

# Entanglement and Fidelity of Quantum Teleportation in Heisenberg XXZ Model with Multiple Interactions

Sevda Mirzaei\*

Department of Physics, Faculty of Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

Received: 30.12.2021 Final revision: 27.04.2022 Accepted: 20.07.2022

Doi: [10.22055/jrmbms.2022.17867](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2022.17867)

## Abstract

In this paper, we considered the two-qubit Heisenberg XXZ model with Dzyaloshinski-Moriya (DM) interaction under the Calogero-Moser model type I, where each spin is affected by the homogeneous and inhomogeneous magnetic field. Assuming that the initial state of the system is  $|\psi(0)\rangle = \sin\theta|01\rangle + \cos\theta|10\rangle$ , we examined the effects of the relative distance between spins, intrinsic decoherence, magnetic field, DM interaction and the parameters of the initial state of the system on the dynamics of quantum entanglement. The results showed that by increasing the relative distance between the spins, the entanglement decreased. In addition, by applying the inhomogeneous magnetic field in the presence of DM interaction, the effect of intrinsic decoherence on entanglement dynamics could be observed. We also used the two-qubit Heisenberg XXZ model density matrix in the presence of intrinsic decoherence as a quantum channel to teleport the quantum states from the sender to the receiver. Using the fidelity measure, we studied the effect of the different parameters on the quality of the teleported quantum state. We observed that by applying the inhomogeneous magnetic field and in the presence of the DM interaction, the average fidelity is larger than the minimum of the average fidelity

$$\text{i.e., } F_{ave} > \frac{2}{3}$$

**Keywords:** Entanglement, fidelity, quantum teleportation, Dzyaloshinski-Moriya, Heisenberg model, Calogero-Moser model

---

\* Corresponding Author: s.mirzaei@sut.ac.ir



## درهم‌تندی و وفاداری دوربری کوآنتومی در مدل هایزنبرگ XXZ با

## اندرکنش‌های چندگانه

سودا میرزائی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران  
دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۰۹ ... ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۰۲/۰۷ ..... پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۹.....

Doi: [10.22055/jrmb.2022.17867](https://doi.org/10.22055/jrmb.2022.17867)

## چکیده

در این مقاله، مدل هایزنبرگ XXZ دو کیوبیتی با اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا تحت مدل کالگرو-موزر نوع  $I$ ، که هر یک از اسپین‌ها تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی همگن و ناهمگن قرار دارند در نظر گرفتیم. با فرض اینکه حالت اولیه سیستم  $|\psi(0)\rangle = \sin\theta|01\rangle + \cos\theta|10\rangle$  باشد، اثر فاصله نسبی بین اسپین‌ها، واهمدوسی ذاتی، میدان مغناطیسی، اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا و پارامترهای مربوط به حالت اولیه سیستم را بر دینامیک درهم‌تندی کوآنتومی بررسی کردیم. نتایج نشان داد که با افزایش فاصله نسبی بین اسپین‌ها، درهم‌تندی کاهش می‌یابد. به‌علاوه با اعمال میدان مغناطیسی ناهمگن و در نظر گرفتن اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا اثر واهمدوسی ذاتی بر دینامیک درهم‌تندی قابل مشاهده است. همچنین از ماتریس چگالی دو کیوبیتی مدل هایزنبرگ XXZ در حضور اثر واهمدوسی به‌عنوان یک کانال کوآنتومی برای انتقال حالت‌های کوآنتومی از فرستنده به گیرنده استفاده کردیم. با استفاده از سنج وفاداری کوآنتومی، اثر پارامترهای مختلف را بر کیفیت حالت کوآنتومی انتقال یافته مورد مطالعه قرار دادیم. مشاهده کردیم که با اعمال میدان مغناطیسی ناهمگن و در نظر گرفتن اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا، وفاداری کوآنتومی میانگین از حداقل وفاداری کوآنتومی میانگین بیشتر است یعنی  $F_{ave} > \frac{2}{3}$ .

**کلیدواژگان:** درهم‌تندی، وفاداری کوآنتومی، دوربری کوآنتومی، ژیاوشینسکی-موریا، مدل هایزنبرگ، مدل کالگرو-موزر

## مقدمه

درهم‌تندی نامیده می‌شود هرگاه نتوان آن را به‌صورت ضرب تانسوری حالت‌های هر یک از زیرسیستم‌ها نوشت که در مقابل مفهوم جداپذیری قرار دارد [۱]. همبستگی غیرموضعی بین زیرسیستم‌ها امکان ارسال یک حالت کوآنتومی به‌واسطه یک حالت درهم‌تندی که بین فرستنده و گیرنده به اشتراک گذاشته می‌شود یا به‌عبارتی دوربری کوآنتومی را به ما می‌دهد که در سال

در سال‌های اخیر درهم‌تندی کوآنتومی به‌عنوان یک همبستگی کوآنتومی غیرموضعی، به‌دلیل کاربرد در فرآیند اطلاعات کوآنتومی، مورد توجه بسیار قرار گرفته است. درهم‌تندی کوآنتومی یکی از ویژگی‌های سیستم‌های دو یا چند جزئی می‌باشد، به‌طوری‌که در مکانیک کوآنتومی حالت یک سیستم چند جزئی

