Document Type: Full length research Paper

Green's function approach to inhomogeneous Lamb problem: response to a sudden impulse

Akbar Jahan*

Research Institute for Astronomy and Astrophysics of Maragha (RIAAM)

University of Maragheh, P. O. Box 55136-553, Maragheh, Iran

Received: 08.05.2021 Final revision: 20.07.2022 Accepted: 07.11.2022
Doi link: 10.22055/jrmbs.2022.17906

Abstract
The response of the oscillator in a Lamb problem made of two semi-infinite strings of different mass densities to a sudden impulse is obtained using Green's function method. It is shown that after delivering the impulse, the oscillator emits decaying waves along both sides of the string leading to the radiation damping for the oscillator. It is pointed out that for the oscillator coupled at the joining point of the strings, the damping factor of the wave is proportional to the sum of the impedances of the strings. When the difference between the densities vanishes, the result is in agreement with the result known for the homogeneous model.

Keywords: Lamb problem, Green's function, radiation damping, mechanical impedance

*Corresponding Author: jahan@maragheh.ac.ir

رهیافت تابع گرین در مسأله لمب ناهمگن: پاسخ به یک ضربه ناگهانی

اکبر جهان*

مرکز تحقیقات نجوم و اخترفیزیک مراغه، دانشگاه مراغه، مراغه،ص. پ. ۵۵۳-۵۵۱۳۶. ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۱۸ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۰۴/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶

Doi link: 10.22055/jrmbs.2022.17906

چکیده

پاسخ نوسانگر در مسأله لمب متشکل از دو ریسمان با چگالی‌های جرم نابرابر به یک ضربهٔ ناگهانی اعمال شده با به‌کارگیری روش تابع گرین محاسبه شده است. نشان داده شده است که بعد از اعمال ضربه، نوسانگر امواج میرایی را در امتداد دو سوی ریسمان از خود منتشر می‌کند. همچنین نشان داده شده است که برای نوسانگری که به محل اتصال ریسمان‌ها وصل است، ضریب میرایی موج ایجاد شده با مجموع امپدانس ریسمان‌های تشکیل دهنده متناسب است. هنگامی‌که اختلاف چگالی بین ریسمان‌ها صفر است، نتیجه به‌دست آمده با نتایج قبلی برای مدل همگن در توافق است.

کلیدواژگان: مسأله لمب، تابع گرین، میرایی تابشی، امپدانس مکانیکی

مقدمه

مسأله لمب متشکل از یک نوسانگر کلاسیک است که به یک ریسمان نیمه–متناهی و یا نامتناهی متصل است (شکل۱). این مسأله که برای اولین بار توسط هوریس لمب[1] مطرح شده است احتمالاً ساده‌ترین مثال برای مفهوم میرایی تابشی[2] است [۱]. هنگامی‌که نوسانگر شروع به نوسان می‌کند، انرژی آن توسط امواجی که در امتداد ریسمان به سوی دو انتها در بی‌نهایت گسیل می‌شوند، کاهش می‌یابد. نتیجهٔ این گسیل انرژی به‌واسطهٔ محیط کشسان (در اینجا ریسمان) بر روی حرکت نوسانگر به‌شکل یک جملهٔ میرایی است که متناسب با سرعت امواج منتشر شده در دو امتداد ریسمان است. پدیدهٔ مشابه در الکترودینامیک هنگامی رخ می‌دهد که گسیل امواج الکترومغناطیسی برای یک ذرهٔ باردار متصل به یک نوسانگر، منجر به یک حرکت نوسانی میرا می‌شود [۲]. در سال‌های اخیر جنبه‌های مختلف مسألهٔ لمب مورد بررسی قرار گرفته است. به‌عنوان مثال مسألهٔ لمب با یک نوسانگر غیر خطی در [۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در آنجا نشان داده شده است که این مدل منجر به ضرایب پراکندگی، یعنی ضرایب انتشار و بازتاب آشوبناک می‌شود. همچنین در [۴] نشان داده شده است که در مدلی با دو نوسانگر غیر خطی، ضرایب پراکندگی برای یک موج تخت راست–رونده[3] با ضرایب پراکندگی برای موج تخت چپ–رونده[4] متفاوت است. جنبه‌های دیگر مدل با نوسانگر غیر خطی و نوسانگر بدون جرم مورد بررسی قرار گرفته است [۵،۶]. مسأله لمب در

