

Spontaneous scalarization in Gauss-Bonnet black hole and hybrid fields

Seyyed Mohammad Sadiq Sajjadi , Hossein Mohseni Sadjadi*

Department of Physics, University of Tehran, Tehran, Iran

Received: 03.03.2022 Final revision: 23.08.2022 Accepted: 07.11.2022

Doi link: [10.22055/jrmbms.2022.17924](https://doi.org/10.22055/jrmbms.2022.17924)

Abstract

We study the extended scalar-tensor Gauss-Bonnet. First, we review a model in which there is a coupling between the Gauss-Bonnet scalar and the scalar field. Then we extend the model to a hybrid model with two scalar fields. We study the conditions under which the solutions are unstable and spontaneous scalarization occurs. We show that the coupling coefficients in the hybrid state and in the presence of a scalar field are asymptotically the same but the sufficient condition of instability is different between these two models.

Keywords: Spontaneous scalarization, Hybrid model, Gauss-Bonnet, Instability

*Corresponding Author: mohsenisad@ut.ac.ir

اسکالرسازی خودبه‌خودی در سیاهچاله گاوس-بونه و میدان‌های هیبریدی

سیدمحمدصادق سجادی، حسین محسنی سجادی*

دانشکده فیزیک، پردیس علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۰۶/۰۱ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶

Doi link: [10.22055/jrmb.2022.17924](https://doi.org/10.22055/jrmb.2022.17924)

چکیده

در این مقاله، نظریه تعمیم‌یافته اسکالر-تانسور^۱ گاوس-بونه^۲ را بررسی می‌کنیم. ابتدا مروری داریم بر این نظریه در حالتی که اسکالر گاوس-بونه به یک میدان اسکالر جفت شده باشد. سپس مدل را به مدلی هیبریدی متشکل از دو میدان اسکالر تعمیم می‌دهیم. در ابتدا به بررسی ضریب جفت‌شدگی میدان‌های اسکالر به اسکالر گاوس-بونه می‌پردازیم، سپس شرایطی را بررسی می‌کنیم که پاسخ‌ها ناپایدار می‌باشند و اسکالرسازی خودبه‌خودی رخ می‌دهد. نشان خواهیم داد که ضرایب جفت‌شدگی در حالت هیبریدی و در حالتی که یک میدان اسکالر حضور دارد، رفتار مجانبی یکسانی دارند ولی شرط کافی ناپایداری بین این دو مدل تفاوت‌هایی دارد.

کلیدواژگان: اسکالرسازی خودبه‌خودی، هیبریدی، گاوس-بونه، ناپایداری

مقدمه

یکی از این مدل‌ها، نظریه تعمیم یافته اسکالر-تانسوری می‌باشد [۴]. در این نظریه، علاوه بر جملات کنش هیلبرت-اینشتین^۵، جمله‌ای وجود دارد که از جفت شدن میدان اسکالر به عبارتی شامل تمامی اسکالرهایی ساخته شده از انحنا^۶ ریمان از مرتبه دوم، ساخته شده است. در این نظریه می‌توانیم جمله‌ای را که میدان اسکالر به آن جفت می‌شود، اسکالر گاوس-بونه در نظر بگیریم.

نظریه‌های مختلف بی‌مویی^۶، نشان داده‌اند که میدان اسکالری که به صورت کمینه^۷ به متریک جفت شده

آشکارسازی امواج گرانشی [۱،۲] زمینه جدیدی برای بررسی نظریه‌های جدید گرانش فراهم کرده است. ما با بررسی این امواج می‌توانیم مدل‌های جدید گرانش را مورد آزمایش قرار دهیم.

یکی از مسائل مهمی که وجود دارد، کوانتس گرانش می‌باشد. گرانش بر اساس نظریه نسبیت عام، بازهنجارپذیر^۳ نیست. ما برای ساختن نظریه‌ای باز بهنجارپذیر، مدل‌های تعمیم یافته‌ای را در نظر می‌گیریم که در کنش، مراتب بالاتری از تانسور انحنا^۴ ریمان وجود داشته باشد [۳].

