

Entanglement and squeezing of two-dimensional spin square lattice in the ground state in a magnetic field

Noushin Zalaki Ghorbanpour¹, Abbaas Sabour^{*,2}, Fereydoon Khazali¹,
Soghra Ghanavati²

¹Department of Chemistry, Omidiyeh Branch, Islamic Azad University, Omidiyeh, Iran

²Department of Physics, Omidiyeh Branch, Islamic Azad University, Omidiyeh, Iran

Received: 11.10.2022 Final revision: 06.07.2022 Accepted: 20.07.2022

Doi: [10.22055/jrmbms.2022.17905](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2022.17905)

Abstract

In this study, spin squeezing was calculated for two common square systems in terms of the system variables using the Kitagawa parameter, and the entanglement of these systems was compared based on the Meyer–Wallach and LE measures. The calculations showed a certain relationship between the Kitagawa parameter and the Meyer–Wallach measure in the two square systems. The correlation between squeezing and the Meyer–Wallach measure remains unchanged in cases where squeezing is dependent on the interaction between the sites. No correlation was found between entanglement in terms of the LE measure and squeezing in the studied systems. However, in one of the systems, a weak correlation was observed between them.

Keywords: Spin squeezing, Kitagawa parameter, entanglement, LE measure, square system

* Corresponding Author: abbaassabour@gmail.com



درهم‌تندگی و فشردگی در حالت پایه در یک شبکه مربعی اسپینی در حضور میدان مغناطیسی

نوشین زلکی قربان‌پور^۱، عباس صبور^{۲*}، فریدون خضعلی^۱، صغری فنواتی^۲

^۱گروه شیمی، واحد امیدیه، دانشگاه آزاد اسلامی، امیدیه، ایران

^۲گروه فیزیک، واحد امیدیه، دانشگاه آزاد اسلامی، امیدیه، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۱۹ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۰۴/۱۵ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۹

Doi: [10.22055/jrmbms.2022.17905](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2022.17905)

چکیده

در این پژوهش فشردگی اسپینی برای دو سیستم مربعی رایج، با پارامتر کیتاگوا و برحسب متغیرهای سیستم، محاسبه شده و با درهم‌تندگی این سیستم‌ها برحسب دو سنجه میر-والاش و LE ، مقایسه شد. محاسبات نشان داد که در این سیستم‌ها رابطه مشخصی بین پارامتر کیتاگوا و سنجه میر-والاش وجود دارد و در مواردی که فشردگی به میزان برهم‌کنش بین سایت‌ها وابسته است در همبستگی بین فشردگی و سنجه میر-والاش تغییری ایجاد نمی‌شود. همچنین هیچگونه همبستگی مابین میزان درهم‌تندگی برحسب سنجه LE و فشردگی در سیستم‌های مورد بررسی به دست نیامد. با این حال، در یکی از سیستم‌ها همبستگی ضعیفی بین آنها مشاهده شد.

کلیدواژگان: فشردگی اسپینی، پارامتر کیتاگوا، درهم‌تندگی، سنجه درهم‌تندگی موضع‌پذیر، سیستم مربعی

مقدمه

جلب کرده است [۶-۸]. فشردگی اسپینی برای مطالعه همبستگی و درهم‌تندگی بین ذرات [۹،۱۰]، افزایش دقت اندازه‌گیری در آزمایش‌ها [۷،۸،۱۱،۱۲]، انجام فرآیندهای محاسبات کوانتومی [۹،۱۰] و شبیه‌سازی‌های کوانتومی [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است. رایجترین پارامتر فشردگی توسط کیتاگوا و یودا پیشنهاد شده است [۱۴]. نشان داده شده است که پارامتر فشردگی کیتاگوا و یودا را می‌توان برای تشخیص درهم‌تندگی بین دو جزء در یک سیستم چند جزئی با اسپین $1/2$ استفاده کرد [۱۵،۱۶].

در این مقاله قصد داریم برای دو سیستم چهار جزئی رایج، درهم‌تندگی کل سیستم را با دو سنجه مختلف، یعنی سنجه معروف و رایج میر-والاش [۱۷،۱۸]، معروف به درهم‌تندگی گلوبال، و سنجه کمتر شناخته

یافتن حالت پایه هامیلتونی یک سیستم چند کیوبیتی و ویژگی‌های فیزیکی آنها در فیزیک ماده چگال، نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی بسیار مهم است [۱،۲]. از طرفی با ابداع کاربردهای فراوان و شگفت‌انگیز درهم‌تندگی کوانتومی در اطلاعات و محاسبات کوانتومی، این شاخه نسبتاً جدید به قلمروهای دیگر علوم، از جمله گذار فاز کوانتومی، وارد شده است [۳،۴]. با کشف ارتباط نسبتاً نزدیک بین درهم‌تندگی و فشردگی در یک سیستم چند جزئی، استفاده از انواع پارامترهای فشردگی برای مطالعه درهم‌تندگی مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. در دو دهه اخیر، فشردگی اسپینی از نظر تئوری و عملی توجه زیادی را به خود

