارند. بنابراین در این ناحیه می‌توان از سهم کوارک‌ها در تابع توزیع گلوئون چشم‌پوشی کرد. به این معنی که از دو فرآیندی که در تحول تابع توزیع گلوئون در معادلات DGLAP نقش دارند، یعنی  $q \rightarrow qg$  و  $g \rightarrow gg$ ، می‌توان تنها فرآیند  $g \rightarrow gg$  را در نظر گرفت. به این ترتیب جمله اول سمت راست رابطه ۲ با تعریف متغیر  $t$  به صورت

$$t = \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right), \quad \text{به شکل,}$$

لازم است که بازترکیب گلوئون‌ها نیز در نظر گرفته شود.

در معادلات تحول خطی توابع ساختار DIS مانند معادلات DGLAP، تنها فرآیندهای شکافت کوارک‌ها و گلوئون‌ها در نظر گرفته می‌شود. این موضوع باعث می‌شود که در این تصویر، افزایش ثابتی در چگالی پارتون‌ها پیش‌بینی شود و این در حالی است که در ناحیه  $x$ های کوچک، چگالی پارتون‌ها به سمت یک مقدار مشخص میل می‌کند و روند افزایشی ثابتی را در پیش نمی‌گیرد. بنابراین انتظار می‌رود که روند افزایشی چگالی پارتون‌ها در ناحیه  $x$ های کوچک توسط فرآیندهای بازترکیب معکوس مهار شود. در معادله GLR-MQ این فرآیندهای بازترکیب نیز در نظر گرفته می‌شوند.

### حل معادله GLR-MQ برای تابع توزیع گلوئون

با در نظر گرفتن تصویری که در آن تعداد گلوئون‌ها ناشی از شکافت آنها افزایش می‌یابد و سپس تعداد گلوئون‌ها ناشی از بازترکیب آنها کاهش می‌یابد، می‌توان معادله تحول گلوئون را به صورت،

$$\frac{\partial^2 G(x, Q^2)}{\partial \ln\left(\frac{1}{x}\right) \partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2) N_c}{\pi} G(x, Q^2) - \frac{\alpha_s(Q^2) \gamma}{\pi Q^2 R^2} [G(x, Q^2)]^2, \quad 1$$

نوشت [۶] که به عنوان معادله GLR-MQ شناخته می‌شود. در این معادله  $G(x, Q^2) = xg(x, Q^2)$

فاکتور  $\gamma$  به ازای  $N_c = 3$  عبارت است از  $\gamma = \frac{81}{16}$

که توسط مولر و کیو محاسبه شده است [۴].

می توان توابع وابسته به  $x$   $P(x)$  و  $\alpha_s(t) = \frac{\pi}{\beta t}$  را به صورت  $M(x)$  به صورت،

$$P(x) = \frac{\pi}{\beta} \left[ \frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} + \ln(1-x) \right] + \left( \frac{2}{2+\lambda_G} + \frac{1}{\lambda_G} - 1 \right) - \left( \frac{2x^{2+\lambda_G}}{2+\lambda_G} + \frac{x^{\lambda_G}}{\lambda_G} - x \right), \quad 6$$

$$M(x) = \frac{\Lambda^{\lambda_G} \pi^{\lambda_G}}{2R^{\lambda_G} \Lambda^{\lambda_G} \beta^{\lambda_G}} \left( \frac{1-x^{2+\lambda_G}}{\lambda_G} \right), \quad 7$$

تعریف کرد و به این ترتیب رابطه ۵ را به شکل بسته،

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = P(x) \frac{G(x,t)}{t} - M(x) \frac{G'(x,t)}{t^{\lambda_G}}, \quad 8$$

