

# Geometric phase for two-partite qutrit-like entangled coherent state

Sanaz Mohammadi Almas, Ghader Najarbashi\*, Ali Tavana

Department of Physics, Faculty of Science, University of Mohaghegh Ardabili. P. O. Box 179, Ardabil, Iran

Received: 17.01.2022 Final revision: 20.04.2022 Accepted: 20.07.2022

Doi: [10.22055/jrmbms.2022.17904](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2022.17904)

## Abstract

Coherent states, most close states to the classical states, have a special role in quantum optics. In this paper, the geometric phase of the two-partite qutrit-like entangled coherent state undergoing a unitary and cyclic evolution is calculated. Using the concurrence measure, the degree of entanglement of the state before and after the evolution is calculated and compared with the geometric phase. We show that the geometric phase and concurrence, as a function of the time evolution parameter, are inversely changed, in the sense that the increase of one is accompanied by a decrease of the other. Finally, we suggest an experimental realization to the production of the two-mode entangled coherent state based on the interferometry scheme.

**Keywords:** Geometric phase, coherent state, concurrence

---

\*Corresponding Author: najarbashi@uma.ac.ir

## فاز هندسی برای حالت همدوس درهم‌تنیده دو بخشی کیوتريت گونه

ساناز محمدی الماس، قادر نجارباشی\*، علی توانا

گروه آموزشی فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۰۱/۳۱ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۹

Doi: [10.22055/jrmbms.2022.17904](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2022.17904)

### چکیده

حالت‌های همدوس نزدیکترین حالت به حالت‌های کلاسیکی، نقش ویژه‌ای در اپتیک کوآنتومی دارند. در این مقاله، فاز هندسی برای حالت همدوس درهم‌تنیده دو بخشی کیوتريت گونه تحت تحول یکانی و دوره‌ای محاسبه شده است. درجه درهم‌تنیدگی حالت همدوس قبل و بعد از تحول با استفاده از سنجه تلافی محاسبه و با فاز هندسی مقایسه شده است. نشان می‌دهیم که فاز هندسی و سنجه تلافی نسبت به پارامتر تحول زمانی به صورت معکوس تغییر می‌یابند، بدین معنی که افزایش یکی با کاهش دیگری همراه است. در آخر، یک طرح تجربی برای تولید حالت همدوس درهم‌تنیده دو مده بر پایه تداخل سنج ارائه می‌دهیم.

کلیدواژگان: فاز هندسی، حالت همدوس، سنجه تلافی

### مقدمه

بودن، قابل چشم‌پوشی نیست. پس از آن ویلچک<sup>۴</sup> و زی<sup>۵</sup> فاز بری را به حالت‌های تبهگن تعمیم دادند که این منجر به فاز هندسی غیرآبلی<sup>۶</sup> شد [۲]. آهارانوف<sup>۷</sup> و آناندان<sup>۸</sup> تعمیم مهم دیگری از فاز بری را با حذف شرط آدیاباتیک ارائه دادند [۳]. تعمیم‌های دیگر فاز بری برای حالت‌های مخلوط<sup>۹</sup> [۴،۵]، تحول‌های غیر دوره‌ای [۶]، سیستم‌های باز<sup>۱۰</sup> [۷-۹] و ... بررسی شده‌اند. فاز بری و تعمیم‌های آن در بسیاری از حوزه‌ها نظیر محاسبات کوآنتومی [۱۰-۱۴]، اپتیک کوآنتومی

بری<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۴ مقاله‌ای منتشر کرد که تأثیر عمیقی بر جامعه فیزیکی گذاشت [۱]. او در این مقاله تحول یک سیستم کوآنتومی را تحت شرایط آدیاباتیک<sup>۲</sup> و دوره‌ای<sup>۳</sup> بررسی کرد و متوجه شد که تابع موج سیستم علاوه بر فاز معروف دینامیکی، یک ضریب فاز هندسی نیز به دست می‌آورد که مستقل از انرژی است و به‌انحنای ذاتی فضای حالات بستگی دارد. او نشان داد که این ضریب فاز هندسی به دلیل ناوردای پیمانهای

\* نویسنده مسئول: najarbashi@uma.ac.ir

1 Berry  
2 adiabatic  
3 cyclic  
4 Wilczek  
5 Zee  
6 non-abelian  
7 Aharonov  
8 Anandan  
9 mixed  
10 open systems



[۱۵،۱۶] و فیزیک حالت جامد [۱۷،۱۸] کاربردهای زیادی دارند. به طور مثال فازهای هندسی می‌توانند معیاری برای تعیین نقاط گذار فازهای کوآنتومی در زنجیره‌های اسپینی باشند [۲۱-۱۹]. از کاربردهای فاز هندسی در محاسبات کوآنتومی می‌توان به استفاده از فاز هندسی به عنوان ابزاری برای فرآیند اطلاعات کوآنتومی مقاوم<sup>۱</sup> اشاره کرد [۲۲،۲۳]. مزیت استفاده از فاز هندسی در محاسبات کوآنتومی، هندسی محض بودن آن است که سبب مقاوم شدن فاز هندسی در برابر برخی از منابع نوفه می‌شود [۲۴]. از فاز هندسی در محاسبات کوآنتومی می‌توان به عنوان گیت جابه‌جایی فاز<sup>۲</sup> استفاده نمود. همچنین از فاز هندسی می‌توان برای آنالیز درهم‌تنیدگی کوآنتومی استفاده کرد [۲۵]. فاز هندسی یک جفت ذره اسپین ۱/۲ درهم‌تنیده درون میدان مغناطیسی یکنواخت مستقل از زمان در [۵] و درون میدان مغناطیسی چرخشی در [۲۶] محاسبه شده و رابطه بین فاز هندسی حالت درهم‌تنیده و زیرسیستم‌های آن نیز در [۲۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

بررسی فاز هندسی حالت‌های همدوس<sup>۳</sup> به دلیل نقش آن‌ها در اپتیک کوآنتومی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. حالت‌های همدوس اولین بار توسط شرودینگر<sup>۴</sup> در سال ۱۹۲۶ معرفی شد [۲۸]. فاز بری حالت‌های همدوس تک مده در [۲۹] محاسبه شده است. فاز هندسی غیر دوره‌ای برای حالت‌های همدوس در [۳۰] مطالعه شده است. همچنین، فاز هندسی حالت‌های همدوس و فشرده<sup>۵</sup> برای تحول‌های غیر دوره‌ای و غیر یکانی نیز در [۳۱] محاسبه شده است.