* نویسنده مسئول: abbaassabour@gmail.com

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کربنیو کامنز تخصصی ۴.۰ بین‌المللی می‌باشد



$$H^{\circ} = J_1(\sigma_x^1\sigma_x^2 + \sigma_y^1\sigma_y^2 + \sigma_x^3\sigma_x^4 + \sigma_y^3\sigma_y^4) \\ + J_2(\sigma_x^1\sigma_x^4 + \sigma_y^1\sigma_y^4 + \sigma_x^2\sigma_x^3 + \sigma_y^2\sigma_y^3) \\ + B(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3 + \sigma_z^4) = J_1 h^{\circ}$$

$$h^{\circ} := (\sigma_x^1\sigma_x^2 + \sigma_y^1\sigma_y^2 + \sigma_x^3\sigma_x^4 + \sigma_y^3\sigma_y^4) \\ + j(\sigma_x^1\sigma_x^4 + \sigma_y^1\sigma_y^4 + \sigma_x^2\sigma_x^3 + \sigma_y^2\sigma_y^3) \quad ۱ \\ + b(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3 + \sigma_z^4)$$

در روابط بالا، اندیس \circ به معنی یک حلقه بدون اندرکنش قطری می‌باشد. این هامیلتونی به اندرکنش هایزنبرگ XX معروف است [۲۱]. در رابطه اول J_1 و J_2 به ترتیب شدت اندرکنش بین جفت سایت‌های افقی و جفت سایت‌های عمودی است؛ B هم متناسب با میدان مغناطیسی در جهت z بر روی کل سیستم می‌باشد. این پارامترها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. در رابطه دوم، که در واقع متناسب با هامیلتونی و بدون بعد می‌باشد، $j = J_2/J_1$ و $b = B/J_1$ تعریف شده که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. σ_{α}^i ها هم ماتریس‌های پائولی سایت i ام در جهت W هستند. واضح است که حالت‌های ویژه H° و h° ، و البته مقادیر ویژه آنها به جز یک ضریب J_1 ، یکی هستند. ویژگی‌های سیستم‌های چند جزئی و طبقه‌بندی آنها در [۲۱] توضیح داده شده است.

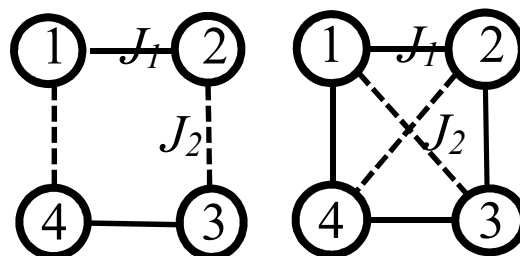
با توجه به اینکه هامیلتونی را به صورت شناخته شده و رایج ضرب مستقیم ماتریس‌های پائولی آورده‌ایم، و دیدن شکل گسترده آن مزیتی ندارد، از آوردن آن اجتناب کرده‌ایم. همچنین از آنجایی که ما به دنبال حالت پایه (با کمترین مقدار ویژه انرژی)، به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای b و j هستیم، آوردن همه آنها غیر ضروری است و فقط حجم مقاله را افزایش می‌دهد؛ بنابراین فقط آنهایی را می‌آوریم که در بازه‌های خاصی از پارامترهای b و j به حالت پایه تبدیل خواهند شد:

$$\lambda_1^{\circ} = -4\sqrt{1+j^2}$$

شده LE [۱۹] (البته سنج‌های زیادی، مثلاً سنجه ژئومتریک [۲۰]، برای این کار معرفی شده‌اند که معمولاً محاسبات آنالیتیک برای آنها بسیار دشوار است)، و البته پارامتر فشردگی کیتاگوا و یودا برحسب پارامترهای هامیلتونی سیستم به دست آوریم و ارتباط آنها را بررسی کنیم. دلیل انتخاب این سیستم‌های خاص، به جز اینکه نسبتاً رایج هستند این است که جواب سنج‌های درهم‌تنیدگی و پارامتر فشردگی در حالت پایه آنها را می‌توان به صورت صریح و تابعی از پارامترها به دست آورد (البته با محاسبات بسیار مفصل)؛ بنابراین مقایسه نتایج آنها نسبتاً ساده خواهد بود.

هامیلتونی

دو نوع رایج شبکه مربعی اسپینی هایزنبرگی (یعنی با برهم‌کنش بین سایت‌های همسایه [۲۱]) در شکل ۱ نشان داده شده است. در نوع الف (شکل سمت چپ)، برهم‌کنش بین جفت سایت‌های افقی با جفت سایت‌های عمودی متفاوت است و برهم‌کنشی بین جفت سایت‌های قطری وجود ندارد. این سیستم در واقع نماینده یک سیستم مربعی ناهمسانگرد می‌باشد. در نوع ب (شکل سمت راست)، برهم‌کنش بین جفت سایت‌های افقی و عمودی با جفت سایت‌های قطری متفاوت است. این سیستم در واقع نماینده یک سیستم مربعی همسانگرد می‌باشد.