بازنویسی کرد. جواب معادله دیفرانسیل جزئی فوق عبارت است از:

$$G(x,t) = \frac{t^{P(x)}}{C - M(x) \Gamma[-1+P(x),t]}, \quad 9$$

که در آن  $\Gamma$  تابع گامای ناقص و  $C$  یک ثابت است که با استفاده از شرایط اولیه تعیین می شود [۸]. با در نظر گرفتن رابطه ۹ برای شرط اولیه  $t=t, t=t$ ، ثابت  $C$  به صورت،

$$C = \frac{t^{P(x)} + M(x) \Gamma[-1+P(x),t] G(x,t)}{G(x,t)}, \quad 10$$

محاسبه می شود و به این ترتیب با جانشین کردن رابطه ۱۰ در رابطه ۹ تحول تابع توزیع گلوئون نسبت به

$$\left. \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} \right|_{DGLAP} = \alpha_s(t) \times \left[ \left( \frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} + \ln(1-x) \right) G(x,t) + \int_x^1 d\omega \left[ \frac{\omega G\left(\frac{x}{\omega}, t\right) - G(x,t)}{1-\omega} + \left( \omega(1-\omega) + \frac{1-\omega}{\omega} \right) G\left(\frac{x}{\omega}, t\right) \right] \right], \quad 3$$

نوشته می شود [۸]. به منظور ارائه یک حل تحلیلی برای معادله GLR-MQ در ناحیه  $x$  های کوچک می توان از رفتار رجی گونه<sup>۱</sup> تابع توزیع گلوئونی استفاده کرد [۸،۱۱،۱۲]. با در نظر گرفتن یک شکل ساده از رفتار رجی گونه برای تابع توزیع گلوئون می توان این تابع توزیع را در ناحیه  $x$  های کوچک به صورت،

$$G(x,t) = H(t) x^{-\lambda_G}, \quad 4$$

نوشت [۸،۹] که در آن  $H$  تابعی از متغیر  $t$  و  $\lambda_G$  متغیر رجی برای تابع توزیع گلوئون است. به این ترتیب رابطه ۲ عبارت می شود از:

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = \left[ \left( \frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} + \ln(1-x) \right) + \int_x^1 d\omega \left[ \frac{\omega^{\lambda_G+1} - 1}{1-\omega} + \left( \omega(1-\omega) + \frac{1-\omega}{\omega} \right) \omega^{\lambda_G} \right] \right] \times (\alpha_s(t) G(x,t)) - \frac{\Lambda^{\lambda_G} \pi^{\lambda_G}}{16 R^{\lambda_G} \Lambda^{\lambda_G} e^{\lambda_G}} G'(x,t) \int_x^1 d\omega \omega^{\lambda_G-1}. \quad 5$$

با انجام انتگرال گیری و در نظر گرفتن ضریب جفت شدگی قوی در تقریب LO به شکل

<sup>1</sup> Regge-like Behavior

توابع توزیع DGLAP است و این نتیجه همان نتیجه مورد انتظار ناشی از در نظر گرفتن جمله تصحیحی غیرخطی در معادله تحول GLR-MQ است. اما در  $x = 10^{-2}$  نتیجه حاصل با نتایج سه مقدار دیگر  $x$  متفاوت است و دلیل آن، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این است که معادله تحول GLR-MQ در ناحیه  $x < 10^{-2}$  صادق است. همچنین با دقت در شکل‌های ۱ تا ۴ مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار  $x$  اختلاف بین نحوه تحول توابع توزیع گلوئون بر مبنای معادلات خطی و غیرخطی کمتر می‌شود. در نهایت در این مرحله از محاسبات، به منظور مقایسه نتایج حاصل از معادله GLR-MQ برای توزیع‌های گلوئونی گروه‌های مختلف، از تابع توزیع گلوئونی گروه‌های MSTW [۱۴] و MRST [۱۵] نیز به عنوان توزیع اولیه در مقیاس  $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$  استفاده کرده‌ایم و با استفاده از رابطه ۹ تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون را در  $x = 10^{-5}$ ، محاسبه و نتایج حاصل را در شکل ۵ نمایش داده‌ایم. با توجه به این شکل، اثر باز ترکیب گلوئون‌ها به خوبی در نتایج هر سه گروه قابل مشاهده است.