* نویسنده مسئول: jahan@maragheh.ac.ir

[1] Horace Lamb
[2] Radiation damping
[3] Right-moving
[4] Left-moving

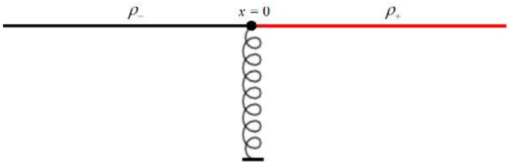
محیط پاشنده[1] در [۷] و نیز ناپایداری ناشی از میرایی تابشی در [۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. در دو بررسی اخیر انجام شده توسط نویسنده، برای مسأله لمب با یک ریسمان غیر همگن که از اتصال دو ریسمان نیمه–متناهی با چگالی‌های متفاوت تشکیل شده است، نشان داده شده است که ناهمگنی ریسمان منجر به یک معادلهٔ مشخصهٔ غیر خطی برای نوسانگر می‌شود. تحلیل عددی این مسأله در مرجع [۹] و بررسی تحلیلی آن با به‌کارگیری نظریهٔ اختلال جبری در [۱۰] انجام شده است. هدف مقاله پیش رو بررسی حرکت نوسانگر در مدل لمب پس از اعمال یک ضربه ناگهانی است که روی آن اعمال می‌شود. روش تابع گرین یک روش مناسب و سر راست برای این منظور است. بنابراین با به‌کارگیری این روش نشان می‌دهیم که پس از اعمال یک ضربهٔ ناگهانی، نوسانگر شروع به نوسان کرده و به تدریج دامنه نوسان آن بطور نمایی با ضریب میرایی که متناسب با امپدانس ریسمان است، کاهش می‌یابد. همچنین شکل صریح امواجی که از نقطهٔ استقرار نوسانگر در دو جهت مخالف دور می‌شوند، به‌دست آمده است. سرانجام حد همگن مسأله، یعنی وقتی که چگالی دو ریسمان یکسان است، به‌دست آمده و با نتایج قبلی مقایسه شده است.

مسألهٔ لمب با ریسمان غیر همگن

یک نوسانگر به یک ریسمان با چگالی غیر یکنواخت $\rho(x)=\rho_{-}\Theta(-x)+\rho_{+}\Theta(x)$ در نقطهٔ $x=0$ متصل است. در این رابطه $\Theta(x)$ تابع پله‌ایی هویساید است این رابطه برای چگالی جرم بدین معنی است که ریسمان نامتناهی از اتصال دو ریسمان نیمه متناهی با چگالی‌های ρ_{+} و ρ_{-} به‌دست آمده است (شکل ۱). معادلهٔ حرکت سیستم در حضور نیروی خارجی $f(x,t)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$L_{x,t}\,\phi(x,t)=\frac{1}{T}f(x,t) \qquad (۱)$$

که در آن تابع موج $\phi(x,t)$ جابه‌جایی عرضی ریسمان در مکان x و زمان t را نشان می‌دهد. عملگر $L_{x,t}$ عبارت است از



شکل ۱. مسألهٔ لمب ناهمگن: یک نوسانگر که به یک ریسمان نامتناهی با چگالی ناپیوسته متصل است. چگالی ریسمان قرمز رنگ ρ_{+} و چگالی ریسمان آبی رنگ ρ_{-} است.

$$L_{x,t}=\frac{1}{v^2(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{T}\delta(x)\left(m\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\kappa\right) \qquad (۲)$$

که در آن $v(x)=\sqrt{T/\rho(x)}$ سرعت موج در امتداد ریسمان، T کشش ریسمان، m جرم نوسانگر و κ ضریب سختی فنر نوسانگر است. اما تابع موج در رابطهٔ ۱ می‌تواند برحسب تابع گرین کل سیستم یعنی "ریسمان + نوسانگر" به‌شکل زیر نوشته شود

$$\phi(x,t)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}dt'G(x,t;x',t')\times f(x',t') \qquad (۳)$$

که در آن تابع گرین کل رابطهٔ زیر را ارضاء می‌کند

$$L_{x,t}G(x,t;x',t')=\delta(t-t')\delta(x-x') \qquad (۴)$$

و یک نمایش انتگرالی به‌شکل زیر را دارد

$$G(x,t;x',t')=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,g(x,x';\omega)e^{-i\omega(t-t')} \qquad (۵)$$