شکل ۱. نمای اندرکنش‌های رایج یک شبکه مربعی.

هامیلتونی سیستم الف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

حالت‌های ویژه متناظر با آنها (در بازه‌های خاصی از پارامترهای b و j به حالت پایه تبدیل خواهند شد) عبارتند از:

$$\lambda_1^\otimes = -4b$$

$$\lambda_2^\otimes = -4j$$

$$\lambda_3^\otimes = 2(j - \sqrt{8 + j^2})$$

$$\lambda_4^\otimes = 2(-2 - b + j)$$

$$\tilde{\chi}_1^\otimes = |0000\rangle$$

$$\tilde{\chi}_2^\otimes = |1100\rangle - |1001\rangle - |0110\rangle + |0011\rangle$$

$$\tilde{\chi}_3^\otimes = |1100\rangle - 0.5(j + \sqrt{8 + j^2})|1010\rangle$$

$$+ |1001\rangle + |0110\rangle$$

$$- 0.5(j + \sqrt{8 + j^2})|0101\rangle + |0011\rangle$$

$$\tilde{\chi}_4^\otimes = -|1000\rangle + |0100\rangle - |0010\rangle + |0001\rangle$$

در این مورد هم ضرایب حالت‌های ویژه به پارامتر b وابسته نیستند.

سنجه‌های درهم‌تنیدگی برای کل سیستم درهم‌تنیدگی چند جزئی میر-والاش و اسکات

اسکات در سال ۲۰۰۴ یک سنجه درهم‌تنیدگی برای سیستم‌های چند جزئی کیوبیتی در حالت خالص به صورت زیر معرفی کرد [۱۸]:

$$Q_m := \binom{N}{m}^{-1} \sum_{n=1}^m \frac{1 - \text{Tr}(\rho_{m,n}^2)}{1 - 2^{-m}} \quad \gamma$$

$$\lambda_2^\circ = 2(-1 - b - j)$$

$$\lambda_3^\circ = -4b$$

$$\tilde{\chi}_1^\circ = |1100\rangle - \sqrt{1 + j^{-2}}|1010\rangle + j^{-1}|1001\rangle + j^{-1}|0110\rangle - \sqrt{1 + j^{-2}}|0101\rangle + |0011\rangle$$

$$\tilde{\chi}_2^\circ = -|1000\rangle + |0100\rangle - |0010\rangle + |0001\rangle$$

$$\tilde{\chi}_3^\circ = |0000\rangle$$

در روابط بالا، λ_i ها مقادیر ویژه و $\tilde{\chi}_i$ ها حالت‌های ویژه بهنجار نشده متناظر هستند که بر اساس پایه‌های محاسباتی عملگر σ_z نوشته شده‌اند. به وضوح، ضرایب حالت‌های ویژه به پارامتر b وابسته نیستند.

هامیلتونی سیستم B را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H^\otimes = J_1(\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \sigma_x^3 + \sigma_y^2 \sigma_y^3 + \sigma_x^3 \sigma_x^4 + \sigma_y^3 \sigma_y^4 + \sigma_x^1 \sigma_x^4 + \sigma_y^1 \sigma_y^4) + J_2(\sigma_x^1 \sigma_x^3 + \sigma_y^1 \sigma_y^3 + \sigma_x^2 \sigma_x^4 + \sigma_y^2 \sigma_y^4) + B(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3 + \sigma_z^4) = J_1 h^\otimes$$

$$h^\otimes := (\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^1 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \sigma_x^3 + \sigma_y^2 \sigma_y^3 + \sigma_x^3 \sigma_x^4 + \sigma_y^3 \sigma_y^4 + \sigma_x^1 \sigma_x^4 + \sigma_y^1 \sigma_y^4) + j(\sigma_x^1 \sigma_x^3 + \sigma_y^1 \sigma_y^3 + \sigma_x^2 \sigma_x^4 + \sigma_y^2 \sigma_y^4) + b(\sigma_z^1 + \sigma_z^2 + \sigma_z^3 + \sigma_z^4)$$

در روابط بالا، اندیس \otimes به معنی یک حلقه با اندرکنش قطری می‌باشد و در رابطه اول J_1 و J_2 به ترتیب شدت اندرکنش بین جفت سایت‌های افقی و عمودی، و جفت سایت‌های قطری است و برای ساده‌سازی در این سیستم، مثبت انتخاب شده‌اند. B, j, b و σ_w^i هم تعریف قبلی را دارند. رابطه دوم هم مشخصاتی مانند رابطه دوم در سیستم قبلی دارد. مقادیر ویژه مهم و

متوسط درهم‌تندگی بین جفت مورد نظر را نسبت به همه مجموعه‌های خروجی‌های ممکن برای اندازه‌گیری‌های موضعی بیشینه می‌کنیم [۲۳]. فرآیند محاسبه ریاضی $LE_{1,4}$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