حالت‌های همدوس درهم‌تنیده در نظریه اطلاعات کوآنتومی از اهمیت به‌سزایی برخوردار هستند. به عنوان مثال، از این حالت‌ها می‌توان برای توزیع کلید کوآنتومی<sup>۶</sup> [۳۲]، دوربری<sup>۷</sup> [۳۳] و ... استفاده کرد. میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس درهم‌تنیده دویخشی در دو و سه بعد با استفاده از سنجه تلاقی محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است [۳۴]. همچنین در [۳۵]، سنجه تلاقی به‌حالت همدوس درهم‌تنیده<sup>N</sup> بخشی نیز تعمیم داده شده است. درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس درهم‌تنیده فوتون‌افزوده [۳۶،۳۷] و حالت‌های شبه‌همدوس دویخشی [۳۸] نیز بررسی شده است. در [۳۹] رابطه بین فاز هندسی و سنجه تلاقی برای کیوبیت‌های ناخالصی در سیستم چگالش بوز-اینشتین بررسی شده و نشان داده‌اند که فاز هندسی این حالت‌ها می‌تواند شاهدهی برای درهم‌تنیدگی باشد.

در این مقاله فاز هندسی را برای حالت همدوس خالص درهم‌تنیده دو بخشی در سه بعد برای تحول دوره‌ای و یکانی به دست می‌آوریم. میزان درهم‌تنیدگی حالت همدوس تعریف شده با استفاده از سنجه تلاقی در [۳۴] محاسبه شده است. میزان درهم‌تنیدگی حالت تحول یافته را نیز با استفاده از سنجه تلاقی محاسبه و آن را با فاز هندسی مقایسه می‌کنیم. در این مقاله بررسی می‌کنیم که آیا درهم‌تنیدگی موجود در حالت تعریف شده می‌تواند توسط فاز هندسی آشکار شود یا نه. در انتها

<sup>5</sup> squeezed

<sup>6</sup> quantum key distribution

<sup>7</sup> teleportation

<sup>1</sup> robust quantum information processing

<sup>2</sup> phase shift gate

<sup>3</sup> coherent

<sup>4</sup> Schrödinger

$$\Phi_G(|\Psi\rangle) = |N_1|^2 \Phi_G(|\psi_1\rangle) + |N_2|^2 \Phi_G(|\psi_2\rangle) - 2N_1N_2 \oint dt \operatorname{Im}(\langle \psi_1 | \hat{U}^\dagger \partial_t \hat{U} | \psi_2 \rangle).$$

بنابراین تحت تحول یکانی، فاز هندسی یک حالت برهم‌نهی به صورت مجموع وزنی فاز هندسی تک تک زیرحالت‌ها و جملاتی که حاوی اطلاعاتی در مورد برهم‌نهی زیرحالت‌هاست نوشته می‌شود.

در ادامه، فاز هندسی حالتی را بررسی می‌کنیم که یک برهم‌نهی از حالت‌های هم‌دوس باشد. حالت هم‌دوس  $|\alpha\rangle$  به صورت ویژه حالت عملگر نابودی  $\hat{a}$  با ویژه مقدار  $\alpha \in \mathbb{C}$  تعریف می‌شود، یعنی:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad ۵$$

می‌توان ثابت کرد که تابع بهنجار شده  $|\alpha\rangle$  به شکل زیر است:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad ۶$$

ضرب داخلی دو حالت هم‌دوس برابر است با:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^* \beta)\right\}. \quad ۷$$

اکنون حالت هم‌دوس درهم‌تنیده دو بخشی زیر را که یک برهم‌نهی از حالت‌های  $|\alpha\alpha\rangle$ ،  $|\beta\beta\rangle$  و  $|\gamma\gamma\rangle$  است را در نظر بگیرید:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|\alpha\alpha\rangle + \mu_1|\beta\beta\rangle + \mu_2|\gamma\gamma\rangle), \quad ۸$$

که در آن  $\mu_1$  و  $\mu_2$  دو مقدار ثابت‌اند و  $N$  ضریب بهنجارش است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$N = 1 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1 p_1^2 + 2\mu_1 \mu_2 p_2^2 + 2\mu_2 p_3^2$$

، و در آن  $p_1 = \langle \alpha | \beta \rangle$ ،  $p_2 = \langle \gamma | \beta \rangle$  و

$p_3 = \langle \gamma | \alpha \rangle$  برای سادگی فرض می‌کنیم همه

پارامترها حقیقی‌اند.

یک طرح تجربی برای تولید حالت هم‌دوس درهم‌تنیده کیوتريت گونه با استفاده از تداخل سنج ارائه می‌دهیم.

## فاز هندسی برای حالت هم‌دوس خالص

### دوبخشی در سه بعد

هنگامی که یک سیستم کوآنتومی با حالت اولیه  $|\Psi(0)\rangle$  تحت تحول  $\hat{U}(t)$  یک مسیر بسته‌ای را در فضای حالات طی می‌کند تابع موج سیستم، ضریب فازی به نام فاز هندسی به دست می‌آورد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱]:

$$\Phi_G = i \oint dt \langle \Psi(0) | \hat{U}^\dagger \partial_t \hat{U} | \Psi(0) \rangle. \quad ۱$$

فرض می‌کنیم  $|\Psi(0)\rangle$  از برهم‌نهی دو حالت  $|\psi_1(0)\rangle$  و  $|\psi_2(0)\rangle$  به صورت زیر تشکیل شده باشد:

$$|\Psi(0)\rangle = N_1|\psi_1(0)\rangle + N_2|\psi_2(0)\rangle, \quad ۲$$

که در آن  $|N_1|^2 + |N_2|^2 = 1$ . در این صورت فاز هندسی  $|\Psi(0)\rangle$  به شکل زیر نوشته می‌شود:

۳

$$\Phi_G(|\Psi\rangle) = |N_1|^2 \Phi_G(|\psi_1\rangle) + |N_2|^2 \Phi_G(|\psi_2\rangle) + iN_1N_2 \oint dt \langle \psi_1 | \hat{U}^\dagger \partial_t \hat{U} | \psi_2 \rangle +$$

$$iN_1N_2 \oint dt \langle \psi_2 | \hat{U}^\dagger \partial_t \hat{U} | \psi_1 \rangle,$$

که در آن  $\Phi_G(|\psi_1\rangle)$  و  $\Phi_G(|\psi_2\rangle)$  به ترتیب فاز هندسی حالت‌های  $|\psi_1(0)\rangle$  و  $|\psi_2(0)\rangle$  است. باتوجه