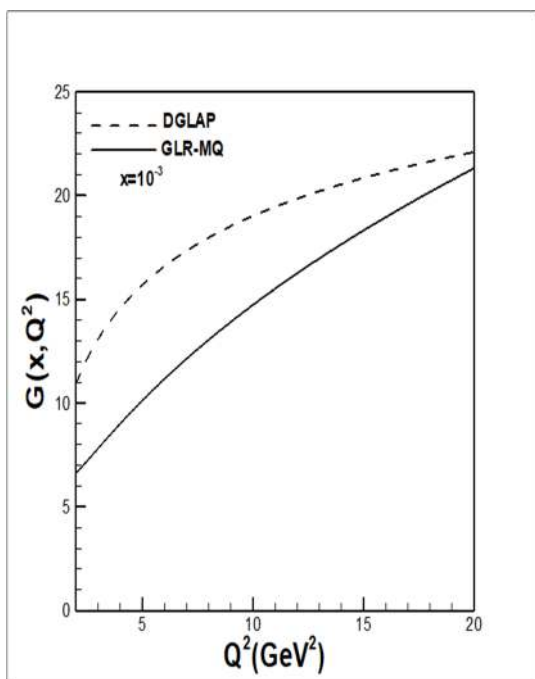
در مرحله دوم محاسبات، تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون بر مبنای جواب معادله GLR-MQ و با در نظر گرفتن تابع توزیع اولیه گروه GRV در  $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ ، به صورت تابعی از  $x$  در سه مقدار ثابت  $Q^2$ ،  $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ ،  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$  و  $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ ، محاسبه شده‌اند. این توابع توزیع در شکل ۶ رسم شده‌اند. همچنین تابع توزیع گلوئون بر مبنای جواب معادله DGLAP نیز به صورت تابعی از  $x$  در سه مقدار ذکر شده  $Q^2$  محاسبه و نتایج حاصل در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند. در این دو شکل نحوه تحول تابع

$Q^2$  برای مقادیر ثابت  $x$  در تقریب LO به دست می‌آید.

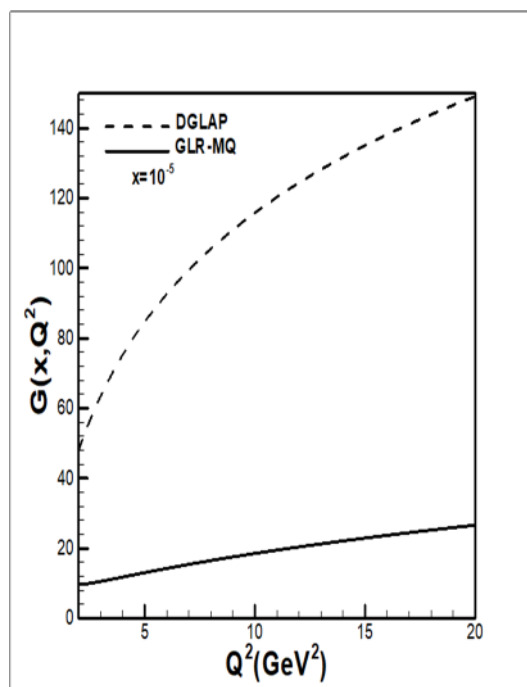
## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله غیرخطی GLR-MQ برای تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون حل شده است. برای این منظور از تابع توزیع گلوئون گروه GRV [۱۳] به عنوان تابع توزیع اولیه در مقیاس  $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$  استفاده شده است  $(G(x, t))$ . در مرجع [۱۳] تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون به صورت تابعی از  $x$  و  $Q^2$  داده شده است که نحوه وابستگی این تابع توزیع به  $Q^2$  با استفاده از معادلات DGLAP به دست آمده است. با در نظر گرفتن این تابع توزیع اولیه و با استفاده از رابطه ۹، تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون به صورت تابعی از  $Q^2$  در چهار مقدار ثابت  $x$ ،  $x = 10^{-5}$ ،  $x = 10^{-4}$ ،  $x = 10^{-3}$  و  $x = 10^{-2}$ ، محاسبه شده است. لازم به ذکر است که در انجام محاسبات مقادیر کمیت‌های مورد نیاز  $N_f = 3$ ،  $\Lambda = 0.248 \text{ GeV}$  و  $R = 0.5 \text{ GeV}^{-1}$  در نظر گرفته شده است. نتایج توابع توزیع محاسبه شده در شکل‌های ۱ تا ۴ نمایش داده شده است. در این شکل‌ها همچنین تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون که بر مبنای مرجع [۱۳] در چهار مقدار  $x$  به صورت تابعی از  $Q^2$  به دست آمده‌اند، رسم شده است و نتایج معادله غیرخطی GLR-MQ با نتایج معادله خطی DGLAP مقایسه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در  $x = 10^{-5}$ ،  $x = 10^{-4}$  و  $x = 10^{-3}$  تابع توزیع گلوئون به دست آمده از معادله GLR-MQ نسبت به تابع توزیع حاصل از معادله DGLAP مقادیر کمتری به خود می‌گیرد و در ضمن روند افزایشی توابع توزیع GLR-MQ نسبت به  $Q^2$ ، در مقدار ثابت  $x$ ، کندتر از