* نویسنده مسئول : mohsenisad@ut.ac.ir

¹ Extended Scalar-Tensor Theory

² Gauss-Bonnet

³ Renormalizable

⁴ Reimann Curvature Tensor

⁵ Einstein-Hilbert Action

⁶ No-Hair Theorem

⁷ Minimal

باشد یا به اسکالر ریچی^۱ به صورت غیر کمینه^۲ جفت شده باشد، در فضای متریک سیاه چاله، منظم^۳ نیست [۵،۶].

با این وجود، می توان قضایای بی مویی را با روش هایی دور زد. اخیراً نشان داده شده است [۷،۸] که اگر میدان اسکالر به اسکالر گاوس-بونه جفت شود، میدان اسکالر در فضای متریک سیاه چاله می تواند منظم باشد، بنابراین نظریه مورد نظر مودار می شود و ما میدانی داریم که با سیاه چاله برهم کنش می کند. حال اگر پاسخ میدان اسکالر که با سیاه چاله برهم کنش می کند، ناپایدار^۴ باشد، به تبادل انرژی با سیاه چاله می پردازد و در واقع بخشی از جرم سیاه چاله می تواند تبدیل به میدان اسکالر شود و جوابی غیر بدیهی برای میدان اسکالر خواهیم داشت که در این حالت می گوئیم اسکالر سازی خودبه خودی رخ داده است.

ما در این مقاله مدلی را در نظر می گیریم که دو میدان اسکالر به صورت غیر کمینه، به اسکالر گاوس-بونه جفت شده اند. سپس می خواهیم اسکالر سازی خودبه خودی [۹،۱۰] و ضرایب جفت شدگی را بررسی کنیم.

مروری بر مدل اسکالر-تانسور گاوس-بونه جفت شده با یک میدان اسکالر

معرفی مدل

در این قسمت، ابتدا مدل را معرفی می کنیم، سپس مروری بر ضرایب جفت شدگی، ناپایداری و بررسی میدان اسکالر به صورت اختلالی خواهیم داشت.

کنشی که در نظر می گیریم، به این صورت است:

۱

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \lambda^2 f(\phi) \mathcal{G} \right)$$

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{u,v}R^{u,v} + R_{u,v,\alpha,\beta}R^{u,v,\alpha,\beta}$$

معادله^۱، اسکالر گاوس-بونه می باشد. در این مقاله از یکای طبیعی $\hbar = c = 8\pi G = 1$ استفاده می کنیم. حال با استفاده از کنش^۱، معادله حرکت مربوط به میدان اسکالر را به دست می آوریم:

۲

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi + \lambda^2 \frac{df}{d\phi} \mathcal{G} = 0$$

در این کنش، برای $f(\phi)$ شرایط خاصی را فرض می کنیم:

(۱) با توجه به اینکه تنها مشتق تابع $f(\phi)$ در

معادله حرکت حضور دارد بنابراین می توانیم شرط دلخواهی برای آن در $\phi = 0$ بگذاریم

$$f(0) = 0 \text{ که ما فرض می کنیم:}$$

(۲) می خواهیم پاسخ بدیهی (ثابت $\phi_0 = 0$) در

معادله حرکت^۲ صدق کند، بنابراین فرض می کنیم $\frac{df}{d\phi} |_{\phi=\phi_0} = 0$. با توجه به اینکه

کنش تحت تبدیل $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$ ناورداست، فرض می کنیم مشتق $f(\phi)$ در

$$\frac{df}{d\phi} |_{\phi=0} = 0 \text{ صفر است: } (\phi = 0)$$

(۳) $\frac{d^2f}{d\phi^2} |_{\phi=0} = b^2$ ، با توجه به اینکه می توانیم

λ را باز تعریف کنیم: $\lambda \rightarrow b\lambda$ ، بنابراین

$$b^2 = \pm 1 \text{ فرض می کنیم:}$$

حال با توجه به شرایط بالا $f(\phi)$ را به این صورت تقریب می زنیم:

$$f(\phi) = f(0) + \frac{df}{d\phi} |_{\phi=0} \phi +$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2f}{d\phi^2} |_{\phi=0} \phi^2 + \dots \simeq \pm \frac{1}{2} \phi^2$$