به اینکه  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ ، می‌توان ثابت کرد که

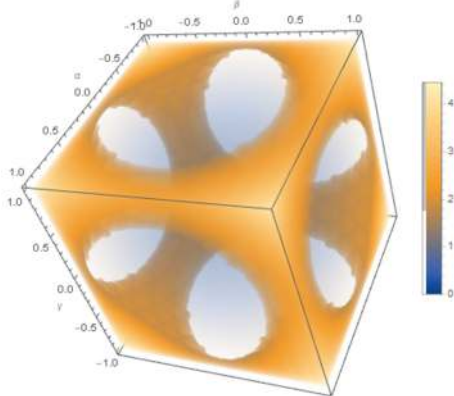
$$\langle \psi_2 | \hat{U}^\dagger \partial_t \hat{U} | \psi_1 \rangle = -\langle \psi_1 | \hat{U}^\dagger \partial_t \hat{U} | \psi_2 \rangle^*$$

بنابراین فاز هندسی به صورت زیر ساده می‌شود:

۴

۱۲

فاز هندسی حالت همدوس کیوتريت گونه وابسته به پارامتر  $\theta$  و پارامترهای مدهای همدوس حالت اولیه یعنی  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  است. اگر  $\theta = 0$  باشد، عملگر تحول به  $\hat{U}(\theta = 0, \varphi) = e^{-i\varphi \hat{J}_z}$  تبدیل می شود و فاز هندسی حالت همدوس، صفر است.



شکل ۱. قدرمطلق فاز هندسی برحسب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  و به ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  و  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ .

در شکل ۱، قدرمطلق فاز هندسی برحسب کمیت های  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  برای حالت خاص  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}$  نشان داده شده است. مشاهده می شود که به ازای مقادیر کوچکتر برای  $|\alpha|$ ،  $|\beta|$  و  $|\gamma|$ ، مقدار فاز هندسی کوچک و نزدیک صفر است و با افزایش مقادیر  $|\alpha|$ ،  $|\beta|$  و  $|\gamma|$ ، مقدار فاز هندسی افزایش می یابد.

شکل ۲، نمودار کانتوری قدرمطلق فاز هندسی برحسب متغیرهای  $\mu_1$  و  $\mu_2$  می باشد که نشان دهنده وابستگی

برای محاسبه فاز هندسی تبدیل های چرخشی را به حالت اولیه اعمال می کنیم. هر چرخش در فضای سه بعدی را می توان با تبدیل فازی به صورت  $e^{-i\omega \hat{J}.n}$  بیان کرد که در آن  $\omega$  و  $n$  به ترتیب زاویه و محور چرخش اند.  $\hat{J} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$  مجموعه عملگرهای تکانه زاویه ای هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger), \\ \hat{J}_y &= \frac{1}{2i}(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger), \\ \hat{J}_z &= \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}), \end{aligned} \quad 9$$

که در آن  $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$  و  $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)$  عملگرهای فنا (خلق) هستند. مجموعه عملگرهای تکانه زاویه ای در رابطه جابه جایی  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \epsilon_{ijk} i \hbar \hat{J}_k$  صدق می کنند.

عملگر یکانی  $\hat{U}(\theta, \varphi) = e^{-i\varphi \hat{J}_z} e^{-i\theta \hat{J}_y}$  که یک عملگر غیرموضعی<sup>۱</sup> است را در نظر می گیریم. مقدار چشمداشتی  $\hat{U}^\dagger \partial_\varphi \hat{U}$  بر روی حالت اولیه عبارت است از:

$$\langle \Psi(0) | \hat{U}^\dagger \partial_\varphi \hat{U} | \Psi(0) \rangle = i \sin \theta \langle \Psi(0) | \hat{J}_x | \Psi(0) \rangle, \quad 10$$

که در آن از لم بیکر-هاسدورف<sup>۲</sup> استفاده کرده ایم. توجه داریم که  $\langle \Psi(0) | \hat{J}_x | \Psi(0) \rangle$  برابر است با:

$$\langle \Psi(0) | \hat{J}_x | \Psi(0) \rangle = \frac{1}{N} (|\alpha|^2 + \mu_1^2 |\beta|^2 + \mu_2^2 |\gamma|^2 + 2\mu_1 \alpha \beta p_1^2 + 2\mu_2 \alpha \gamma p_3^2 + 2\mu_1 \mu_2 \beta \gamma p_2^2), \quad 11$$

بنابراین با ثابت نگه داشتن  $\theta$  و تحول  $\varphi$  از 0 تا  $2\pi$  و با استفاده از رابطه<sup>۱</sup>، فاز هندسی را به صورت زیر به دست می آوریم:

<sup>2</sup> Baker-Hausdorff lemma

<sup>1</sup> nonlocal

$\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$  مستقل خطی می‌باشد، بنابراین این حالت‌ها می‌توانند یک فضای هیلبرت کیوتریت گونه با پایه‌های اورتونرمال سه بعدی  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$  را به صورت زیر جاروب کنند:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= |0\rangle, \\ |\beta\rangle &= p_1|0\rangle + M_1|1\rangle, \\ |\gamma\rangle &= p_3|0\rangle + M_2|1\rangle + M_3|2\rangle \end{aligned} \quad (۱۳)$$

که در آن  $M_1 = \sqrt{1-p_1^2}$ ،  $M_2 = \frac{p_2 - p_1 p_3}{\sqrt{1-p_1^2}}$  و

$$M_3 = \sqrt{\frac{1-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2p_1 p_2 p_3}{1-p_1^2}}$$

بنابراین با جای‌گذاری رابطه ۱۳ در رابطه ۸ فرم کیوتریتی حالت اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

۱۴

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \{ (1 + \mu_1 p_1^2 + \mu_2 p_3^2) |00\rangle + \\ & (\mu_1 M_1^2 + \mu_2 M_2^2) |11\rangle + \mu_2 M_3^2 |22\rangle + \\ & (\mu_1 p_1 M_1 + \mu_2 p_3 M_2) (|10\rangle + |01\rangle) + \\ & \mu_2 M_2 M_3 (|21\rangle + |12\rangle) + \\ & \mu_2 p_3 M_3 (|20\rangle + |02\rangle) \}. \end{aligned}$$