\* نویسنده مسئول: s.mirzaei@sut.ac.ir



۱۹۹۳، توسط بنت<sup>۱</sup> و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است [۲]. وفاداری کوآنتومی به‌عنوان سنجه‌ای از فاصله یا تشابه بین دو حالت کوآنتومی است که کیفیت دوربری کوآنتومی یا به‌عبارتی دقت انتقال یک حالت کوآنتومی از فرستنده به گیرنده، به‌واسطه کانال درهم‌تنیده را نشان می‌دهد. به‌طوری‌که مقدار وفاداری کوآنتومی برای دوربری کوآنتومی ایده‌آل، برابر یک است [۳]. در فرآیند دوربری کوآنتومی دستیابی به انتقال حالت‌های کوآنتومی بین دو ناظر با وفاداری کوآنتومی بالا بسیار مهم و مورد توجه می‌باشد. از جمله سیستم‌هایی که از نظر تولید و بررسی کیفی و کمی حالت‌های درهم‌تنیده مورد توجه قرار گرفته است، زنجیره‌های اسپینی می‌باشند که نه تنها در شبیه‌سازی کامپیوترهای کوآنتومی، نقاط کوآنتومی [۴] و اسپین الکترون [۵] بلکه در انتقال حالت‌های کوآنتومی (دوربری کوآنتومی) نیز دارای کاربردهای فراوانی می‌باشند [۶ و ۷]. ساده‌ترین زنجیره اسپینی زنجیره هایزنبرگ<sup>۲</sup> می‌باشد.

هر سیستم کوآنتومی به‌علت اندرکنش با محیط اطراف خود، تحت تحول زمانی دچار واهمدوسی می‌شود. مطالعه اثر واهمدوسی در فرآیند اندازه‌گیری‌های کوآنتومی و محاسبات کوآنتومی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یک رهیافت مناسب برای حل مسئله واهمدوسی روشی است که میلبرون در سال ۱۹۹۱ مطرح کرد [۸]. مدل واهمدوسی میلبرون بر این اساس است که سیستم کوآنتومی در بازه‌های زمانی به‌اندازه کافی کوچک، تحت تحولات یکانی به‌طور پیوسته تحول نمی‌یابد بلکه به‌طور تصادفی تغییر می‌کند. تأثیر واهمدوسی بر درهم‌تندی زنجیره اسپینی بررسی شده است [۹]. به‌عنوان مثال شاو<sup>۳</sup> و همکاران تأثیر

واهمدوسی را بر درهم‌تندی زنجیره هایزنبرگ XYZ دو کیوبیتی مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. همچنین تأثیر واهمدوسی بر درهم‌تندی مدل هایزنبرگ XYZ در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت [۱۱] و میدان مغناطیسی غیریکنواخت [۱۲] بررسی شده است. تأثیر واهمدوسی مدل هایزنبرگ بر درهم‌تندی و وفاداری دوربری کوآنتومی با در نظر گرفتن اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا<sup>۴</sup> مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است [۱۳].

در این مقاله مدل هایزنبرگ XXZ در حضور واهمدوسی ذاتی، میدان مغناطیسی ناهمگن و تحت اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که ثابت جفت‌شدگی بین اسپین‌ها در راستای  $x$  و  $y$  با اندرکنش کالگرو-موزر<sup>۵</sup> نوع  $I$  مشخص می‌شود [۱۴]. با استفاده از سنجه تلاقی برای حالت‌های آمیخته دو کیوبیتی که اولین بار توسط ووترز معرفی شد [۱۵ و ۱۶]، تأثیر فاصله نسبی بین اسپین‌ها، میدان مغناطیسی و اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا را بر دینامیک درهم‌تندی کوآنتومی بین اسپین‌ها در مدل هایزنبرگ دو کیوبیتی مطالعه خواهیم نمود. همچنین از ماتریس چگالی دو کیوبیتی مدل هایزنبرگ XXZ در حضور اثر واهمدوسی به‌عنوان یک کانال کوآنتومی برای انتقال حالت‌های کوآنتومی از فرستنده (آلیس) به گیرنده (باب) استفاده خواهیم نمود. اثر واهمدوسی و پارامترهای مربوط به میدان مغناطیسی و اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا بر کیفیت حالت کوآنتومی انتقال یافته، با استفاده از سنجه وفاداری کوآنتومی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. با توجه به اهمیت انتقال حالت‌های کوآنتومی بین دو ناظر با وفاداری کوآنتومی بالا، ملاحظه خواهیم نمود که با اعمال میدان مغناطیسی

<sup>4</sup> Dzyaloshinski-Moriya

<sup>5</sup> Calogero-Moser

<sup>1</sup> Bennett

<sup>2</sup> Heisenberg

<sup>3</sup>Shao

$$H = \begin{pmatrix} 2B+J_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b-J_z & 2(-iD_z+J(R)) & 0 \\ 0 & 2(iD_z+J(R)) & -2b-J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z-2B \end{pmatrix}$$

ویژه‌مقادیر هامیلتونی ۲ و ویژه‌بردارهای مربوطه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2B + J_z, E_2 = -2B + J_z \\ E_3 &= 2\eta - J_z, E_4 = -2\eta - J_z \end{aligned} \quad ۳$$

و

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |00\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= |11\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_+|^2}} (\alpha_+ |01\rangle + |10\rangle) \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_-|^2}} (\alpha_- |01\rangle + |10\rangle) \end{aligned} \quad ۴$$