اگر $|\psi\rangle$ حالت سیستم چهار اسپینی باشد، تنظیم دستگاه‌های اندازه‌گیری (چرخاندن آنها) بر روی دو سایت 2 و 3 معادل است با اعمال عملگر یکانی موضعی $U_{2,3} = 1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes 1$ بر حالت سیستم؛ همچنین اندازه‌گیری بر روی سایت‌های 2 و 3 و حاصل شدن نتیجه J_2 و J_3 معادل است با اعمال عملگر تصویر $1 \otimes |j_3\rangle\langle j_3| \otimes |j_2\rangle\langle j_2| \otimes 1$. بنابراین، بر اثر تنظیم دستگاه‌های اندازه‌گیری موضعی و انجام آن، سایت‌های 2 و 3 با احتمال مشخصی به حالت‌های ویژه متناظر با مقادیر ویژه خاص می‌روند؛ و فقط سایت‌های 1 و 4 با هم درهم‌تندیده می‌مانند. سیستم با احتمال $P_{j_2 j_3}^{U_{2,3}} = \langle \tilde{\psi}_{j_2 j_3}^{U_{2,3}} | \tilde{\psi}_{j_2 j_3}^{U_{2,3}} \rangle$ به حالت (بهنجار نشده) $\langle \tilde{\psi}_{j_2 j_3}^{U_{2,3}} | \psi \rangle = N^{j_2 j_3} U_{2,3} | \psi \rangle$ می‌رود و بنابراین $LE_{1,4}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$LE_{1,4} = \text{Max}_{U_{2,3}} \sum_{j_2, j_3=0}^1 P_{j_2 j_3}^{U_{2,3}} C(|\psi_{j_2 j_3}^{U_{2,3}}\rangle) \quad \wedge$$

در رابطه بالا، C سنجه رایج کانکرنس برای محاسبه درهم‌تندگی است [۱۶] که برای حالت‌های خالص (مانند آنچه ما در اینجا داریم) به صورت $C(a|11\rangle + b|10\rangle + c|01\rangle + d|00\rangle) = 2|ad - bc|$ تعریف می‌شود. مفهوم عملیاتی این سنجه رایج برای اولین بار توسط یکی از نویسندگان مقاله حاضر ارائه شده است [۲۴]. بیشینه‌یابی بر روی همه تنظیمات ممکن دستگاه‌های اندازه‌گیری صورت می‌گیرد (از نظر ریاضی، بیشینه‌یابی بر روی همه پارامترهای مشخص

که در آن $\rho_{m,n}$ عملگر چگالی تقلیل یافته (به روش رد جزئی، یا روش دیراک [۲۲]) برای یک زیر سیستم با m کیوبیت می‌باشد. واضح است که $\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ تعداد از چنین زیر سیستم‌هایی برای یک سیستم N جزئی وجود دارد؛ جمع بر روی همه موارد ممکن می‌باشد. Q را سنجه میر-والاش می‌نامند، چرا که قبل از معرفی Q_m و در سال ۲۰۰۱م توسط آنها معرفی شده بود [۱۷].

درهم‌تندگی سیستمی موضع پذیر

سنجه LE برای یک سیستم چند جزئی در سال ۲۰۰۳م توسط ورستریت معرفی شده است [۱۹]. این سنجه بر اساس سنجه جفت سایتی LE تعریف شده است [۲۳]؛ یعنی بیشینه LE بین جفت سایت‌های مختلف سیستم.

برای محاسبه LE بین یک جفت سایت در یک سیستم چند جزئی، ابتدا دستگاه‌های اندازه‌گیری موضعی را بر روی موضع دیگر سایت‌ها (یعنی سایت‌های غیر از جفت مورد نظر برای محاسبه درهم‌تندگی) تنظیم کرده (معادل با اعمال یک عملگر یکانی موضعی به حالت سیستم) و سپس اندازه‌گیری موضعی (و نه رد جزئی گرفتن که یک عملیات ریاضی است) بر روی آنها انجام می‌شود؛ در نتیجه سایت‌های غیر از جفت مورد نظر، با احتمالات مشخصی به حالت‌های ویژه رفته (بر طبق اصل معروف رمبش وان نیومن) و جداپذیر خواهند شد. حالت جفت مورد نظر و احتمال رسیدن به آن، به تنظیمات دستگاه‌های اندازه‌گیری موضعی (تنظیم پارامترهای مشخص کننده عملگر یکانی اعمال شده به حالت سیستم) و نتیجه اندازه‌گیری موضعی بر روی بقیه سایت‌ها وابسته است. برای به دست آوردن LE بین جفت مورد نظر، با تنظیمات مناسب دستگاه‌های اندازه‌گیری موضعی،

بودا، ξ_K^2 را می‌توان صریحاً برحسب مؤلفه‌های \vec{J} به دست آورد [۲۶]. به خواننده مشتاق توصیه می‌شود که برای مطالعه کامل‌تر مفاهیم و کاربردهای فشردگی و البته پارامترهای فشردگی، به خصوص ξ_K^2 به مرجع [۲۶] مراجعه کند.