سنجه تلافی برای حالت کلی دو بخشی

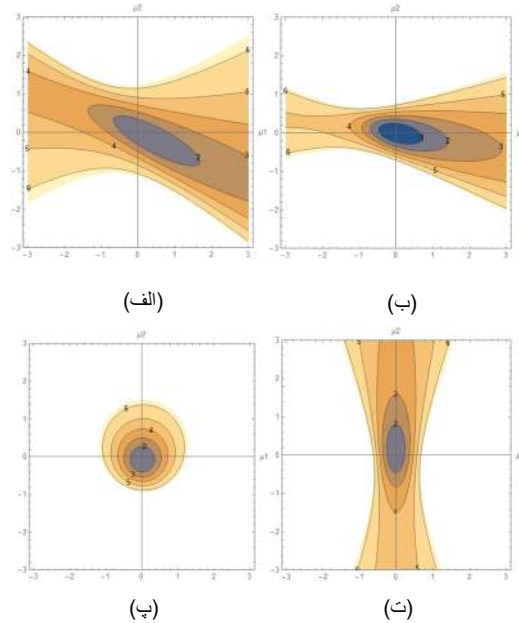
$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} a_{ij} |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle$$

[۴۰]

$$C = 2 \sqrt{\sum_{i \langle j} \sum_{k \langle l} |a_{ik} a_{jl} - a_{il} a_{jk}|^2} \quad (۱۵)$$

که در آن  $d_1$  و  $d_2$  به ترتیب بعد بخش اول و دوم هستند. بنابراین با استفاده از رابطه بالا، سنجه تلافی برای حالت  $|\Psi(0)\rangle$  به صورت زیر به دست می‌آید:

شدید فاز هندسی به مقادیر پارامترهای حالت همدوس یعنی  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  است.



شکل ۲. نمودار کانتوری قدرمطلق فاز هندسی برحسب  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به‌ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

الف:  $\alpha = 0$ ،  $\beta = 1$ ،  $\gamma = 2$ . ب:  $\alpha = -0.5$ ،  $\beta = 1$ .  
 پ:  $\alpha = -0.5$ ،  $\beta = -2$ ،  $\gamma = 1$ . ت:  $\alpha = -0.5$ ،  $\beta = 1.5$ ،  $\gamma = -1.5$ .

### سنجه تلافی برای حالت همدوس خالص

#### دو بخشی در سه بعد

برای محاسبه میزان درهم‌تنیدگی حالت  $|\Psi(0)\rangle$  با استفاده از سنجه تلافی ابتدا آن را به فرم سه کیوبیتی می‌نویسیم. از آنجایی که دو حالت همدوس همواره غیرمتعامد هستند و با توجه به اینکه مجموعه

$$C(|\Psi(0)\rangle) = \frac{2}{N} \left( |\mu_1 M_1^2 + \mu_2 M_2^2 + \mu_1 \mu_2 (p_1^2 M_2^2 + p_3^2 M_1^2 - 2p_1 p_3 M_1 M_2)|^2 + \right. \\ \left. 2|\mu_2 M_2 M_3 + \mu_1 \mu_2 p_1 M_3 (p_1 M_2 - p_3 M_1)|^2 + 2|\mu_1 \mu_2 M_1 M_3 (p_1 M_2 - p_3 M_1)|^2 + \right. \\ \left. |\mu_2 M_3^2 (1 + \mu_1 p_1^2)|^2 + 2|\mu_1 \mu_2 p_1 M_1 M_3^2|^2 + |\mu_1 \mu_2 M_1^2 M_3^2|^2 \right)^{1/2}.$$

$$|\alpha'\rangle = |0'\rangle,$$

$$|\beta'\rangle = p_1' |0'\rangle + M_1' |1'\rangle, \quad 19$$

$$|\gamma'\rangle = p_3' |0'\rangle + M_2' |1'\rangle + M_3' |2'\rangle,$$

$$\text{که در آن } M_2' = \frac{p_2' - p_1' p_3'}{\sqrt{1 - p_1'^2}}, \quad M_1' = \sqrt{1 - p_1'^2}$$

$$\text{با } M_3' = \sqrt{\frac{1 - p_1'^2 - p_2'^2 - p_3'^2 + 2p_1' p_2' p_3'}{1 - p_1'^2}}$$

$$p_3' = \langle \gamma' | \alpha' \rangle \quad \text{و} \quad p_2' = \langle \gamma' | \beta' \rangle, \quad p_1' = \langle \alpha' | \beta' \rangle$$

به‌طور مشابه مجموعه  $\{|\alpha''\rangle, |\beta''\rangle, |\gamma''\rangle\}$  یک زیر

فضای سه بعدی با پایه‌های  $\{|0''\rangle, |1''\rangle, |2''\rangle\}$  را

به‌صورت زیر جاروب می‌کند:

$$|\alpha''\rangle = |0''\rangle,$$

$$|\beta''\rangle = p_1'' |0''\rangle + M_1'' |1''\rangle, \quad 20$$

$$|\gamma''\rangle = p_3'' |0''\rangle + M_2'' |1''\rangle + M_3'' |2''\rangle,$$

$$\text{و } M_2'' = \frac{p_2'' - p_1'' p_3''}{\sqrt{1 - p_1''^2}}, \quad M_1'' = \sqrt{1 - p_1''^2}$$

$$\text{با } M_3'' = \sqrt{\frac{1 - p_1''^2 - p_2''^2 - p_3''^2 + 2p_1'' p_2'' p_3''}{1 - p_1''^2}}$$

$$\text{و } p_2'' = \langle \gamma'' | \beta'' \rangle, \quad p_1'' = \langle \alpha'' | \beta'' \rangle$$

$$\text{در } p_3'' = \langle \gamma'' | \alpha'' \rangle \text{ با جای‌گذاری روابط ۱۹ و ۲۰}$$

رابطه ۱۸، فرم سه کیوبیتی حالت تحول‌یافته به‌صورت

زیر به‌دست می‌آید:

از سوی دیگر برای یافتن سنجۀ تلاقی حالت تحول

یافته، اثر  $\hat{U}(\theta, \varphi)$  بر روی عملگرهای  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  را

به‌دست می‌آوریم که عبارتند از:

$$\hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} = e^{-i\frac{\theta}{2}} (\hat{a} \cos \frac{\theta}{2} - \hat{b} \sin \frac{\theta}{2}), \quad 17$$

$$\hat{U}^\dagger \hat{b} \hat{U} = e^{i\frac{\theta}{2}} (\hat{b} \cos \frac{\theta}{2} + \hat{a} \sin \frac{\theta}{2}),$$

که در آن از لم بیکر-هاسدورف استفاده کرده‌ایم.