جای‌گذاری رابطهٔ ۵ در ۴ منجر به عبارت زیر می‌شود

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2(x)+V(x)\right)g(x,x';\omega)=-\delta(x-x') \qquad (۶)$$

[1] Dispersive

که در آن جمله پتانسیل عبارت است از

$$V(x)=\frac{m}{T}(\omega^2-\alpha^2)\delta(x) \quad ۷$$

و $\alpha=\sqrt{\kappa/m}$ فرکانس طبیعی نوسانگر را نشان می‌دهد. اما در غیاب نوسانگر یعنی $V(x)=0$ رابطهٔ ۶ به رابطهٔ زیر کاهش می‌یابد

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2(x)\right)g_0(x,x';\omega)=-\delta(x-x') \quad ۸$$

در اینجا $g_0(x,x';\omega)$ تابع گرین ریسمان آزاد با چگالی $\rho(x)=\rho_-\Theta(-x)+\rho_+\Theta(x)$ است. بنابراین برای عدد موج در رابطهٔ۸ خواهیم داشت $k^2(x)=k_-^2\Theta(-x)+k_+^2\Theta(x)$ که آن را به‌شکل زیر تغییر می‌دهد

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_-^2\Theta(-x)+k_+^2\Theta(x)\right]\times g_0(x,x';\omega)=-\delta(x-x') \quad ۹$$

تابع گرینی که معادلهٔ بالا را ارضاء می‌کند در ضمیمهٔ مرجع [۹] محاسبه شده و شکل زیر را دارد

$$g_0(x,x';\omega)=\mathfrak{g}_-(x,x';\omega)\Theta(-x')+\mathfrak{g}_+(x,x';\omega)\Theta(x') \quad ۱۰$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_-(x,x';\omega)&=\frac{i}{2k_-}\left(e^{ik_-|x-x'|}+\frac{k_--k_+}{k_-+k_+}e^{-ik_-(x+x')}\right)\times\Theta(-x)+\frac{i}{k_-+k_+}e^{i(k_+x-k_-x')}\Theta(x)\\ \mathfrak{g}_+(x,x';\omega)&=\frac{i}{k_-+k_+}e^{i(k_+x'-k_-x)}\Theta(-x)+\frac{i}{2k_+}\left(e^{ik_+|x-x'|}-\frac{k_--k_+}{k_-+k_+}e^{ik_+(x+x')}\right)\times\Theta(x)\end{aligned} \quad ۱۱$$

با این یادآوری که اعداد موج $k_\pm$ و سرعت‌ها $v_\pm$ از طریق رابطهٔ $\omega=v_-k_-=v_+k_+$ با بسامد مربوط می‌شوند. برای یک ریسمان همگن، یعنی $\rho_-=\rho_+=\rho$ خواهیم داشت $k_-=k_+=k$ که پس از اعمال آن در روابط ۱۰ و ۱۱ تابع گرین یک ریسمان با چگالی یکنواخت را به‌دست می‌دهد، یعنی [۱۱]

$$g_0(x,x';k)=\frac{i}{2k}e^{ik|x-x'|},\quad \omega=kv \quad ۱۲$$

سرانجام، یاد آور می‌شویم که رابطهٔ۶ یک حل به‌شکل معادلهٔ انتگرالی زیر دارد [۱۲]

$$g(x,x';\omega)=g_0(x,x';\omega)+\int_{-\infty}^{+\infty}dx''g_0(x,x'';\omega)V(x'')g(x'',x';\omega) \quad ۱۳$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که اعمال عملگر $\partial_x^2+k^2(x)$ در طرفین رابطهٔ بالا و استفاده از معادلهٔ۸ رابطهٔ۶ را نتیجه می‌دهد. در حالت کلی رابطهٔ بالا می‌تواند با استفاده از روش اختلالی به‌طور تقریبی حل شود. اما چنانکه خواهیم دید خوشبختانه به‌خاطر شکل به‌شدت جایگزیده (به‌خاطر وجود تابع دلتای دیراک) جملهٔ پتانسیل در رابطهٔ۷، معادلهٔ۱۳ می‌تواند به‌طور دقیق حل شود.