که در آن  $\eta = \sqrt{b^2 + D_z^2 + J(R)^2}$  و

$$\alpha_- = \frac{b-\eta}{J(R)+iD_z} \text{ و } \alpha_+ = \frac{\eta+b}{J(R)+iD_z}$$

بر اساس مدل واهمدوسی میلیبورن [۸]، معادله مستر توصیف کننده واهمدوسی ذاتی تحت تقریب مارکوفی با فرض  $\hbar = 1$  عبارت است از

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H, \rho(t)] - \frac{\gamma}{2}[H, [H, \rho(t)]] \quad ۵$$

که  $\gamma$  پارامتر واهمدوسی ذاتی می‌باشد. توجه داریم که عبارت اول تحول زمانی یکانی همدوس و عبارت دوم اثر واهمدوسی روی سیستم را نشان می‌دهد. جواب معادله ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \rho(0) M_k^\dagger(t) \quad ۶$$

که

$$M_k(t) = \sqrt{\frac{(\gamma t)^k}{k!}} H^k e^{-iHt} e^{-\frac{\gamma t}{2} H^2} \quad ۷$$

ناهمگن و در نظر گرفتن اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا،  $F_{ave} > \frac{2}{3}$  یعنی وفاداری کوانتومی میانگین از حداقل وفاداری کوانتومی میانگین برای دوربری کوانتومی موفق و امن بیشتر است.

### توصیف مدل

هامیلتونی مدل هایزنبرگ  $XXZ$  دو کیوبیتی در حضور میدان مغناطیسی در راستای  $Z$  و تحت اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} H &= J_z \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_z (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^y - \sigma_1^y \otimes \sigma_2^x) \\ &+ (B+b) \sigma_1^z \otimes I + (B-b) I \otimes \sigma_2^z \\ &+ J(R) (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \end{aligned} \quad ۱$$

که در آن  $J_z$  ثابت جفت شدگی اسپین در امتداد  $Z$ ،  $D_z$  مؤلفه  $Z$  پارامتر اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا است.  $I$  و  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) به ترتیب ماتریس‌های پائولی و ماتریس واحد می‌باشد.  $B$  بخش همگن میدان مغناطیسی و  $b$  بخش ناهمگن میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.  $J(R)$  جفت شدگی اندرکنش اسپین-اسپین است که با اندرکنش کالگرو-موزر مشخص می‌شود. در این مقاله، اندرکنش کالگرو-موزر نوع  $I$ ،  $J(R) = \frac{1}{R^2}$  را در نظر خواهیم گرفت که در آن  $R$  فاصله نسبی بین اسپین‌هاست. فرم ماتریسی هامیلتونی فوق در پایه‌های استاندارد  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

۲

$$\begin{aligned} \rho_{33} &= \frac{1}{(1+|\alpha_+|^2)^2} (\alpha_+ \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_+^* \sin \theta + \cos \theta) \\ &+ \frac{1}{(1+|\alpha_-|^2)^2} (\alpha_- \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_-^* \sin \theta + \cos \theta) \\ &+ \frac{(\alpha_+^* \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_- \sin \theta + \cos \theta)}{(1+|\alpha_+|^2)(1+|\alpha_-|^2)} \\ &\times e^{-\frac{\gamma t}{2}(E_3-E_4)^2} e^{-i(E_3-E_4)t} + H.C., \\ \rho_{23} &= \frac{\alpha_+(\alpha_+ \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_+^* \sin \theta + \cos \theta)}{(1+|\alpha_+|^2)^2} \\ &+ \frac{\alpha_-(\alpha_- \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_-^* \sin \theta + \cos \theta)}{(1+|\alpha_-|^2)^2} \\ &+ \left( \frac{\alpha_+(\alpha_+^* \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_- \sin \theta + \cos \theta)}{(1+|\alpha_+|^2)(1+|\alpha_-|^2)} e^{-i(E_3-E_4)t} \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_-(\alpha_-^* \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_+ \sin \theta + \cos \theta)}{(1+|\alpha_+|^2)(1+|\alpha_-|^2)} e^{i(E_3-E_4)t} \right) \\ &\times e^{-\frac{\gamma t}{2}(E_3-E_4)^2}, \end{aligned}$$

همچنین  $\rho_{32} = \rho_{23}^*$  نماد \* و H.C. نشان دهنده مزدوج مختلط می‌باشد.

در بخش بعدی می‌خواهیم رفتار درهم‌تندیگی کوآنتومی را با تغییر پارامترهای مربوط به فاصله نسبی بین اسپین‌ها، میدان مغناطیسی، اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا، پارامتر واهمدوسی ذاتی و همین‌طور پارامترهای مربوط به شرایط اولیه سیستم بررسی کنیم.