بنابراین  $|\Psi(0)\rangle$  به‌صورت زیر تحول می‌یابد:

۱۸

$$|\Psi(\theta, \varphi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \{ |\alpha'\rangle |\alpha''\rangle + \mu_1 |\beta'\rangle |\beta''\rangle + \mu_2 |\gamma'\rangle |\gamma''\rangle \},$$

$$\text{که در آن } \alpha' \equiv \alpha e^{-i\frac{\theta}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2})$$

$$, \alpha'' \equiv \alpha e^{i\frac{\theta}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2})$$

$$, \beta' \equiv \beta e^{-i\frac{\theta}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2})$$

$$, \beta'' \equiv \beta e^{i\frac{\theta}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2})$$

$$, \gamma' \equiv \gamma e^{-i\frac{\theta}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2})$$

$$. \gamma'' \equiv \gamma e^{i\frac{\theta}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2})$$

با فرض اینکه مجموعه  $\{|\alpha'\rangle, |\beta'\rangle, |\gamma'\rangle\}$  مستقل

خطی است یک زیر فضای سه بعدی از فضای هیلبرت

با پایه‌های اورتونرمال  $\{|0'\rangle, |1'\rangle, |2'\rangle\}$  را به‌صورت

زیر جاروب می‌کند:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(\theta, \varphi)\rangle = & \frac{1}{\sqrt{N}} \{ (1 + \mu_1 p'_1 p''_1 + \mu_2 p'_3 p''_3) |0'0''\rangle + \\
 & (\mu_1 p'_1 M''_1 - \mu_2 p'_3 M''_2) |0'1''\rangle + \\
 & (\mu_1 p''_1 M'_1 - \mu_2 p''_3 M'_2) |1'0''\rangle + \\
 & (\mu_1 M'_1 M''_1 + \mu_2 M'_2 M''_2) |1'1''\rangle + \\
 & \mu_2 p'_3 M''_3 |0'2''\rangle + \mu_2 p''_3 M'_3 |2'0''\rangle + \\
 & \mu_2 M'_2 M''_3 |1'2''\rangle + \mu_2 M'_3 M''_2 |2'1''\rangle + \\
 & \mu_2 M'_3 M''_3 |2'2''\rangle \},
 \end{aligned}$$

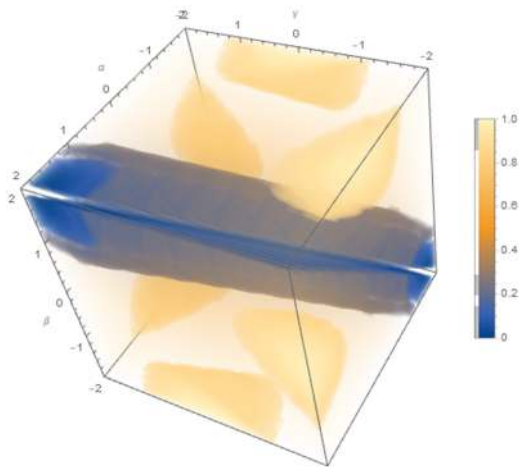
بنابراین با استفاده از رابطه ۱۵ سنجه تلافی برای حالت تحول یافته برابر است با:

$$\begin{aligned}
 C(|\Psi(\theta, \varphi)\rangle) = & \frac{2}{N} (|\mu_1 M'_1 M''_1 + \mu_2 M'_2 M''_2 + \mu_1 \mu_2 (p''_1 M''_2 - p''_3 M''_1)(p'_1 M'_2 - p'_3 M'_1)|^2 + \\
 & |\mu_2 M'_2 M''_3 + \mu_1 \mu_2 p'_1 M''_3 (p'_1 M'_2 - p'_3 M'_1)|^2 + |\mu_1 \mu_2 M''_1 M''_3 (p'_1 M'_2 - p'_3 M'_1)|^2 + \\
 & |\mu_2 M'_3 M''_2 + \mu_1 \mu_2 p'_1 M''_3 (p''_1 M''_2 - p''_3 M''_1)|^2 + |\mu_2 M'_3 M''_3 (1 + \mu_1 p'_1 p''_1)|^2 + |\mu_1 \mu_2 p'_1 M''_3 M''_1 M''_3|^2 + \\
 & |\mu_1 \mu_2 M'_1 M''_3 (p''_1 M''_2 - p''_3 M''_1)|^2 + |\mu_1 \mu_2 p''_1 M''_1 M''_3 M''_3|^2 + |\mu_1 \mu_2 M'_1 M''_3 M''_1 M''_3|^2)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

مختلف العلامت باشند، سنجه تلافی در  $\theta = 0, \pi$  بیشینه مقدار خود یعنی  $C(|\Psi(\theta, \varphi)\rangle) = 1.154$  را دارد. برای مقایسه فاز هندسی با سنجه تلافی، قدرمطلق فاز هندسی برحسب  $\theta$  در شکل ۳ قسمت ب نشان داده شده است. می توان مشاهده کرد که تغییرات سنجه تلافی و فاز هندسی نسبت به  $\theta$ ، عکس یکدیگر است، یعنی افزایش یکی با کاهش دیگری همراه است. نمودارهای شکل ۳ به ازای  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  و مقادیر مشخصی از  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  رسم شده است اما این نتایج به ازای تمام مقادیر مختلف برای  $\mu_1$ ،  $\mu_2$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  نیز برقرار است. زمانی که حالت هم‌دوس بیشینه مقدار درهم تنیدگی را دارد فاز هندسی آن کمترین مقدار را دارد و برعکس وقتی که حالت هم‌دوس جداپذیر است فاز هندسی بیشینه مقدار را دارد.