پاسخ به یک ضربه ناگهانی

حالا فرض می‌کنیم که یک ضربهٔ ناگهانی به‌شکل $f(x,t)=J\delta(x)\delta(t)$ بر روی نوسانگر اعمال می‌شود. بلافاصله از رابطهٔ۳ به‌دست می‌آوریم

$$\phi(x,t)=\frac{J}{T}G(x,t;0,0)=\frac{J}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}g(x,0;\omega)e^{-i\omega t} \quad ۱۴$$

اما تابع گرین کل سیستم با استفاده از رابطهٔ انتگرالی ۱۳ و جملهٔ پتانسیل ۷ به‌راحتی قابل حصول است:

$$g(x,x';\omega)=g_0(x,x';\omega)+\frac{m}{T}(\omega^2-\alpha^2)g_0(x,0;\omega)g(0,x';\omega) \quad ۱۵$$

حالا با اعمال دو تغییر متغییر $x\to 0$ و $x'\to x$ در طرفین رابطهٔ بالا و استفاده از ویژگی $g_0(x,0;\omega)=g_0(0,x;\omega)$ به‌دست می‌آوریم

$$g(x,0;\omega)=\frac{g_0(x,0;\omega)}{1-\frac{m}{T}(\omega^2-\alpha^2)g_0(0,0;\omega)}=-\frac{T}{m}\frac{1}{\omega^2+\frac{i}{m}Z(0)-\alpha^2}\times\frac{g_0(x,0;\omega)}{g_0(0,0;\omega)} \qquad ۱۶$$

در اینجا امپدانس نقطه ایی[1] ریسمان عبارت است از [۹]

$$Z(0)=-\frac{T}{i\omega g_0(0,0;\omega)} \qquad ۱۷$$

با جای‌گذاری ۱۶ در ۱۴ به‌دست می‌آوریم

$$\phi(x,t)=-\frac{J}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2+\frac{i}{m}\omega Z(0)-\alpha^2}\times\frac{g_0(x,0;\omega)}{g_0(0,0;\omega)} \qquad ۱۸$$

از سوی دیگر با استفاده از روابط ۱۰ و ۱۱ خواهیم داشت

$$g_0(x,0;\omega)=\frac{i}{k_-+k_+}\left[e^{-ik_-x}\Theta(-x)+e^{ik_+x}\Theta(x)\right] \qquad ۱۹$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{g_0(x,0;\omega)}{g_0(0,0;\omega)}=e^{-ik_-x}\Theta(-x)+e^{ik_+x}\Theta(x) \qquad ۲۰$$

به‌علاوه از روابط ۱۷ و ۱۹ پیداست که امپدانس در نقطهٔ $x_0=0$ مستقل از فرکانس منبع نیروست. زیرا

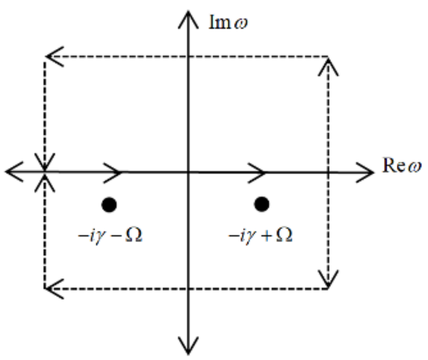
$$Z(0)=\mathcal{Z}_-+\mathcal{Z}_+ \qquad ۲۱$$

که در آن $\mathcal{Z}_-=\rho_-v_-$ و $\mathcal{Z}_+=\rho_+v_+$ به‌ترتیب امپدانس ورودی[2] ریسمان‌های نیمه متناهی با چگالی‌های ρ_- و ρ_+ هستند. به‌این ترتیب جای‌گذاری ۲۰ و ۲۱ در ۱۸ انتگرال‌هایی به‌شکل کلی زیر را نتیجه می‌دهد

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega\tau_\mp}}{\omega^2+\frac{i}{m}\omega Z(0)-\alpha^2}, \qquad ۲۲$$

که در آن $\tau_\mp\equiv t\mp x/v_\pm$. اما انتگرالده در انتگرال۲۲ در نقاطی که در نیم صفحهٔ پایینی صفحهٔ مختلط قرار دارند، تکین است (شکل۲). این نقاط عبارتند از

$$\omega_\pm=-\frac{i}{2m}Z(0)\pm\sqrt{\alpha^2-\frac{Z^2(0)}{4m^2}} \qquad ۲۳$$



شکل۲. نقاط تکینگی در رابطهٔ ۲۲ واقع در نیمهٔ پایینی صفحهٔ مختلط. برای $\tau_\mp<0$ پربند بالا و برای $0<\tau_\mp$ پربند پایین باید انتخاب شوند.