### درهم‌تندیگی کوآنتومی

برای مطالعه رفتار درهم‌تندیگی حالت تحول زمانی یافته از سنجه تلاقی استفاده خواهیم نمود [۱۵ و ۱۶] که برای ماتریس چگالی آمیخته دو کیوبیتی به شکل زیر

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad 11$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

و  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k^\dagger M_k = I$  با در نظر گرفتن حالت اولیه

دلخواه  $\rho(0)$  و جای‌گذاری در رابطه ۶ ماتریس چگالی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\gamma t}{2}(E_m - E_n)^2 - i(E_m - E_n)t\right] \\ &\times \langle \psi_m | \rho(0) | \psi_n \rangle | \psi_m \rangle \langle \psi_n | \quad 8 \end{aligned}$$

به طوری که  $|\psi_m\rangle$  و  $|\psi_n\rangle$  ویژه‌حالت‌های انرژی به ترتیب با ویژه مقادیر  $E_m$  و  $E_n$  می‌باشند. فرض می‌کنیم که سیستم ابتدا در حالت  $|\psi(0)\rangle = \sin \theta |01\rangle + \cos \theta |10\rangle$  واضح است که

به‌ازای  $\theta = \frac{n\pi}{2}, (n = 0, 1, \dots)$  حالت سیستم

جداپذیر و به‌ازای  $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{4}$  سیستم دارای بیشینه

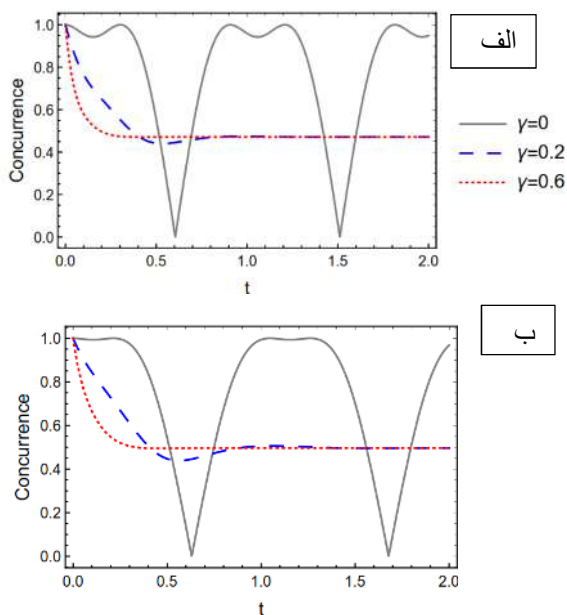
درهم‌تندیگی می‌باشد. با جای‌گذاری حالت خالص اولیه در رابطه ۸ و با اندکی محاسبات حالت آمیخته زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_{22} |01\rangle \langle 01| + \rho_{33} |10\rangle \langle 10| \\ &+ \rho_{23} |01\rangle \langle 10| + \rho_{32} |10\rangle \langle 01| \quad 9 \end{aligned}$$

به طوری که داریم:

۱۰

$$\begin{aligned} \rho_{22} &= \frac{|\alpha_+|^2}{(1+|\alpha_+|^2)^2} (\alpha_+ \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_+^* \sin \theta + \cos \theta) \\ &+ \frac{|\alpha_-|^2}{(1+|\alpha_-|^2)^2} (\alpha_- \sin \theta + \cos \theta)(\alpha_-^* \sin \theta + \cos \theta) \\ &+ \frac{\alpha_+ \alpha_-^*}{(1+|\alpha_+|^2)(1+|\alpha_-|^2)} (\alpha_+^* \sin \theta + \cos \theta) \\ &\times (\alpha_- \sin \theta + \cos \theta) e^{-\frac{\gamma t}{2}(E_3-E_4)^2} e^{-i(E_3-E_4)t} + H.C., \end{aligned}$$



شکل ۲. نمودار تلافی بر حسب زمان به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$

به‌شکل ۲ ملاحظه می‌شود که:

۱- به‌ازای  $\gamma = 0$  یعنی وقتی سیستم هیچ اندرکنشی با محیط اطراف ندارد، درهم‌تنیدگی با زمان رفتار کاملاً پریودیک از خود نشان می‌دهد.

۲- در زمان  $t = 0$  به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  سیستم دارای بیشینه

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \text{ می‌باشد،}$$

۳- به‌ازای  $\gamma, D_{\pm}, b \neq 0$  درهم‌تنیدگی با زمان کاهش یافته و در نهایت به یک مقدار ثابت  $C(t) \approx 0.5$  میل می‌کند به‌طوری‌که با افزایش پارامتر واهمدوسی شدت افت درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد.

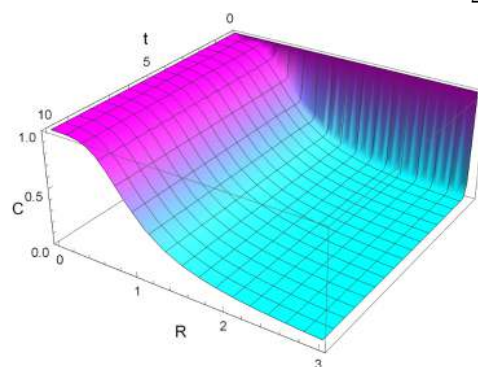
۴- با توجه به رابطه ۱۰، به‌ازای  $D_{\pm} = b = 0$  و

$J(R) \neq 0$  خواهیم داشت:  $\rho_{23} = \frac{1}{2}$ . آنگاه طبق

رابطه ۱۲، مستقل از پارامتر واهمدوسی درهم‌تنیدگی بیشینه است و  $C(t) = 1$ .

$$C = 2 \max \{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\} \quad ۱۲$$

به‌طوری‌که مقدار تلافی برای یک حالت با بیشینه درهم‌تنیدگی برابر یک و برای یک حالت جداپذیر صفر است. با جای‌گذاری از رابطه ۱۲ می‌توان تلافی را محاسبه نمود. با توجه به اینکه ضرایب  $\alpha_+$  و  $\alpha_-$  مستقل از شدت میدان مغناطیسی همگن است، نتیجه می‌گیریم که مقدار درهم‌تنیدگی نیز مستقل از شدت میدان مغناطیسی همگن خواهد بود. ابتدا تأثیر فاصله نسبی بین اسپین‌ها را بر دینامیک درهم‌تنیدگی کوانتومی بررسی می‌کنیم. در شکل ۱، نمودار تلافی بر حسب زمان و فاصله نسبی و به‌ازای  $D_{\pm} = J_{\pm} = b = 1, \gamma = 0.6$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}$  رسم شده است.