سنجه تلافی حالت تحول یافته مستقل از  $\varphi$  و وابسته به  $\theta$  می‌باشد که اگر  $\theta = 0$  باشد عملگر تحول به یک عملگر موضعی یعنی  $\hat{U}(\theta = 0, \varphi) = e^{-i\varphi \hat{I}_z}$  تبدیل می‌شود و تحول‌های موضعی میزان درهم تنیدگی حالت را تغییر نمی‌دهند، در نتیجه  $C(|\Psi(\theta, \varphi)\rangle) = C(|\Psi(\theta)\rangle)$  نمودار الف در شکل ۳، اثر  $\theta$  را بر روی سنجه تلافی نشان می‌دهد. در این نمودار سنجه تلافی برحسب  $\theta$  برای  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  و به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  رسم شده است. نمودار نشان می‌دهد که به ازای مقادیر مشخص برای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$ ، سنجه تلافی در  $\theta = 0$  بیشینه مقدار خود را دارد، با افزایش  $\theta$  از ۰ تا  $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار سنجه تلافی کاهش یافته و در  $\frac{\pi}{2}$  به صفر می‌رسد سپس با افزایش  $\theta$  از  $\frac{\pi}{2}$  تا  $\pi$  افزایش یافته و در  $\pi$  دوباره به بیشینه مقدار خود می‌رسد. وقتی مقدار  $\gamma$  نزدیک به صفر و مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  بزرگتر و





شکل ۴. مقدار سنجه تلافی حالت تحول یافته به ازای کمیت‌های

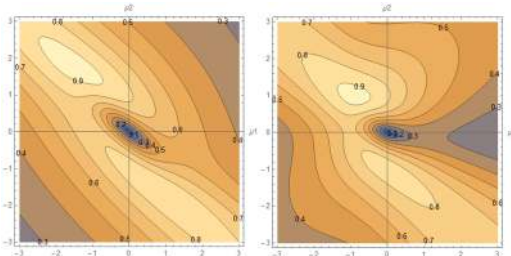
$$\alpha, \beta \text{ و } \gamma \text{ برای } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ و } \mu_1 = \mu_2 = 1.$$

نمودار کانتوری سنجه تلافی برحسب  $\mu_1$  و  $\mu_2$  برای

$\theta = \frac{\pi}{4}$  و مقادیر مختلف  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  در شکل ۵

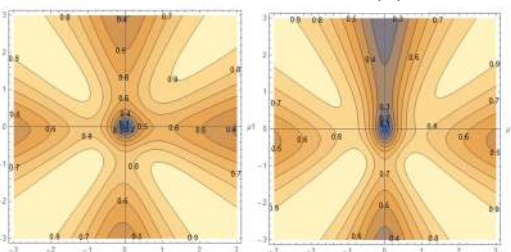
نشان داده شده است. مقدار سنجه تلافی به ازای مقادیر

کوچک  $\mu_1$  و  $\mu_2$ ، نزدیک به صفر است.



(الف)

(ب)



(پ)

(ت)

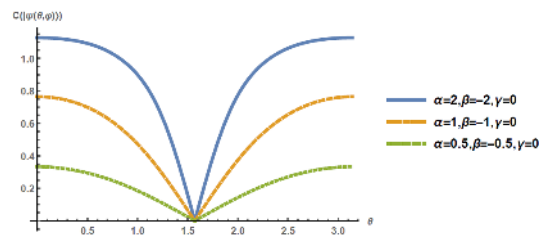
شکل ۵. نمودار کانتوری سنجه تلافی برحسب  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به ازای

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

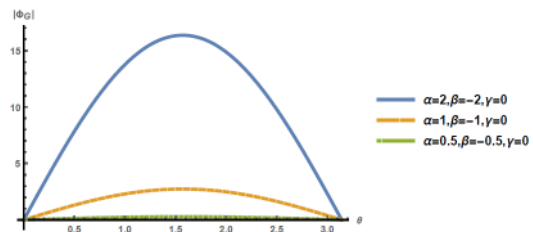
الف:  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2$ . ب:  $\alpha = -0.5, \beta = 1$ ,

$\gamma = 1.5$ . پ:  $\alpha = -0.5, \beta = -2, \gamma = 1$ . ت:  $\alpha = -0.5$ ,

$\beta = 1.5, \gamma = -1.5$ .



(الف)



(ب)

شکل ۳. الف: سنجه تلافی و ب: قدر مطلق فاز هندسی برحسب

$\theta$  به ازای  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  و مقادیر مختلف  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$ .

مقدار سنجه تلافی به ازای کمیت‌های  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$

برای حالت خاص  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، در

شکل ۴ نشان داده شده است. در نزدیکی خط

$\alpha = \beta = \gamma$ ، مقدار سنجه تلافی نزدیک به صفر است.

وقتی مقدار یکی از کمیت‌های  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$ ، نزدیک

صفر و مقدار دو کمیت دیگر بزرگ و مختلف‌العلامت

باشد (نواحی‌ای که در شش یال مکعب قرار دارند)،

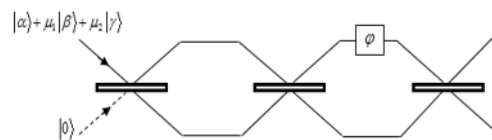
آنگاه میزان درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد.

## مدل تجربی برای تولید حالت همدوس درهم‌تنیده کیوتريت گونه

شکل ۶، تداخل‌سنجی را برای تولید حالت همدوس درهم‌تنیده کیوتريت گونه تحول‌یافته نشان می‌دهد. تداخل‌سنج از شکافنده‌های پرتو و جابه‌جایی فاز تشکیل شده است. هر بخش تداخل‌سنج ماخ-زندر را می‌توان به صورت چرخش در فضای سه بعدی برحسب عملگرهای  $\hat{J}_x$ ،  $\hat{J}_y$  و  $\hat{J}_z$  نمایش داد [۴۱] و [۴۲]. به‌طور مثال، اگر در یک تداخل‌سنج ماخ-زندر استاندارد اثر شکافنده پرتو و جابه‌جایی فاز را به ترتیب به صورت چرخشی حول محور  $x$  به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{2}$  یعنی  $e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x}$  و چرخشی حول محور  $z$  به اندازه زاویه  $\varphi$  یعنی  $e^{-i\varphi\hat{J}_z}$  در نظر بگیریم، عملگر تداخل‌سنج ماخ-زندر  $\hat{U}_{MZI}$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{U}_{MZI} = e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} e^{-i\varphi\hat{J}_z} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x}, \quad (23)$$

که در آن شکافنده پرتوها را 50:50 فرض کرده‌ایم. عملگر  $\hat{U}_{MZI}$  را با استفاده از رابطه می‌توان  $e^{\alpha\hat{A}} f(\hat{B}) e^{-\alpha\hat{A}} = f(e^{\alpha\hat{A}} \hat{B} e^{-\alpha\hat{A}})$  به صورت چرخشی حول محور  $y$  به اندازه زاویه  $\varphi$  یعنی  $e^{-i\varphi\hat{J}_y}$  در نظر گرفت.



شکل ۶. دستگاه تداخل‌سنج برای تولید حالت همدوس درهم‌تنیده دو بخشی کیوتريت گونه.