تحلیل درهم‌تنیدگی و فشردگی سیستم‌ها

برای سیستم‌های نشان داده شده در شکل الف و ب، ابتدا مقادیر ویژه و حالت‌های ویژه متناظر با آن مقادیر را برحسب ضرایب \vec{J} و b محاسبه می‌کنیم و سپس شرایطی را بررسی می‌کنیم که مشخص کننده حالت پایه سیستم می‌باشد؛ یعنی بازه‌هایی از ضرایب \vec{J} و b را می‌یابیم که تعیین کننده یک حالت ویژه خاص به عنوان حالت پایه، یعنی با کمترین ویژه مقدار است. برای حالت ویژه مشخص شده به عنوان حالت پایه سیستم، با سنج‌های گلوبال میر-والاش و LE درهم‌تنیدگی سیستم، و با پارامتر فشردگی کیتاگوا فشردگی اسپینی سیستم را برحسب پارامترهای موجود به دست می‌آوریم. خواهیم دید که در بسیاری از بازه‌های ضرایب، این کمیت‌ها ثابت خواهند بود. نهایتاً مقادیر، توابع ریاضی و نمودارهای این کمیت‌ها را با هم مقایسه و بررسی می‌کنیم.

تحلیل کمیت‌های درهم‌تنیدگی و فشردگی

سیستم الف

محاسبه حالت‌های ویژه سیستم، که هر کدام می‌توانند برحسب بازه‌های مختلف مقدار و علامت پارامترها، حالت پایه سیستم بشوند نشان می‌دهد که هیچکدام از آنها به میدان b وابسته نمی‌شوند؛ در نتیجه کمیت‌های مورد نظر صریحاً تابعی از b نیستند. با این حال میدان b بازه‌هایی از ضریب \vec{J} را که حالت پایه را

کننده عملگرهای یکانی اعمال شده بر روی سایت‌های 1 و 4 می‌باشد).

واضح است که از نظر داشتن معنی فیزیکی، این سنج بر بقیه سنج‌ها برتری محسوس دارد، چرا که یک روش عملیاتی برای محاسبه آن وجود دارد. با این حال از نظر ریاضی، به دلیل بیشینه‌یابی‌های لازم و پیچیدگی‌های تعریف، محاسبه تحلیلی آن بسیار مشکل است.

در این مقاله به کمک روش کمترین مربعات [۲۵] و تحلیل مفصل نتایج (که جزئیات آن در اینجا نیامده است)، رابطه ساده‌ای برای LE سیستم‌های فوق برحسب پارامترهای سیستم خواهیم یافت.

پارامتر فشردگی کیتاگوا

بر خلاف سیستم‌های بوزونی که در آنها عدم قطعیت برای یک حالت همدوس بوزونی در همه جهات با هم برابر است، برای یک حالت همدوس اسپینی عدم قطعیت عملگرهای اسپینی به جهت بستگی دارد [۲۶]. جهت اسپین میانگین به صورت $\hat{n}_0 := \langle \vec{J} \rangle / \langle \langle \vec{J} \rangle \rangle$ برای یک حالت همدوس اسپینی $\frac{J}{2} = (\Delta J_{n_{\perp}})^2$ و بنابراین چنانچه $\frac{J}{2} < (\Delta J_{n_{\perp}})^2$ این حالت فشرده اسپینی خواهد بود [۲۶]. کیتاگوا و یودا در سال ۲۰۰۱م پارامتر فشردگی اسپینی را به صورت زیر تعریف کردند [۶]:

$$\xi_K^2 := \frac{4 \min_{n_{\perp}} (\Delta J_{n_{\perp}})^2}{N} \quad 9$$

در سیستم اسپینی $\vec{J} = \frac{N}{2}$. اندیس n_{\perp} بیانگر مؤلفه \vec{J} در راستای عمود بر جهت اسپین میانگین است و کمینه‌یابی بر روی همه جهات ممکن آن انجام می‌شود. با توجه به تعریف پارامتر فشردگی کیتاگوا و

مشخص می‌کنند، تعیین می‌کند. بنا بر محاسبات، سه وضعیت زیر قابل تصور است:

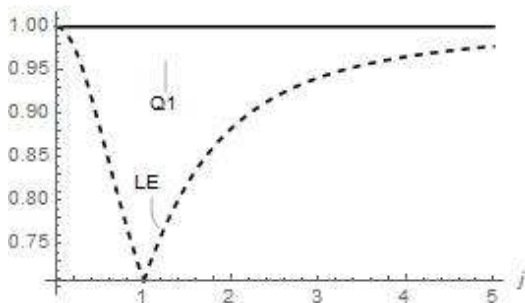
۱۰ الف $|b| < 2\sqrt{1+j^2} - 1 - |z|$

۱۰ ب $2\sqrt{1+j^2} - 1 - |z| \leq |b| < 1 + |z|$

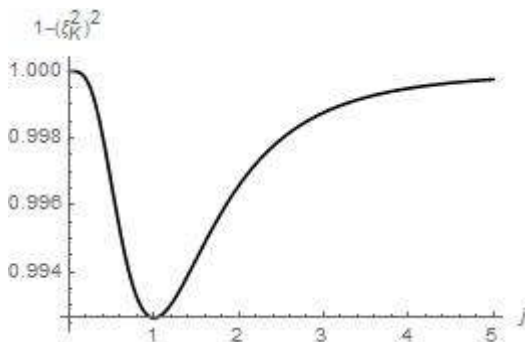
۱۰ پ $1 + |z| \leq |b|$

اگر وضعیت الف برقرار باشد، حالت پایه عبارت است از χ_1° (بهنجار شده $\tilde{\chi}_1^{\circ}$ در رابطه ۳ و متناظر با ویژه مقدار λ_1° در رابطه ۲) که به j وابسته است. بعد از یک محاسبه نسبتاً مفصل، کمیت‌های مورد بررسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