بنابراین در معادله حرکت^۲، برای جرم مؤثر داریم:

⁴ Unstable

¹ Ricci

² Non-Minimal

³ Regular

معادله ۶ به شکل شرودینگری در می‌آید:

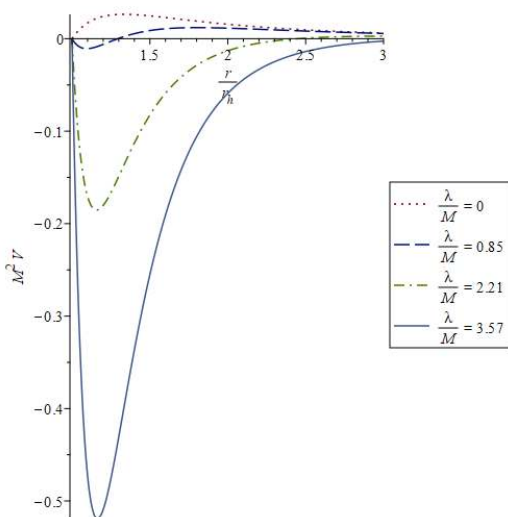
$$\frac{d^2 u}{dx^2} - V(r) u = 0$$

که $V(r)$ برابر است با:

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \lambda^2 \frac{48M^2}{r^6}\right)$$

این پتانسیل مؤثر را برای درک بهتر به‌ازای ضرایب

جفت‌شدگی مختلف، رسم می‌کنیم:



شکل ۱. رسم پتانسیل مؤثر بر حسب $\frac{r}{r_h}$.

که $r_h = 2M$ می‌باشد. ضرایب جفت‌شدگی‌ای که

انتخاب کردیم، به‌گونه‌ای است که پاسخ $\phi_\infty = 0$ در معادلات صدق می‌کند [۱۰]. همان‌طور که در شکل ۱

مشاهده می‌کنیم، پتانسیل مؤثر به‌ازای ناحیه $\frac{\lambda}{M} = 0$

منفی ندارد و برای $\frac{\lambda}{M} \neq 0$ دارای ناحیه منفی می‌باشد.

اگر پتانسیل دارای ناحیه منفی باشد، می‌تواند باعث ایجاد حالت‌های مقید شود.

ضریب جفت‌شدگی

$$m_{\text{مؤثر}}^2 = \mp \lambda^2 \mathcal{G}$$

که اگر $m_{\text{مؤثر}}^2 < 0$ باشد، ناپایداری تاقیونی^۱ داریم.

از این پس، $f(\phi)$ را $\pm \frac{1}{2} \phi^2$ در نظر می‌گیریم.

از معادله ۲ و شکل صریح $f(\phi)$ داریم:

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \pm \lambda^2 \mathcal{G} \phi = 0$$

در اینجا فرض می‌کنیم سیاهچاله مورد مطالعه،

شوارتزشیلد^۲ است و پس واکنش^۳ (پس زنی) نیز صفر

می‌باشد. بنابراین متریک به این صورت می‌باشد:

$$ds^2 = -g(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

که $g(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ می‌باشد. با این متریک

$\mathcal{G} = \frac{48M^2}{r^6}$ می‌باشد. با توجه به اینکه \mathcal{G} مثبت می‌باشد،

از این پس $b=1$ را در نظر می‌گیریم تا ناپایداری

تاقیونی داشته باشیم. میدان اسکالر را می‌توان بر حسب

هماهنگ‌های کروی و قسمت شعاعی و زمانی نوشت:

$$\phi = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{i\omega t}$$

در رابطه ۵ حالت استاتیک با تقارن کروی را در نظر

می‌گیریم: ($\omega = l = 0$). حال با در نظر گرفتن

متریک ۴، معادله حرکت میدان اسکالر و تعریف میدان

اسکالر بر مبنای رابطه ۵ داریم:

$$\frac{g(r)}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 g(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{u(r)}{r} \right) \right) + (\lambda^2 g(r) \mathcal{G}) u(r) = 0$$