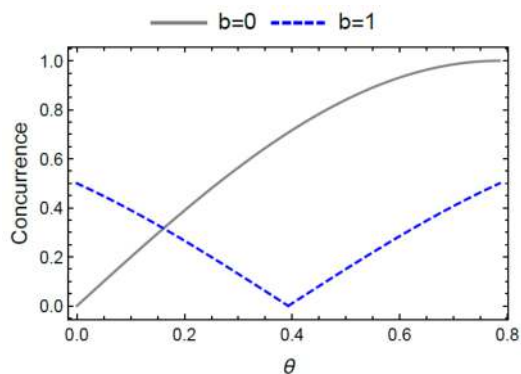


شکل ۱. نمودار تلافی بر حسب زمان و فاصله نسبی بین اسپین‌ها، به‌ازای

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \gamma = 0.6, D_{\pm} = J_{\pm} = b = 1$$

با توجه به شکل ۱ ملاحظه می‌شود که با افزایش فاصله نسبی بین اسپین‌ها، درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد. در شکل ۲ نمودار تحول زمانی تلافی به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر واهمدوسی رسم شده است.

۳- به ازای  $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{24}$ ، درهم‌تنیدگی به‌طور یکنواخت کاهش یافته به صفر می‌رسد سپس به‌ازای  $b$ های بزرگ دوباره احیا می‌شود. نکته جالب توجه اینجاست که به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{24}$  پس از احیا درهم‌تنیدگی از درهم‌تنیدگی اولیه هم بیشتر می‌شود. بنابراین مطالعه درهم‌تنیدگی در زمان معین نشان می‌دهد که تنظیم میدان مغناطیسی ناهمگن می‌تواند از درهم‌تنیدگی در مقابل اثر مخرب واهمدوسی ذاتی محافظت نماید. از طرفی مقایسه شکل‌های الف و ب نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر ژئالوشینسکی-موریا، شدت افت درهم‌تنیدگی برای سیستمی با درهم‌تنیدگی اولیه بیشینه ( $\theta = \frac{\pi}{4}$ ) بیشتر از حالت‌های با درهم‌تنیدگی اولیه غیربیشینه است. نمودار تلاقی برحسب پارامتر  $\theta$  در زمان معین  $t = 10$  در شکل ۴ رسم شده است.



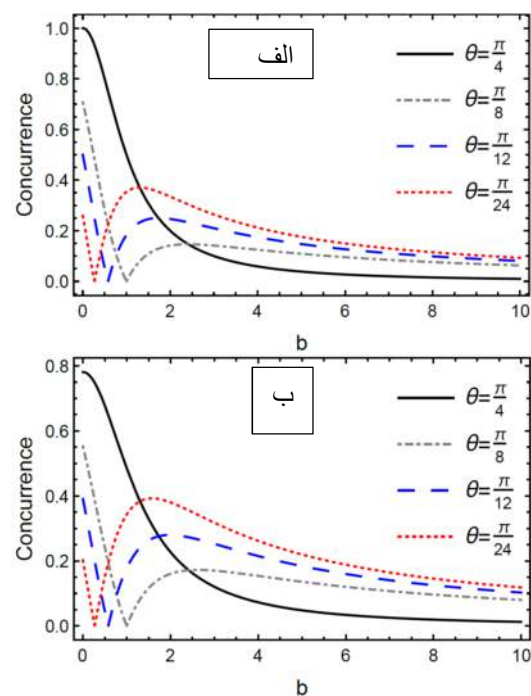
شکل ۴. نمودار تلاقی برحسب پارامتر  $\theta$  به‌ازای  $t = 10$ ،  $J(R) = J_z = 1$  و  $D_z = 0$ ،  $\gamma = 0.2$ .

شکل ۴ نشان می‌دهد که در غیاب میدان مغناطیسی ناهمگن در زمان معین  $t = 10$ ، با افزایش مقدار درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد. به‌طوری‌که به‌ازای  $\theta = 0$  حالت سیستم جدا پذیر بوده و به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  سیستم دارای بیشینه درهم‌تنیدگی است. در حالی‌که

۵- از مقایسه نتایج ۳ و ۴ می‌توان نتیجه گرفت که با اعمال میدان مغناطیسی ناهمگن و اندرکنش ژئالوشینسکی-موریا می‌توان اثر واهمدوسی را مشاهده کرد.

برای بررسی بیشتر نمودار تلاقی برحسب شدت میدان مغناطیسی ناهمگن در زمان معین  $t = 10$  در شکل ۳ رسم شده است. شکل ۳ نشان می‌دهد که:

- ۱- زمانی‌که حالت اولیه سیستم دارای بیشینه درهم‌تنیدگی باشد یعنی  $\theta = \frac{\pi}{4}$  با افزایش میدان مغناطیسی ناهمگن، درهم‌تنیدگی از مقدار بیشینه به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد.
- ۲- با افزایش پارامتر ژئالوشینسکی-موریا مقدار درهم‌تنیدگی بیشینه در زمان اولیه کاهش می‌یابد و همچنین شدت افت درهم‌تنیدگی نیز کاهش می‌یابد.