از طرفی انتگرال ۲۲ برای $\tau_\mp<0$ در امتداد پربندیی[3] که در نیمهٔ بالای صفحه بسته می‌شود، صفر است. اما هنگامی‌که $0<\tau_\mp$ پربند باید در نیم‌صفحهٔ پایینی بسته شود. در این صورت پربند نقاط تکینگی را در بر می‌گیرد و منجر به مقداری غیر از صفر می‌شود. بنابراین با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها[4] به‌دست می‌آوریم

1 Point impedance
2 Input impedance
3 Contour
4 Residues theorem

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega\tau_{\mp}}}{(\omega-\omega_{+})(\omega-\omega_{-})}= -\frac{i}{\omega_{+}-\omega_{-}}\begin{cases}e^{-i\omega_{+}\tau_{\mp}}-e^{-i\omega_{-}\tau_{\mp}}, & 0<\tau_{\mp}\\ 0, & \tau_{\mp}<0\end{cases} \quad ۲۴$$

سرانجام با استفاده از ۲۴ در ۲۲ برای تابع موج به‌دست می‌آوریم

$$\phi(x,t)= \frac{J}{m\Omega}\left[e^{-\gamma\tau_{+}}\sin\Omega\left(t+\frac{x}{v_{-}}\right)\Theta(-x)\Theta(\tau_{+}) +e^{-\gamma\tau_{-}}\sin\Omega\left(t-\frac{x}{v_{+}}\right)\Theta(x)\Theta(\tau_{-})\right] \quad ۲۵$$

که در آن بسامد نوسان Ω و ضریب میرایی γ عبارتند از

$$\Omega=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2},\qquad \gamma=\frac{1}{2m}(\mathcal{Z}_{-}+\mathcal{Z}_{+}) \quad ۲۶$$

با این شرط که $\gamma<\alpha$ رابطۀ۲۵ به‌طور دقیقی پاسخ مدل لمب به یک ضربه ناگهانی را توصیف می‌کند. ملاحظه می‌شود که پس از اعمال ضربه، امواج سینوسی با سرعت انتشار متفاوت به هر دو سوی نوسانگر گسیل می‌شوند. اما دامنۀ نوسان با گذشت زمان میرا می‌شود. از رابطۀ۲۵ به‌وضوح پیداست که این میرایی با امپدانس $Z(0)$ متناسب است. اما از ۲۵ برای دامنه نوسان نوسانگر داریم

$$q(t)\equiv\phi(0,t) =\frac{J}{m\Omega}e^{-\frac{\mathcal{Z}_{-}+\mathcal{Z}_{+}}{2m}t}\sin(\Omega t)\Theta(t),\qquad \Omega=\sqrt{\alpha^2-\frac{(\mathcal{Z}_{-}+\mathcal{Z}_{+})^2}{4m^2}} \quad ۲۷$$

که دوباره دلالت بر یک حرکت نوسانی میرا دارد. اما برای یک ریسمان با چگالی یکنواخت $\rho_{-}=\rho_{+}=\rho$ ، از رابطۀ۲۱ امپدانس عبارت خواهد بود از $Z=2\rho v$. بنابراین برای یک ریسمان یکنواخت دامنه نوسان نوسانگر عبارت خواهد بود از

$$q(t)=\frac{J}{m\Omega}e^{-\frac{\rho v}{m}t}\sin(\Omega t)\Theta(t),\qquad \Omega=\sqrt{\alpha^2-\frac{\rho^2v^2}{m^2}} \quad ۲۸$$

نتیجه‌ایی که در [۱،۷و۸] نیز ارائه شده است.