برای تولید حالت همدوس درهم‌تنیده دو بخشی کیوتريت گونه ما نیاز به برهم نهی حالت‌های همدوس داریم، روش تولید برهم‌نهی حالت‌های همدوس به صورت نظری در [۴۳-۴۷] و [۳۴] و به صورت تجربی در [۴۸،۴۹] بررسی شده است. در تداخل‌سنج شکل ۶، یکی از پرتوهای ورودی را یک برهم‌نهی از حالت‌های همدوس یعنی  $|\alpha\rangle + \mu_1|\beta\rangle + \mu_2|\gamma\rangle$  و ورودی دیگر را حالت خلاً یعنی  $|0\rangle$  در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

۲۴

$$|input\rangle = (|\alpha\rangle_1 + \mu_1|\beta\rangle_1 + \mu_2|\gamma\rangle_1) \otimes |0\rangle_2.$$

با فرض اینکه شکافنده پرتو اول بیانگر چرخشی حول محور  $y$  به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{2}$  باشد، آنگاه اثر شکافنده پرتو اول بر روی حالت ورودی باعث تولید حالت همدوس کیوتريت گونه به صورت زیر می‌شود [۳۵]:

۲۵

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_y} |input\rangle = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle + \mu_1 \left| \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle + \mu_2 \left| \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right\rangle.$$

سپس با اثر  $\hat{U}_{MZI}$  بر روی حالت همدوس ایجاد شده حالت خروجی به صورت زیر به دست می‌آید:

۲۶

$$|output\rangle = e^{-i\varphi\hat{J}_y} \left( \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle + \mu_1 \left| \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle + \mu_2 \left| \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right\rangle \right).$$

[3] Y. Aharonov, J. Anandan, Phase change during a cyclic quantum evolution, *Physical Review Letters* **58** (1987) 1593. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1593>

[4] A. Uhlmann, Parallel transport and quantum holonomy along density operators, *Reports on Mathematical Physics* **24** (1986) 229-240. [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(86\)90055-8](https://doi.org/10.1016/0034-4877(86)90055-8)

[5] E. Sjöqvist, Geometric phase for entangled spin pairs, *Physical Review A* **62** (2000) 022109. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.022109>

[6] J. Samuel, R. Bhandari, General setting for berry's phase, *Physical Review Letters* **60** (1988) 2339. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.2339>

[7] A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M.F. Santos, V. Vedral, Geometric phase in open systems, *Physical review letters* **90** (2003) 160402. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.160402>

[8] R.S. Whitney, Y. Gefen, Berry phase in a nonisolated system, *Physical review letters* **90** (2003) 190402. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.190402>

[9] D. Tong, E. Sjöqvist, L.C. Kwek, C.H. Oh, Kinematic approach to the mixed state geometric phase in nonunitary evolution, *Physical review letters* **93** (2004) 080405. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.080405>

[10] P. Zanardi, M. Rasetti, Holonomic quantum computation, *Physics Letters A* **264** (1999) 94-99. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(99\)00803-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00803-8)

[11] J.A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, G. Castagnoli, Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance, *Nature* **403** (2000) 869-871. <https://doi.org/10.1038/35002528>

[12] S.-L. Zhu, Z. Wang, Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic geometric phases, *Physical review letters* **89** (2002) 097902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.097902>

## بحث و نتیجه گیری

در این مقاله یک برهم‌نهی کوآنتومی از حالت‌های همدوس خالص دو بخشی کیوتريت گونه را در نظر گرفته‌ایم. فاز هندسی دوره‌ای را برای حالت همدوس درهم‌تنیده تحت تحول یکانی محاسبه کرده‌ایم. حالت همدوس درهم‌تنیده دو بخشی کیوتريت گونه را به فرم سه کیوبیتی نوشته‌ایم و با استفاده از سنجه تلافی برای حالت‌های دو بخشی، میزان درهم‌تنیدگی آن را محاسبه کرده‌ایم. نشان داده‌ایم که سنجه تلافی حالت تحول یافته مستقل از  $\varphi$  است. به علاوه با مقایسه فاز هندسی و میزان درهم‌تنیدگی مشاهده کردیم که تغییرات فاز هندسی و سنجه تلافی نسبت به یکی از پارامترهای تحول، رفتار معکوسی دارند، بدین معنی که افزایش یکی با کاهش دیگری همراه است (شکل ۳). این نتیجه، نشان‌دهنده این است که فاز هندسی می‌تواند شاهدهی برای درهم‌تنیدگی حالت همدوس کیوتريت گونه باشد. از این‌رو، این نتیجه می‌تواند پیامدهای عملی مهمی برای علم نظریه اطلاعات کوآنتومی داشته باشد. در آخر با استفاده از تداخل سنج، یک طرح تجربی برای تولید حالت همدوس درهم‌تنیده دو بخشی کیوتريت گونه ارائه داده‌ایم.

## مرجع‌ها

[1] M.V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, *Proceedings of the Royal Society of London, A, Mathematical and Physical Sciences* **392** (1984) 45-57. <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023>

[2] F. Wilczek, A. Zee, Appearance of gauge structure in simple dynamical systems, *Physical Review Letters* **52** (1984) 2111-2114. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.2111>