شکل ۳. نمودار تلاقی برحسب شدت میدان مغناطیسی ناهمگن به‌ازای  $t = 10$ ،  $J(R) = J_z = b = 1$  و  $\gamma = 0.2$ ، الف:  $D_z = 0$  و ب:  $D_z = 0.8$ .

ماتریس واحد و  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ماتریس‌های پائولی هستند. با جای‌گذاری رابطه ۹ در رابطه ۱۴ خواهیم داشت:

$$\rho_{out}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{out}^{22} & \rho_{out}^{23} & 0 \\ 0 & \rho_{out}^{32} & \rho_{out}^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ۱۶$$

که در آن

$$\begin{aligned} \rho_{out}^{22} &= (\rho_{22} + \rho_{33})^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}, \\ \rho_{out}^{33} &= (\rho_{22} + \rho_{33})^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}, \\ \rho_{out}^{23} &= \rho_{out}^{32*} = \frac{1}{2} (\rho_{23} + \rho_{32})^2 e^{-i\varphi} \sin \beta, \end{aligned} \quad ۱۷$$

میزان همپوشانی حالت ورودی و خروجی با استفاده از وفاداری کوآنتومی سنجیده می‌شود که در بخش بعدی به آن پرداخته خواهد شد.

### وفاداری کوآنتومی

در مکانیک کوآنتومی به‌ویژه در نظریه اطلاعات کوآنتومی، وفاداری کوآنتومی یک مفهوم کلیدی می‌باشد که میزان همپوشانی یا تشابه بین دو حالت کوآنتومی را نشان می‌دهد. وفاداری کوآنتومی بین دو حالت کوآنتومی  $\rho_{in}$  و  $\rho_{out}$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(\rho_{in}, \rho_{out}) = (\text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_{in}} \rho_{out} \sqrt{\rho_{in}}}))^2 \quad ۱۸$$

به‌طوری‌که  $0 \leq F \leq 1$ . در فرآیند دوربری کوآنتومی، یک حالت کوآنتومی به‌واسطه یک کانال درهم‌تنیده از فرستنده به گیرنده ارسال می‌شود که برای سنجش کیفیت فرآیند دوربری کوآنتومی از وفاداری کوآنتومی میانگین استفاده خواهیم کرد که با میانگین‌گیری

با اعمال میدان مغناطیسی ناهمگن  $b = 1$  درهم‌تنیدگی سیستم رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد و درهم‌تنیدگی به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{8}$  کمینه است.

### دوربری کوآنتومی

دوربری کوآنتومی راهی برای انتقال اطلاعات کوآنتومی از آلیس به باب با استفاده از یک کانال درهم‌تنیده است. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از حالت آمیخته دو کیوبیتی زنجیره اسپینی هایزنبرگ  $\rho(t)$  که قبلاً به‌دست آوردیم رابطه ۸، به‌عنوان یک کانال درهم‌تنیده برای دوربری کوآنتومی استفاده کنیم. در این فرآیند فرض می‌کنیم آلیس در نظر دارد یک حالت خالص دو کیوبیتی به‌صورت

$$|\varphi_{in}\rangle = \cos \frac{\beta}{2} |01\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\beta}{2} |10\rangle \quad ۱۳$$

که در آن  $0 \leq \beta \leq \pi$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  می‌باشد، توسط حالت آمیخته درهم‌تنیده  $\rho(t)$  به باب ارسال کند. برای حالت ورودی فوق، حالت خروجی به واسطه کانال درهم‌تنیده ۹ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{out} = \sum_{i,j=0}^3 P_{ij} (\sigma_i \otimes \sigma_j) \rho_{in} (\sigma_i \otimes \sigma_j) \quad ۱۴$$

به‌طوری‌که  $P_{ij} = \text{Tr}[E^i \rho(t)] \text{Tr}[E^j \rho(t)]$  و

$$\sum_{i,j=0}^3 P_{ij} = 1 \quad \text{بوده و}$$

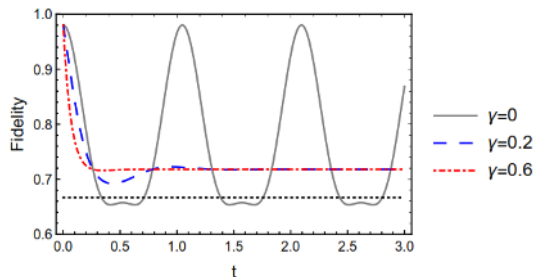
$$\begin{aligned} E^0 &= |\psi^-\rangle \langle \psi^-|, E^1 = |\varphi^-\rangle \langle \varphi^-|, \\ E^2 &= |\varphi^+\rangle \langle \varphi^+|, E^3 = |\psi^+\rangle \langle \psi^+| \end{aligned} \quad ۱۵$$

که در آن  $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$  و

$|\varphi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$  می‌باشد. همچنین  $\sigma_0$



به حداقل مقدار وفاداری کوآنتومی میانگین  $\frac{2}{3}$  میل می‌کند. همچنین رفتار وفاداری کوآنتومی میانگین برحسب زمان به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر واهمدوسی و  $\theta = \frac{\pi}{4}$  در شکل ۶ رسم شده است.