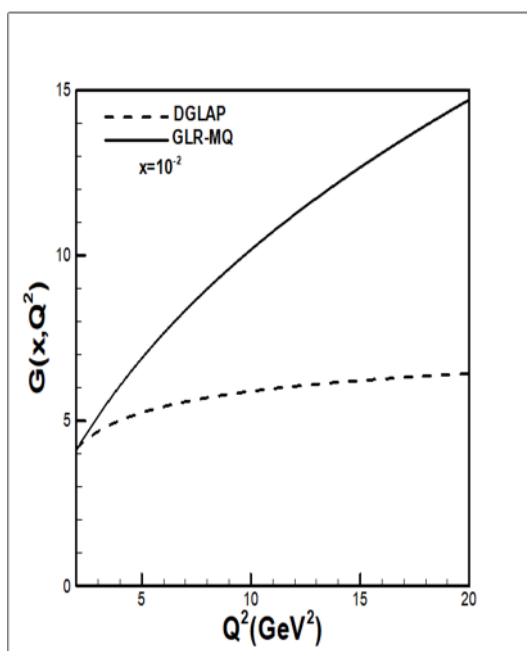
توزیع اولیه با افزایش مقدار  $Q^2$  بر مبنای معادلات غیرخطی و خطی قابل مشاهده است.



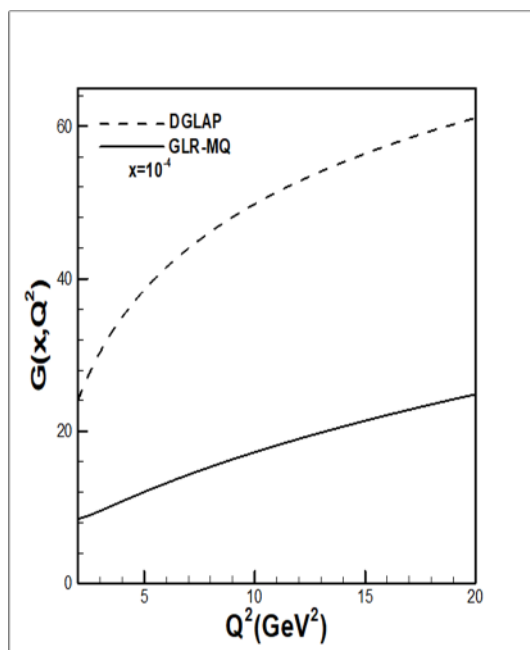
شکل ۳. نحوه تحول تابع توزیع گلوئون در  $x = 10^{-3}$  بر مبنای معادلات DGLAP و GLR-MQ



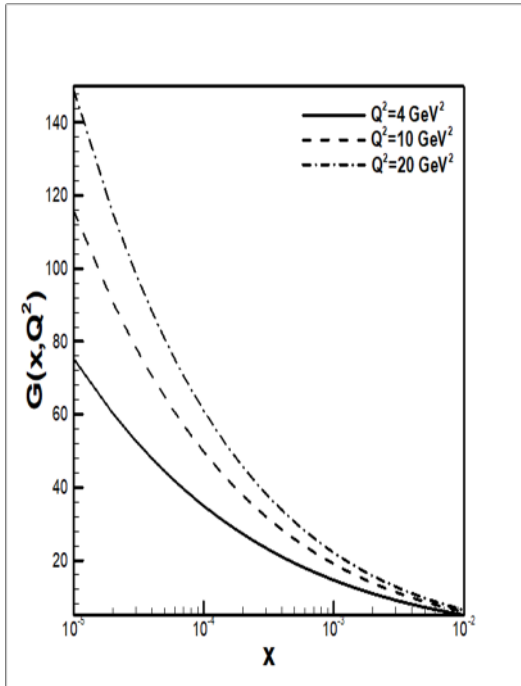
شکل ۱. نحوه تحول تابع توزیع گلوئون در  $x = 10^{-5}$  بر مبنای معادلات DGLAP و GLR-MQ