- Journal of Quantum Information* **1** (2002) 1-23.  
<https://doi.org/10.1142/S0219749903000024>
- [23] E. Sjöqvist, A new phase in quantum computation, *Department of quantum chemistry, Sweden* **1** (2008).  
<https://doi.org/10.1103/Physics.1.35>
- [24] A. Ekert, M. Ericsson, P. Hayden, H. Inamori, J.A. Joens, D.K.L. Oi, V. Vedral, Geometric quantum Computation, *Journal of Modern Optics* **47** (2000) 2501-2513.  
<https://doi.org/10.1080/09500340008232177>
- [25] E. Sjöqvist, Geometric phases in quantum information, *International Journal of Quantum Chemistry* **115** (2015) 1311-1326.  
<https://doi.org/10.1002/qua.24941>
- [26] D. Tong, L. Kwek, C. Oh, Geometric phase for entangled states of two spin-1/2 particles in rotating magnetic field, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** (2003) 1149.  
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/4/320>
- [27] D. Tong, E. Sjöqvist, L. Kwek, C. Oh, M. Ericsson, Relation between geometric phases of entangled bipartite systems and their subsystems, *Physical Review A* **68** (2003) 022106.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.022106>
- [28] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der mikro-zur makromechanik, *Naturwissenschaften* **14** (1926) 664-666.  
<https://doi.org/10.1007/BF01507634>
- [29] S. Chaturvedi, M. Sriram, V. Srinivasan, Berry's phase for coherent states, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **20** (1987) 1071. <https://doi.org/10.1007/BF02742688>
- [30] A.K. Pati, Geometric aspects of noncyclic quantum evolutions, *Physical Review A* **52** (1995) 2576.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.2576>
- [31] D.-B. Yang, Y. Chen, F.-L. Zhang, J.-L. Chen, Geometric phases for nonlinear coherent and squeezed states, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **44**
- [13] V. Vedral, Geometric phases and topological quantum computation, *International Journal of Quantum Information* **1** (2003) 1-23.  
<https://doi.org/10.1142/S0219749903000024>
- [14] E. Rowell, Z. Wang, Mathematics of topological quantum computing, *Bulletin of the American Mathematical Society* **55** (2018) 183-238.  
<https://doi.org/10.1090/bull/1605>
- [15] S. Tiwari, Geometric phase in optics: Quantal or classical?, *Journal of Modern Optics* **39** (1992) 1097-1105.  
<https://doi.org/10.1080/09500349214551101>
- [16] E.J. Galvez, Applications of geometric phase in optics, *Recent Research Developments in Optics* **2** (2002) 165-182.
- [17] A. Morpurgo, J. Heida, T. Klapwijk, B. Van Wees, G. Borghs, Ensemble-average spectrum of aharonov-bohm conductance oscillations: evidence for spin-orbit-induced berry's phase, *Physical review letters* **80** (1998) 1050.
- [18] Q. Niu, X. Wang, L. Kleinman, W.-M. Liu, D. Nicholson, G. Stocks, Adiabatic dynamics of local spin moments in itinerant magnets, *Physical review letters* **83** (1999) 207.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.207>
- [19] A.C. Carollo, J.K. Pachos, Geometric phases and criticality in spin-chain systems, *Physical review letters* **95** (2005) 157203.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.157203>
- [20] S.-L. Zhu, Scaling of geometric phases close to the quantum phase transition in the x y spin chain, *Physical review letters* **96** (2006) 077206.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.077206>
- [21] G. Najarbashi, B. Seifi, Quantum phase transition in the dzyaloshinskii-moriya interaction with inhomogeneous magnetic field: Geometric approach, *Quantum Information Processing* **16** (2017) 1-16.
- [22] V. Vedral, Geometric phases and topological quantum computation, *International*

- coherent states: non-classicality and entanglement, *Quantum Information Processing* **18** (2019) 1-16.  
<https://doi.org/10.1007/s11128-019-2216-7>
- [39] X. Wu, S.P. Jia, C.L. Cai, L.M. Kuang, Witnessing entanglement via the geometric phase in a impurity-doped Bose-Einstein condensate, (2021).  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.00224>
- [40] S.J. Akhtarshenas, Concurrence vectors in arbitrary multipartite quantum systems, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005) 6777.  
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/30/011>
- [41] B. Yurke, S.L. McCall, J.R. Klauder, Su (2) and su (1, 1) interferometers, *Physical Review A* **33** (1986) 4033.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.4033>
- [42] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Jarzyna, J. Kołodyński, Quantum limits in optical interferometry, *Progress in Optics* **60** (2015) 345-435.  
<https://doi.org/10.1016/bs.po.2015.02.003>
- [43] S. Mirzaei, G. Najarbashi, One-mode wigner quasi-probability distribution function for entangled coherent states generated by beam splitter and cavity QED, *Reports on Mathematical Physics* **83** (2019) 1-20.  
[https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(19\) 30020 -5](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(19) 30020 -5)
- [44] A. Messina, B. Militello, A. Napoli, Generation of Glauber coherent state superpositions via unitary transformations. *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* **50**. No. Part 2. (2004).
- [45] A.P. Lund, et al., Conditional production of superpositions of coherent states with inefficient photon detection, *Physical Review A* **70** (2004) 020101.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.020101>
- [46] H. Jeong, A.P. Lund, T.C. Ralph, Production of superpositions of coherent states in traveling (2011) 075502.  
<https://doi.org/10.1088/0953-4075/44/7/ 075502>
- [32] A. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Physical Review Letters* **67** (1991) 661.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661>
- [33] C.H. Bennett, H.G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Physical Review Letters* **70** (1993) 1895.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895>
- [34] G. Najarbashi, S. Mirzaei, Comparison of qubit and qutrit like entangled squeezed and coherent states of light, *Optics Communications* **377** (2016) 33-40.  
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2016.04.068>
- [34] G. Najarbashi, S. Mirzaei, Noise effects on entangled coherent state generated via atom-field interaction and beam splitter, *International Journal of Theoretical Physics* **55** (2016) 2311-2323.  
<https://doi.org/10.1007/s10773-015-2869-7>
- [35] G. Najarbashi, S. Mirzaei, Entanglement of multi-qutrit states constructed by linearly independent coherent states: Balanced case, *International Journal of Theoretical Physics* **55** (2016) 1336-1353.  
<https://doi.org/10.1007/s10773-015-2775-z>
- [36] B. Mojaveri, A. Dehghani, R. Jafarzadeh Bahrbeig, Enhancing entanglement of entangled coherent states via a f-deformed photon-addition operation, *The European Physical Journal Plus* **134** (2019) 1-8.  
<https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12823-7>
- [37] A. Dehghani, B. Mojaveri, A.A. Alenabi, Photon added qutrit like entangled coherent states of light, *Journal of Research on Many-body Systems* **11** (2022) 37-50.  
<https://doi.org/10.22055/JRMBS.2021.17268>
- [38] A. Dehghani, B. Mojaveri, M. Aryaie, A.A. Alenabi, Superposition of two-mode “Near”

optical fields with inefficient photon detection, *Physical Review A* **72** (2005) 013801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.013801>

[47] S. Glancy, H.M. de Vasconcelos, Methods for producing optical coherent state superpositions, *JOSA B* **25** (2008) 712-733. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.25.000712>

[48] H. Takahashi, et al., Generation of large-amplitude coherent-state superposition via ancilla-assisted photon subtraction, *Physical review letters* **101** (2008) 233605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.233605>

[49] T. Gerrits, et al., Generation of optical coherent-state superpositions by number-resolved photon subtraction from the squeezed vacuum, *Physical Review A* **82** (2010) 031802. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.031802>