شکل ۶. نمودار وفاداری کوآنتومی برحسب زمان به‌ازای  $D_z = 0.5$  و  $J(R) = J_z = b = 1$  با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌شود که:

۱- به‌ازای  $\gamma = 0$  یعنی وقتی سیستم هیچ اندرکنشی با محیط اطراف ندارد، وفاداری کوآنتومی با زمان رفتار پریودیک از خود نشان می‌دهد و در بازه‌های زمانی  $\frac{2}{3}$  خاصی مقدار وفاداری کوآنتومی میانگین از  $\frac{2}{3}$  کوچکتر است.

۲- به‌ازای  $D_z, b, \gamma \neq 0$ ، وفاداری کوآنتومی از مقدار بیشینه یک کاهش یافته و با توجه به شکل، به یک مقدار ثابت  $F_{ave} \approx 0.72$  میل می‌کند که از حداقل وفاداری کوآنتومی میانگین برای دوربری کوآنتومی امن بیشتر است.

۳- با افزایش پارامتر واهمدوسی شدت افت وفاداری کوآنتومی میانگین افزایش می‌یابد.

به‌علاوه به‌ازای  $D_z, b = 0$  و  $J(R) \neq 0$  و جای‌گذاری رابطه ۱۰ در رابطه ۲۰ ملاحظه می‌شود وفاداری کوآنتومی میانگین مستقل از پارامتر واهمدوسی بیشینه است،  $F_{ave} = 1$ .

$F(\rho_{in}, \rho_{out})$  روی تمام حالت‌های خالص در کره بلوخ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

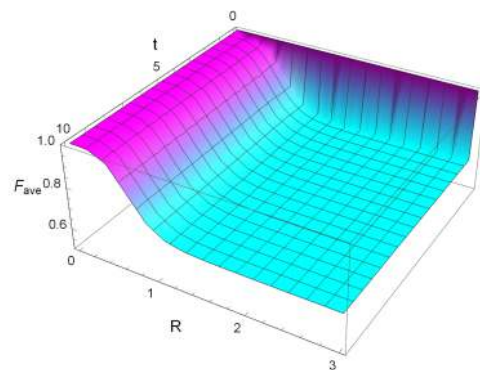
۱۹

$$F_{ave} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\beta F_{ave}(\rho_{in}, \rho_{out}) \sin \beta$$

حداقل مقدار وفاداری کوآنتومی میانگین برای دوربری کوآنتومی موفق  $\frac{2}{3}$  می‌باشد که معادل بیشینه مقدار وفاداری در فرآیند ارتباطات کلاسیکی است. با جای‌گذاری رابطه ۱۶ و ۱۷ در ۱۸ خواهیم داشت:

$$F_{ave} = \frac{1}{3} \{2(\rho_{22} + \rho_{33})^2 + (\rho_{23} + \rho_{32})^2\} \quad 20$$

به‌این ترتیب می‌توان با جای‌گذاری از ماتریس چگالی تحول زمانی یافته رابطه ۹ و ۱۰، وفاداری کوآنتومی میانگین را به‌دست آورد. در شکل ۵، رفتار وفاداری کوآنتومی برحسب زمان و فاصله نسبی و به‌ازای  $D_z = J_z = b = 1$ ،  $\gamma = 0.6$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}$  رسم شده است.



شکل ۵. نمودار وفاداری کوآنتومی برحسب زمان و فاصله بین اسپین‌ها،

$$\text{به‌ازای } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ و } \gamma = 0.6, D_z = J_z = b = 1$$

از شکل ۵ ملاحظه می‌شود که با افزایش فاصله نسبی بین اسپین‌ها، وفاداری کوآنتومی میانگین کاهش یافته و

## نتیجه‌گیری

درهم‌تنیدگی اولیه بیشتر خواهد بود. در ادامه از ماتریس چگالی دو کیوبیتی مدل هایزنبرگ  $XXZ$  در حضور اثر واهمدوسی به‌عنوان یک کانال کوآنتومی برای انتقال حالت‌های کوآنتومی از فرستنده به گیرنده استفاده کردیم و با استفاده از سنجۀ وفاداری کوآنتومی، اثر فاصله نسبی بین اسپین‌ها، واهمدوسی ذاتی، میدان مغناطیسی، اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا و پارامترهای مربوط به‌حالت اولیه سیستم را بر کیفیت حالت کوآنتومی انتقال یافته، مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان داد که در اثر افزایش فاصله نسبی بین اسپین‌ها، وفاداری کوآنتومی میانگین کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه شد که در غیاب میدان مغناطیسی ناهمگن و اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا مستقل از پارامتر واهمدوسی وفاداری کوآنتومی میانگین نیز همانند درهم‌تنیدگی بیشینه است،  $F_{ave} = 1$ . به‌طوری‌که به‌ازای  $D_z, b, \gamma \neq 0$ ، وفاداری کوآنتومی میانگین از مقدار بیشینه یک کاهش یافته و به یک مقدار ثابت  $F_{ave} \approx 0.72$  میل می‌کند که از حداقل وفاداری کوآنتومی میانگین برای دوربری کوآنتومی موفق و امن بیشتر است. به‌عبارتی اعمال میدان مغناطیسی ناهمگن و در نظر گرفتن اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا، منجر به دستیابی به دوربری کوآنتومی بین دو ناظر با وفاداری کوآنتومی بالا شد که حائز اهمیت است.