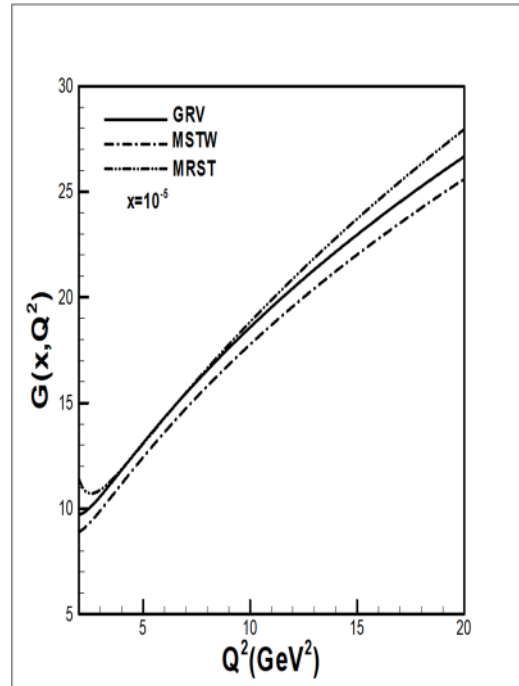
شکل ۴. نحوه تحول تابع توزیع گلوئون در  $x = 10^{-2}$  بر مبنای معادلات DGLAP و GLR-MQ



شکل ۲. نحوه تحول تابع توزیع گلوئون در  $x = 10^{-4}$  بر مبنای معادلات DGLAP و GLR-MQ



شکل ۷. تابع توزیع گلوئون در سه مقدار ثابت  $Q^2$  بر مبنای معادله DGLAP

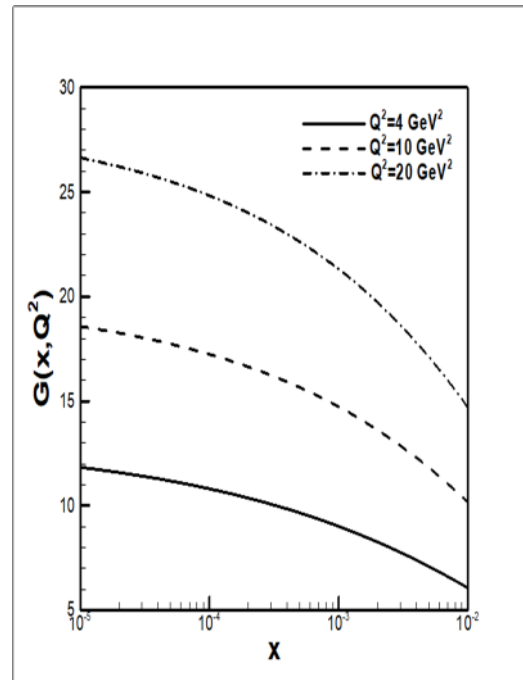


شکل ۵. نحوه تحول تابع توزیع گلوئون در  $x = 10^{-5}$  بر مبنای معادله GLR-MQ برای توابع توزیع گروه‌های مختلف.