با آن برابر است) برحسب j در این وضعیت رسم شده است. هر چند ادعا نمی‌شود که یک رابطه مشخص بین LE و ξ_K^2 پیدا کرده‌ایم، این که هر دو در $j=1$ برگشت دارند می‌تواند جالب باشد. از آنجایی که عبور j از مقدار واحد به معنی چرخاندن سیستم و کاهش شدت نسبی اندرکنش نسبت به جفت‌های افقی است، روند نمودار LE معقول به نظر می‌رسد.



شکل ۲. نمودارهای سنجه‌های Q_1 و LE برحسب j در وضعیت الف در سیستم الف.



شکل ۳. نمودار $1 - (\xi_K^2)^2$ برحسب j در وضعیت الف در سیستم الف.

چنانچه وضعیت ب برقرار باشد، حالت پایه عبارت است از χ_2° (بهنجار شده $\tilde{\chi}_2^{\circ}$ در رابطه ۳ و متناظر با ویژه مقدار λ_2° در رابطه ۲) که به j وابسته نیست و کمیت‌های مورد بررسی به صورت زیر خواهند بود:

$$Q_1 = 1 \quad Q_2 = \frac{2}{3}$$

$$\xi_K^2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+j^2}}\right) \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{1+j^2}}\right) \quad 11$$

$$LE = \begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{1+j^2}\right) & |z| < 1 \\ 1 - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1+j^2} & 1 \leq |z| \end{cases}$$

تابعیت LE از روش ذکر شده در انتهای بخش درهم‌تندی سیستمی موضع‌پذیر به دست آمده است. از آنجایی که حداکثر ξ_K^2 در چنین وضعیتی حدود 0.0858 و به ازای $j=1$ است، رابطه تقریبی $Q_1 \approx 1 - (\xi_K^2)^2$ برقرار است. این رابطه را در موارد دیگر هم بررسی خواهیم کرد. در شکل ۲ نمودارهای سنجه‌های Q_1 و LE در این وضعیت را برحسب j رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که سنجه گلوبال میروالاش، علی‌رغم وابستگی حالت پایه به j ، به این ضریب وابسته نیست؛ در حالی که سنجه LE در حوالی $j=1$ یک بازگشت دارد. در شکل ۳ نمودار

متناظر با ویژه مقدار λ_1^{\otimes} در رابطه ۵) که جدایی‌پذیر است و در نتیجه درهم‌تنیدگی سیستم با همه سنجه‌ها صفر خواهد بود. فشردگی برابر واحد است و می‌توان به رابطه ۱۳ فکر کرد.

چنانچه وضعیت ب برقرار باشد، حالت پایه عبارت است از χ_2^{\otimes} (بهنجار شده $\tilde{\chi}_2^{\otimes}$ در رابطه ۶ و متناظر با ویژه مقدار λ_2^{\otimes} در رابطه ۵) که به j وابسته نیست و کمیت‌های مورد بررسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Q_1 = 1 \quad Q_2 = \frac{2}{3} \quad 15$$

$$\xi_K^2 = 0 \quad LE = 1$$

وقتی وضعیت پ حاکم باشد، حالت پایه عبارت است از χ_3^{\otimes} (بهنجار شده $\tilde{\chi}_3^{\otimes}$ در رابطه ۶ و متناظر با ویژه مقدار λ_3^{\otimes} در رابطه ۵) که به j وابسته می‌شود و کمیت‌های مورد بررسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Q_1 = 1 \quad Q_2 = \frac{2}{3} \quad 16$$

$$\xi_K^2 = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{8+j}{\sqrt{8+j^2}} \right)$$

$$LE = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{1+(3\sqrt{2}-4)j^2} \right)$$