حال با تبدیل مختصات

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{g(r)}$$

$$r \in (2M, \infty) \rightarrow x \in (-\infty, \infty)$$

³ Backreaction

¹ Tachyonic instability

² Schwarzschild

$$\Rightarrow \int_{2M}^{\infty} \sqrt{\frac{48 \bar{\lambda}^2 M^4}{r^6 (1 - \frac{2M}{r})}} dr = (n + 1 - \delta) \pi \quad 12$$

با محاسبه انتگرال در رابطه ۱۲ داریم:

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi (n + 1 - \delta) ; n = 0, 1, 2, \dots \quad 13$$

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که ضریب جفت‌شدگی چنین رابطه‌ی مجانبی‌ای دارد:

$$\Delta \bar{\lambda}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \quad 14$$

حال می‌خواهیم با توجه به رابطه ۱۳، مقادیر به‌دست آمده از روش تحلیلی و عددی را به‌ازای $\delta = \frac{1}{4}$ و $\delta = \frac{3}{8}$ با یکدیگر مقایسه کنیم $[\lambda, \lambda_0]$:

جدول ۱. جدول $R(n) = \frac{\lambda_{\text{تحلیلی}}}{\lambda_{\text{عددی}}}$ به‌ازای n های متفاوت.

$R(n) (\delta = \frac{3}{8})$	$R(n) (\delta = \frac{1}{2})$	مد تشدید n
۰٫۹۹۸	۱٫۱۹۸	۰
۱٫۰۰۱	۱٫۰۷۸	۱
۱٫۰۰۰	۱٫۰۴۸	۲
۱٫۰۰۰	۱٫۰۳۵	۳
۱٫۰۰۰	۱٫۰۲۷	۴
۱٫۰۰۰	۱٫۰۲۲	۵
۱٫۰۰۰	۱٫۰۱۹	۶
۱٫۰۰۰	۱٫۰۱۶	۷

در جدول ۱، $R(n) = \frac{\lambda_{\text{تحلیلی}}}{\lambda_{\text{عددی}}}$ همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، به‌ازای هر دو δ وقتی n بزرگ می‌شود $R(n)$

حال با توجه به پتانسیل در رابطه ۸ ضریب جفت‌شدگی λ را بررسی کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، معادله ۷ یک معادله ویژه مقدری شرودینگرگونه می‌باشد. می‌توان برای بررسی این ضریب، از روش دلبیو کی بی^۱ استفاده کرد $[\lambda]$ ، با استفاده از تعریف:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{M}$$

ابتدا نقاط بازگشتی پتانسیل $V(r)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \bar{\lambda}^2 \frac{48M^4}{r^6}\right)$$

$$\Rightarrow r_{min} = 2M, r_{max} \rightarrow \infty$$

حال با استفاده از روش دلبیو کی بی داریم:

۹

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{-V(r; \bar{\lambda})} dx = (n + 1 - \delta)\pi; n = 0, 1, 2, \dots$$

که x_{max} و x_{min} نقاط بازگشت کلاسیک هستند.

تغییر متغیر $\frac{dx}{dr} = \frac{1}{g(r)}$ داریم:

۱۰

$$\Rightarrow \int_{2M}^{\infty} \frac{\sqrt{-V(r; \bar{\lambda})}}{g(r)} dr = (n + 1 - \delta)\pi \quad 11$$

$$\Rightarrow \int_{2M}^{\infty} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \bar{\lambda}^2 \frac{48M^4}{r^6}\right)}}{g(r)} dr = (n + 1 - \delta)\pi$$

که پارامتر بدون بعد δ ، جابه‌جایی فاز دلبیو کی بی می‌باشد که از روش استاندارد شرایط مرزی ناحیه مجاز کلاسیکی و ناحیه غیر مجاز کلاسیکی به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه در انتگرال رابطه ۱۱ می‌خواهیم رفتار مجانبی $\bar{\lambda}$ را بررسی کنیم که n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و با توجه به رابطه ۱۱ و اینکه $\left(\frac{2M}{r^3}\right)$ مستقل از n می‌باشد، $\bar{\lambda}$ هم به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین می‌توانیم از جمله $\left(\frac{2M}{r^3}\right)$ در مقابل $\bar{\lambda}$ صرف نظر کنیم $[\lambda]$ ، بنابراین داریم:

¹ Wentzel-Kramers-Brillouin

به یک نزدیک می‌شود و نتیجه‌ای که از روش تحلیلی به‌دست آورده‌ایم با نتایج عددی توافقی خوبی دارد.