ممان ملین<sup>۱</sup> مرتبه  $n$  تابع توزیع گلوئون به صورت،

$$M^G(n, Q^2) = \int^1 dx x^{n-2} G(x, Q^2), \quad (11)$$

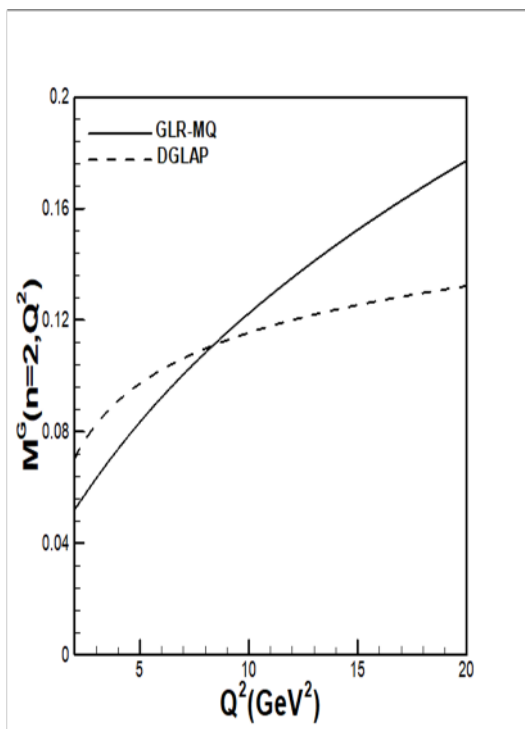
در مقیاس انرژی  $Q^2$  تعریف می‌شود. در مرحله آخر محاسبات این مقاله، به محاسبه ممان‌های ملین تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون،  $M^G(n, Q^2)$ ، با استفاده از رابطه ۱۱ پرداخته‌ایم. این ممان‌ها به‌ازای  $n = 1$  و  $n = 2$  برای تابع توزیع گلوئون گروه GRV بر مبنای جواب معادله GLR-MQ و معادله DGLAP محاسبه شده‌اند. نتایج ممان مرتبه اول تابع توزیع گلوئون به صورت تابعی از  $Q^2$  در شکل ۸ نمایش داده شده است. ممان مرتبه اول تابع توزیع گلوئون، تعداد گلوئون‌های درون پروتون را در مقادیر مختلف  $Q^2$  به دست می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، تعداد گلوئون‌های GLR-MQ کمتر از گلوئون‌های DGLAP است و این به دلیل در نظر گرفتن باز ترکیب گلوئون‌ها در معادله غیرخطی GLR-



شکل ۶. تابع توزیع گلوئون در سه مقدار ثابت  $Q^2$  بر مبنای معادله GLR-MQ.