تابعیت LE از روش ذکر شده در انتهای بخش درهم‌تنیدگی سیستمی موضع‌پذیر به دست آمده است. از آنجایی که حداکثر ξ_K^2 در چنین وضعیتی حدود 0.0858 و به ازای $j=0$ است، رابطه تقریبی $Q_1 \approx 1 - (\xi_K^2)^2$ برقرار است. در شکل ۴ سنجه‌های Q_1 و LE را برحسب j در این وضعیت رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که Q_1 علی‌رغم وابستگی حالت پایه به j ، وابسته به این ضریب نیست، در حالی

$$Q_1 = \frac{3}{4} \quad Q_2 = \frac{2}{3} \quad 12$$

$$\xi_K^2 = \frac{1}{2} \quad LE = \frac{1}{2}$$

$$Q_1 = 1 - (\xi_K^2)^2 \quad 13$$

چنانچه وضعیت پ برقرار باشد، حالت پایه عبارت است از χ_3^{\otimes} (بهنجار شده $\tilde{\chi}_3^{\otimes}$ در رابطه ۳ و متناظر با ویژه مقدار λ_3^{\otimes} در رابطه ۲) که جدایی‌پذیر است و همه مقادیر درهم‌تنیدگی صفر خواهند شد و البته فشردگی برابر واحد خواهد شد؛ یعنی به هر حال رابطه ۱۳ برقرار می‌ماند.

تحلیل کمیت‌های درهم‌تنیدگی و فشردگی سیستم ب

مانند سیستم الف، در این سیستم هم محاسبه حالت‌های ویژه سیستم نشان می‌دهد که هیچکدام از آنها به میدان b وابسته نمی‌شوند؛ در نتیجه کمیت‌های مورد نظر صریحاً تابعی از b نیستند. وضعیت تعیین حالت پایه در این سیستم کمی پیچیده‌تر است و پنج وضعیت زیر قابل تصور است:

$$1 < j \quad \text{and} \quad j < |b| \quad 14 \text{ الف}$$

$$1 < j \quad \text{and} \quad |b| \leq j \quad 14 \text{ ب}$$

$$0 \leq j \leq 1 \quad \text{and} \quad |b| < \sqrt{8+j^2} - 2 \quad 14 \text{ پ}$$

$$0 \leq j \leq 1 \quad \text{and} \quad \sqrt{8+j^2} - 2 \leq |b| < 2 - j \quad 14 \text{ ت}$$

$$0 \leq j \leq 1 \quad \text{and} \quad 2 - j \leq |b| \quad 14 \text{ ث}$$

هنگامی که وضعیت الف یا ث برقرار باشد، حالت پایه عبارت است از χ_1^{\otimes} (بهنجار شده $\tilde{\chi}_1^{\otimes}$ در رابطه ۶ و

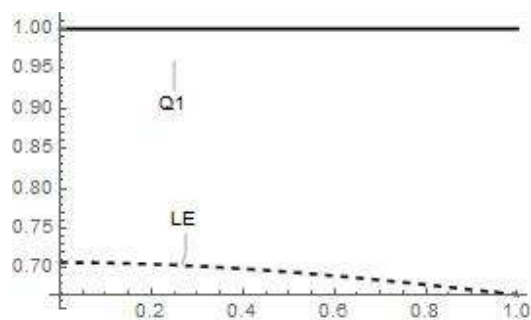
حال، در مواردی که فشردگی (و حالت پایه متناظر) تا حدودی به J وابسته می‌شود، Q_1 تغییری نمی‌کند! از طرف دیگر دیدیم که هر چند به دست آوردن رابطه ریاضی برای LE بسیار مشکل است، ولی غیر ممکن نیست (حداقل برای این سیستم‌ها؛ دلیل اصلی برای انتخاب چنین سیستم‌هایی با چنین اندرکنش‌هایی، غیر از رایج بودن آنها، امکان به دست آوردن کمیت‌های مورد بررسی به صورت تحلیلی است). با این حال رابطه‌ای بین LE و ξ_K^2 نیافتیم.

پیشنهاد می‌شود که سنجه LE با دیگر پارامترهای فشردگی مقایسه شود تا وجود رابطه‌ای بین آنها بررسی گردد.

مرجع‌ها

- [1] J. Ren, W.L. You, X. Wang, Entanglement and correlations in a one-dimensional quantum spin-12 chain with anisotropic power-law long-range interactions, *Physical Review B* **101** (2020) 094410. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.094410>
- [2] G. Li, W. Nie, X. Li, A. Chen, Dynamics of ground-state cooling and quantum entanglement in a modulated optomechanical system, *Physical Review A* **100** (2019) 063805. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.063805>
- [3] A. Deger, T-C. Wei, Geometric entanglement and quantum phase transition in generalized cluster-XY models, *Quantum Information Processing* **18** (2019) 326. <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2439-7>
- [4] A. Anshu, I. Arad, D. Gosse, An Area Law for 2D Frustration-Free Spin systems, *Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing* (2022).
- [5] O. Guehne, G. Toth, Entanglement detection, *Phys. Report.* **474** (2009) 1. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004>

که سنجه LE و $1 - (\xi_K^2)^2$ (و نه Q_1 که در این حالت ثابت و تقریباً با آن برابر است) اینگونه نیست.