## مرجع‌ها

- [1] A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen, Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?, *Physical Review* **47** (1935) 777-780. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>
- [2] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Physical*

در این مقاله، مدل هایزنبرگ  $XXZ$  دو کیوبیتی با اندرکنش ژیاوشینسکی-موریا، در حضور میدان‌های مغناطیسی همگن و ناهمگن در راستای  $Z$  در نظر گرفته شده است به‌طوری‌که جفت‌شدگی اسپین-اسپین در راستاهای  $X$  و  $Y$  تحت مدل کالگرو-موزر نوع  $I$ ، تابعی از فاصله نسبی بین اسپین‌هاست. با فرض اینکه سیستم ابتدا در حالت  $|\psi(0)\rangle = \sin\theta|01\rangle + \cos\theta|10\rangle$  باشد، درایه‌های ماتریس چگالی سیستم در زمان  $t$ ، مستقل از شدت میدان مغناطیسی همگن است. مطالعه دینامیک درهم‌تنیدگی کوآنتومی به‌کمک سنجۀ تلاقی نشان داد که مقدار درهم‌تنیدگی نیز مستقل از میدان مغناطیسی همگن بوده و با افزایش فاصله نسبی بین اسپین‌ها، کاهش می‌یابد. همچنین تحول زمانی تلاقی به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر واهمدوسی ذاتی و پارامتر ژیاوشینسکی-موریا نشان داد وقتی سیستم هیچ اندرکنشی با محیط اطراف نداشته باشد، درهم‌تنیدگی با زمان رفتار کاملاً پریودیک از خود نشان می‌دهد. به‌ازای  $D_z, b, \gamma \neq 0$ ، درهم‌تنیدگی با زمان کاهش یافته و در نهایت به مقدار ثابت  $C(t) \approx 0.5$  میل می‌کند که افزایش پارامتر واهمدوسی منجر به افزایش شدت افت درهم‌تنیدگی می‌شود. مطالعه تلاقی برحسب شدت میدان مغناطیسی ناهمگن در زمان معین نیز نشان داد که به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  با افزایش میدان مغناطیسی ناهمگن، درهم‌تنیدگی از یک مقدار بیشینه که وابسته به پارامتر ژیاوشینسکی-موریا است، به‌طور یکنواخت کاهش یافته و به صفر میل می‌کند. در حالی‌که به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{24}$  درهم‌تنیدگی پس از یک نابودی به‌ازای  $b$ های بزرگ دوباره احیا می‌شود. نکته جالب توجه اینجاست که به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{24}$ ، درهم‌تنیدگی پس از احیا از

- (2005) 255. <https://doi.org/10.1088/6102/44/2/255>
- [11] Z. He, Z. Xiong, Y. Zhang, Influence of intrinsic decoherence on quantum teleportation via two-qubit Heisenberg XYZ chain, *Physics Letters A* **354** (2006) 79-83. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.01.038>
- [12] X.B. Xu, J.M. Liu, P.F. Yu, Entanglement of a two-qubit anisotropic Heisenberg XYZ chain in nonuniform magnetic fields with intrinsic decoherence, *Chinese Physics B* **17** (2008) 456. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/2/019>
- [13] J.L. Guo, Y. Xia, H.S. Song, Effects of Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction on entanglement and teleportation in a two-qubit Heisenberg chain with intrinsic decoherence, *Optics communications* **281** (2008) 2326-2330. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.11.082>
- [14] K. Hikami, M. Wadati, Integrability of Calogero-Moser spin system, *Journal of the Physical Society of Japan* **62** (1993) 469-472. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.62.469>
- [15] W.K. Wootters, Entanglement Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, *Physical Review Letter* **80** (1998) 22-45. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>
- [16] W.K. Wootters, Entanglement of formation and concurrence, *Quantum Information and Computation* **1** (2001) 27-44. <https://doi.org/10.26421/QIC1.1-3>
- Review Letter* **70** (1993) 1895-1899. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895>
- [3] R. Jozsa, Fidelity for mixed quantum states, *Journal of modern optics* **41** (1994) 2315-2323. <https://doi.org/10.1080/09500349414552171>
- [4] G. Burkard, D. Loss, D.P. Divincenzo, Coupled quantum dots as quantum gates, *Physical Review B* **59** (1999) 2070. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.59.2070>
- [5] R. Vrijen, et al., Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon germanium heterostructures, *Physical Review A* **62** (2000) 012306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.012306>
- [6] S. Bose, Quantum communication through an unmodulated spin chain, *Physical review letters* **91** (2003) 207901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.207901>
- [7] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, A.J. Landahl, Perfect state transfer in quantum spin networks, *Physical review letters* **92** (2004) 187902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.187902>
- [8] G.J. Milburn, Intrinsic decoherence in quantum mechanics, *Physical Review A* **44** (1991) 5401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.5401>
- [9] S.B. Li, J.B. Xu, Magnetic impurity effects on the entanglement of three-qubit Heisenberg XY chain with intrinsic decoherence, *Physics Letters A* **334** (2005) 109-116. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.11.008>
- [10] B. Shao, T.H. Zeng, J. Zou, Influence of intrinsic decoherence on entanglement in two-qubit quantum Heisenberg XYZ chain, *Communications in Theoretical Physics* **44**