شبیه‌سازی نتایج

برای مدلی با پارامترهای زیر

$$T=10\,\mathrm{N},\quad \rho_{-}=2.5\times10^{-2}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{meter}},\quad \rho_{+}=0.1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{meter}},\quad m=1\mathrm{kg},\quad \kappa=4\times10^{2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{meter}} \quad ۲۹$$

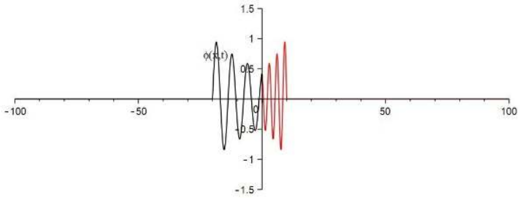
به‌دست می‌آوریم

$$v_{+}=10\,\frac{\mathrm{meter}}{\mathrm{sec}},\quad v_{-}=2\times10\,\frac{\mathrm{meter}}{\mathrm{sec}},\quad \alpha=2\times10\,\mathrm{sec}^{-1},\quad \mathcal{Z}_{-}=0.5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{sec}},\quad \mathcal{Z}_{+}=1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{sec}} \quad ۳۰$$

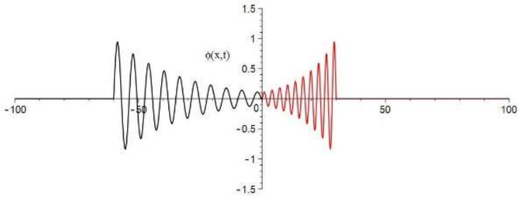
این کمیت‌ها مقادیر زیر را برای بسامد ارتعاش نوسانگر و ضریب میرایی آن به‌دنبال دارند

$$\Omega=1.99\times10\,\mathrm{sec}^{-1},\quad \gamma=7.5\times10^{-1}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad ۳۱$$

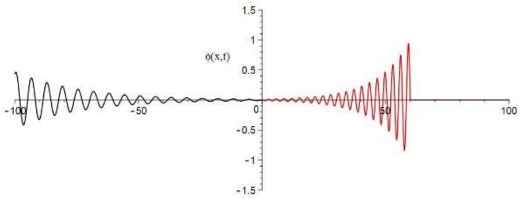
با فرض اینکه اندازۀ ضربه مقدار $J=m\Omega=1.99\times10\ \mathrm{N\cdot sec}$ باشد، شکل موج ایجاد شده بر روی ریسمان در اشکال۳ تا ۵ برای سه بازۀ زمانی مختلف ترسیم شده است. همچنین شکل۶ حرکت نوسانگر بعد از اعمال ضربه را نشان می‌دهد.



شکل۳. موج ایجاد شده بر اثر ضربه پس از گذشت مدت زمان $t = 1\ \mathrm{sec}$ (توجه: نوسانگر در مبدأ مختصات قرار دارد).

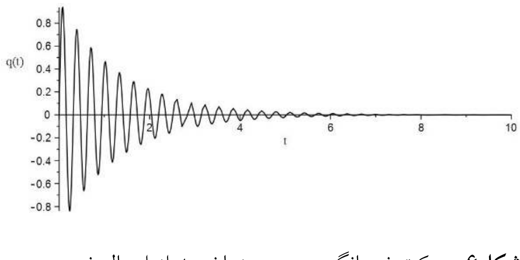


شکل۴. موج ایجاد شده بر اثر ضربه پس از گذشت مدت زمان $t = 3\ \mathrm{sec}$.



شکل۵. موج ایجاد شده بر اثر ضربه پس از گذشت مدت زمان $t = 6\ \mathrm{sec}$.

از آنجائی‌که مطابق روابط ۲۹ و ۳۰ چگالی ریسمان نیمه متناهی در سمت چپ (ریسمان سیاه رنگ) از چگالی ریسمان واقع در سمت راست نوسانگر (ریسمان قرمز رنگ) کمتر است، سرعت انتشار موج در امتداد آن از سرعت انتشار موج در امتداد ریسمان قرمز رنگ بیشتر است. به‌همین دلیل در سه شکل بالا موج گسیل شده در سمت چپ فاصلۀ بیشتری را نسبت به موج در سمت راست پیموده است.

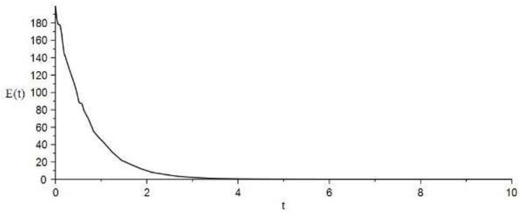


شکل۶. حرکت نوسانگر برحسب زمان بعد از اعمال ضربه.