<sup>1</sup> Mellin moment



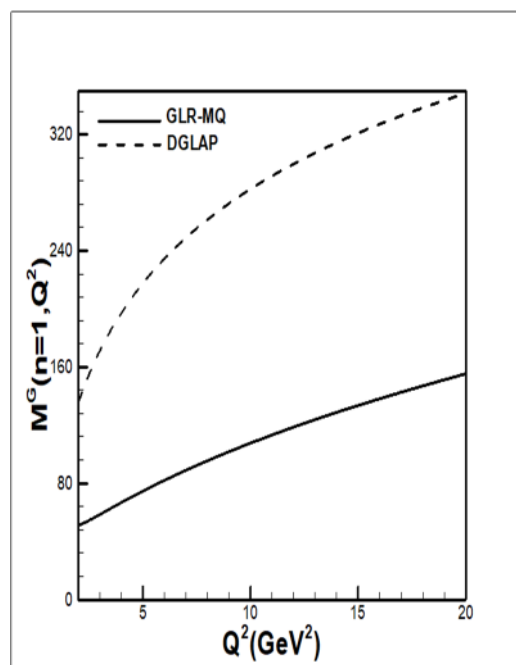


شکل ۹. ممان مرتبه دوم تابع توزیع گلوئونی پروتون بر مبنای معادلات DGLAP و GLR-MQ

MQ است. همچنین با توجه به شکل ۸، همان طور که انتظار می‌رود، روند افزایشی تعداد گلوئون‌های GLR-MQ، با افزایش  $Q^2$ ، کندتر از روند افزایشی گلوئون‌های DGLAP است. در نهایت ممان مرتبه دوم تابع توزیع گلوئون‌های درون پروتون که نشان دهنده تکانه حمل شده به وسیله این گلوئون‌هاست، بر مبنای دو معادله GLR-MQ و DGLAP، به صورت تابعی از  $Q^2$  محاسبه و نتایج حاصل در شکل ۹ نمایش داده شده است. نتیجه حاصل بسیار جالب و اساسی است. همان طور که در شکل ۹ ملاحظه می‌شود ممان مرتبه دوم تابع توزیع گلوئون‌های GLR-MQ با افزایش  $Q^2$  مقادیر بزرگتری نسبت به گلوئون‌های DGLAP به خود می‌گیرند و این بدان معنی است که با اینکه تعداد گلوئون‌های GLR-MQ کمتر از گلوئون‌های DGLAP است اما با افزایش  $Q^2$  این گلوئون‌ها سهم بیشتری در حمل تکانه پروتون دارند.

### مرجع‌ها

- [1] V.N. Gribov, L.N. Lipatov, Deep Inelastic Electron Scattering in Perturbation Theory, *Physics Letters B* **37** (1971) 78. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(71\)90576-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(71)90576-4)
- [2] G. Altarelli, G. Parisi, Asymptotic Freedom in Parton Language, *Nuclear Physics B* **126** (1977) 298. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(77\)90384-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90384-4)
- [3] L.V. Gribov, E.M. Levin, M.G. Ryskin, Semihard Processes in QCD, *Physics Report* **100** (1983) 1. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(83\)90022-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(83)90022-4)
- [4] A.H. Mueller, J. Qiu, Gluon Recombination and Shadowing in Small Values of x, *Nuclear Physics B* **268** (1986) 427. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(86\)90164-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90164-1)
- [5] A.H. Mueller, Small-x behavior and Parton Saturation: A QCD Model, *Nuclear Physics B* **335** (1990) 115.



شکل ۸. ممان مرتبه اول تابع توزیع گلوئونی پروتون بر مبنای معادلات DGLAP و GLR-MQ

- [11] A. Donnachie, P.V. Landshoff, Small x: two Pomerons, *Physics Letters B* **437** (1998) 408. [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(98\)00899-5](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00899-5)
- [12] Z. Sheibani, A. Mirjalili, The Linear and Non-Linear Parton Evolution Equations and Employing the Corrections of Shadowing Effect on the Singlet Nucleon Structure Function, *Proceeding of the Annual Physics Conference of Iran* (1398) 522.
- [13] M. Gluck, E. Reya, A. Vogt, Dynamical Parton Distributions of the Proton and Small-x Physics, *Z. Physics C* **67** (1995) 433. <https://doi.org/10.1007/BF01624586>
- [14] A.D. Martin, W.J. Stirling, R.S. Thorn, G. Watt, Parton Distributions for the LHC, *European Physical Journal C* **63** (2009) 189. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>
- [15] A.D. Martin, R.G. Roberts, W.J. Stirling, R.S. Thorn, MRST2001: Partons and  $\alpha_S$  from Precise Deep Inelastic Scattering and Tevatron Jet Data, *European Physical Journal C* **23** (2002) 73. <https://doi.org/10.1007/s100520100842>
- [6] E. Laenen, E.M. Levin, A New Evolution Equation, *Nuclear Physics B* **451** (1995) 207. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00359-Z](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00359-Z)
- [7] K. Prytz, Signals of Gluon Recombination in Deep Inelastic Scattering, *European Physical Journal C* **22** (2001) 317. <https://doi.org/10.1007/s100520100775>
- [8] M. Deveci, J.K. Sarma, Nonlinear GLR-MQ Evolution Equation and  $Q^2$  Evolution of Gluon Distribution Function, *European Physical Journal C* **74** (2014) 2751. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2751-4>
- [9] P. Phukan, M. Lalung, J.K. Sarma, NNLO Solution of Nonlinear GLR-MQ Evolution Equation to Determine Gluon Distribution Function Using Regge Like Ansatz, *Nuclear Physics A* **968** (2017) 275. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2017.09.003>
- [10] M. Lalung, P. Phukan, J.K. Sarma, On Phenomenological Study of the Solution of Nonlinear GLR-MQ Evolution Equation Beyond Leading Order, *Nuclear Physics A* **984** (2019) 29. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2019.01.006>