شکل ۴. نمودارهای سنجه‌های Q_1 و LE بر حسب z در وضعیت ب در سیستم ب

در نهایت وقتی وضعیت ت صادق است، مانند بیشتر موارد، حالت پایه عبارت است از χ_4^{\otimes} (بهنجار شده χ_4^{\otimes} در رابطه ۶ و متناظر با ویژه مقدار λ_4^{\otimes} در رابطه ۵) که به J وابسته نیست. کمیت‌های مورد بررسی در این وضعیت مانند وضعیت و وضعیت ب در سیستم قبلی است.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

برای دو سیستم رایج با آرایش مربعی و اندرکنش هایزنبرگ XX ، فشردگی اسپینی را با پارامتر کیتاگوا بر حسب متغیرهای سیستم به دست آوردیم و با درهم‌تنیدگی سیستم، که با دو سنجه میر-والاش (که بسیار شناخته شده و مرسوم است و محاسبه آن تا حدودی ساده است) و LE (که کمتر شناخته شده است و تعریف ریاضی آن پیچیده و محاسبه آنالیتیک آن معمولاً بسیار دشوار است؛ با این حال مفهوم فیزیکی بسیار روشنی دارد) به دست آمده، مقایسه کردیم. دیدیم که برای چنین سیستم‌هایی (و نه الزاماً اندرکنش‌های دیگر) حالات پایه الزاماً به J ، یعنی شدت نسبی اندرکنش بین سایت‌ها، وابسته نیستند. محاسبات نشان می‌دهند که در این سیستم‌ها همواره رابطه (گاهاً تقریبی) مشخصی بین ξ_K^2 و Q_1 وجود دارد؛ با این

- [17] D.A. Meyer, N.R. Wallach, Global entanglement in multiparticle systems, *Journal of Mathematical Physics* **43** (2002) 4273. <https://doi.org/10.1063/1.1497700>
- [18] A.J. Scott, Multipartite entanglement quantum-error-correcting codes and entangling power of quantum evolutions, *Physical Review A* **69** (2004) 052330. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.052330>
- [19] F. Verstraete, J. Dehaene, B.D. Moor, Normal forms and entanglement measures for multipartite quantum states, *Physical Review A* **68** (2003) 012103. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.012103>
- [20] T.C. Wei, P.M. Goldbart, Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states, *Physical Review A* **68** (2003) 042307. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.042307>
- [21] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral, Entanglement in many-body systems, *Reviews of modern physics* **80** (2008) 517. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.517>
- [22] P.A.M. Dirac, *Note on exchange phenomena in the Thomas atom*, In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, Cambridge University Press Cambridge, (1930).
- [23] M. Popp, F. Verstraete, M.A.M. Delgado, J.I. Cirac, Localizable entanglement, *Physical Review A* **71** (2005) 042306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.042306>
- [24] A. Sabour, M. Jafarpour, A probability measure for entanglement of pure two-qubit systems and a useful interpretation for concurrence, *Chinese Physics Letters* **28** (2011) 070301. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/28/7/070301>
- [25] A.C. Rencher, W.F. Christensen, *Methods of Multivariate Analysis*, John Wiley, New York (2012).
- [26] J. Ma, X. Wang, C.P. Sun, F. Nori, Quantum spin squeezing, *Physics Reports* **509** (2011) 89-165. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.08.003>
- [6] K.S. Akhilesh, B.G. Divyamani, A.R. Usha Devi, Spin squeezing in symmetric multi qubit states with two non-orthogonal Majorana spinors, *Quantum Information* **18** (2019) 144. <https://doi.org/10.1007/s11128-019-2244-3>
- [7] L.G. Huang, F. Chen, X. Li, Y. Li, R. Lü, Y. C. Liu, Dynamic synthesis of Heisenberg-limited spin squeezing, *npj quantum information* **7** (2021) 168. <https://doi.org/10.1038/s41534-021-00505-z>
- [8] MS. Rudner, LMK Vandersypen, V. Vuletić, LS. Levitov, Generating Entanglement and Squeezed States of Nuclear Spins in Quantum Dots, *Physical Review Letters* **107** (2011) 206806. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.206806>
- [9] A. Sorensen, L. Duan, J. Cirac, P. Zoller, Many-particle entanglement with Bose-Einstein condensates, *Nature* **409** (2001) 63. <https://doi.org/10.1038/35051038>
- [10] N. Bigelow, Quantum engineering - Squeezing entanglement, *Nature* **409** (2001) 27. <https://doi.org/10.1038/35051193>
- [11] E.S. Polzik, Quantum physics - The squeeze goes on, *Nature* **453** (2008) 45. <https://doi.org/10.1038/453045a>
- [12] A.D. Cronin, J. Schmiedmayer, D.E. Pritchard, Optics and interferometry with atoms and molecules, *Reviews of Modern Physics* **81** (2009) 1051. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1051>
- [13] I. Buluta, F. Nori, Quantum simulators, *Science* **326** (2009) 108. <https://doi.org/10.1126/science.1177838>
- [14] M. Kitagawa, M. Ueda, Squeezed spin states, *Physical Review A* **47** (1993) 5138-5143 <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.5138>
- [15] D. Ulam-Orgikh, M. Kitagawa, Spin squeezing and decoherence limit in Ramsey spectroscopy, *Physical Review A* **64** (2001) 052106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.052106>
- [16] W.K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Physical Review Letters* **80** (1998) 2245. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>