اما انتشار امواج در امتداد ریسمان موجب کاهش انرژی مکانیکی نوسانگر یعنی

$$E = \frac{1}{2} m (\partial_t q)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 \qquad ۳۲$$

می‌شود. پس از جای‌گذاری رابطۀ ۲۷ در ۳۲ و استفاده از مقادیر عددی در روابط ۲۹ و ۳۰ تغییرات زمانی انرژی نوسانگر در شکل۷ ترسیم شده است.



شکل۷. تغییرات انرژی نوسانگر برحسب زمان بعد از اعمال ضربه.

در پایان لازم به‌ذکر است که تحلیل انجام گرفته در این مقاله مبتنی بر این فرض است که نوسانگر در محل اتصال دو ریسمان یعنی $x_0 = 0$ قرار دارد. اما در صورتی که نوسانگر در مکان دلخواه $x_0 \neq 0$ قرار گیرد (مثلاً $x_0 < 0$)، آنگاه معادلۀ مشخصۀ شکل غیر خطی زیر را خواهد داشت

$$(1 + A_R e^{-i\chi\omega})(\omega^2 - \alpha^2) + i\frac{\mathcal{Z}_-}{m}\omega = 0 \qquad ۳۳$$

چنانکه در مقدمه نیز اشاره شد حل عددی و تحلیلی این معادله غیر خطی برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدل (با شرط $A_R \ll 1$) در مراجع [۹ و ۱۰] ارائه شده است. تحلیل جامعی از مسأله بدون نیاز به‌شرط $A_R \ll 1$ توسط نویسنده در حال انجام است.

بحث و نتیجه‌گیری

هنگامی‌که یک سیستم فیزیکی ارتعاش کننده با یک محیط با ابعاد نامتناهی جفت می‌شود، می‌تواند انرژی مکانیکی خود را با انتشار امواج در آن محیط تخلیه کند. اما این تابش انرژی برای خود سیستم، میرایی تابشی را به‌همراه دارد. چنانکه دیدیم یک ضربه ناگهانی برای نوسانگری که به یک ریسمان نامتناهی با چگالی جرم غیر یکنواخت متصل است، میرایی تابشی منجر به یک نوسان میرا می‌شود. ضریب میرایی برای نوسانگری که درست در محل اتصال دو ریسمان نیمه‌متناهی قرار دارد با مجموع امپدانس‌های آن دو ریسمان متناسب است.

مرجع‌ها

[1] H. Lamb, On the peculiarity of the wave-system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium, *Proceedings of the London Mathematical Society,* **32** (1900), 208. https://doi.org/10.1112/plms/s1-32.1.208

[2] D.J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, 4th Ed, Pearson Education, Inc, (2013). http://www.pearson.com/uk/educators/higher-education-educators/product/Griffiths-Introduction-to-Electrodynamics-International-Edition-4th-Edition/9780321847812.html

[3] A.S. Pikovsky, The simplest case of chaotic wave scattering, *Chaos* **3** (1993), 505. https://doi.org/10.1063/1.165995

[4] S. Lepri, A.S. Pikovsky, Nonreciprocal wave scattering on nonlinear string-coupled oscillators, *Chaos* **24** (2014) 043119. https://doi.org/10.1063/1.4899205

[5] A.I. Komech, A.E. Merzon, Scattering in the nonlinear Lamb system, *Physics Letters* **A** 373 (2009), 1005. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.01.054

[6] A.E. Merzon, M.A. Taneco-Hernandez, Scattering in the zero-mass Lamb system, *Physics Letters* **A** 372 (2008), 4761. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.05.040

[7] P.J. Olver, N.E. Sheils, Dispersive Lamb Systems, *J. Geometric Mechanics*, ***11*** (2019), 239. https://doi.org/10.3934/jgm.2019013

[8] P. Hagerty, A.M. Bloch, M.I. Weinstein, Radiation induced instability, *SIAM J. Appl. Math*. **64** (2003), 484. https://www.jstor.org/stable/4095997

[9] A. Jahan, The Lamb problem with a Nonuniform String, *Physics Letters* **A** 392 (2021) 127133. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.127133

[10] A. Jahan, The Lamb problem with a Nonuniform String II: Pertrbative solutions, *Physics Letters* **A** **400** (2021) 127320. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2021.127320

[11] G.H. Lamb, *Introductory applications of partial differential equations*, John Wiley & Sons, (1995).

[12] E.N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*, Third Ed, Springer, (2006). https://doi.org/10.1007/3-540-28841-4