بررسی رابطه ناپایداری

با توجه به اینکه معادله حرکت میدان اسکالر، خطی است، در حالت اختلالی هم به همین شکل می‌باشد. شرط کافی برای وجود مد ناپایدار به این شکل است [۱۱]:

$$\int_{x_-}^{x_+} V(x) dx < 0$$

که x_- و x_+ نقاط بازگشت کلاسیک هستند که در قسمت قبل به‌دست آورده‌ایم.

حال با توجه به رابطه وجود مد ناپایدار، داریم [۹]:

$$\Rightarrow \int_{2M}^{\infty} \frac{V(r)}{g(r)} dr < 0 \quad ۱۵$$

$$\int_{2M}^{\infty} \left(\frac{2M}{r^3} - \lambda^2 \frac{48M^2}{r^6} \right) dr = \frac{1}{4M} - \frac{8\lambda^2}{40M^3} \quad ۱$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{12}{10} \lambda^2 \quad ۲$$

شرط کافی برای ناپایداری، عبارت ۱۷ می‌باشد، این شرط برای ناپایداری با در نظر گرفتن مدل اسکالر-تانسور گاوس-بونه به‌دست آمد. این شرط به ما می‌گوید با ناپایداری سیاه چاله شوارتزشیلد، می‌توانیم پاسخ‌های غیر صفر برای میدان اسکالر داشته باشیم.

مدل اسکالر-تانسور گاوس-بونه هیبریدی

معرفی مدل

در این مدل دو میدان اسکالر به اسکالر گاوس-بونه جفت شده است. علاوه بر آن، دو میدان اسکالر به یک دیگر هم جفت شده‌اند. کنش به این صورت است:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} \phi \nabla^{\alpha} \phi - \quad ۱۸ \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \nabla_{\beta} \psi \nabla^{\beta} \psi + \lambda_1^2 f_1(\phi) \mathcal{G} + \lambda_2^2 f_2(\psi) \mathcal{G} + \frac{1}{2} v^2 \phi^2 \psi^2 \right)$$

$$f_1(\phi) \simeq \frac{1}{2} \phi^2 \quad \text{و} \quad f_2(\psi) \simeq \frac{1}{2} \psi^2$$

معادلات حرکت مربوط به ϕ و ψ را به‌دست می‌آوریم:

$$\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \phi + (\lambda_1^2 \mathcal{G} + v^2 \psi^2) \phi = 0 \quad ۳$$

$$\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \psi + (\lambda_2^2 \mathcal{G} + v^2 \phi^2) \psi = 0 \quad ۴$$

دوباره فرض می‌کنیم پس واکنش صفر می‌باشد، بنابراین متریک را همان رابطه ۴ در نظر می‌گیریم. مانند قسمت قبل، ϕ و ψ را مستقل از زمان و با توجه به تقارن کروی، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\phi = \frac{u_1(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{i\omega t} \quad ۵$$

$$\psi = \frac{u_2(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{i\omega t} \quad ۶$$

که ما $\omega = 0$ و $l = 0$ را در نظر می‌گیریم. حال

با توجه به متریک و رابطه ۲۱ و ۲۲ داریم:

$$\frac{g(r)}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 g(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{u_1(r)}{r} \right) \right) + g(r) (\lambda_1^2 \mathcal{G} + v^2 \psi^2) u_1(r) = 0 \quad ۷$$

$$\frac{g(r)}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 g(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{u_2(r)}{r} \right) \right) + g(r) (\lambda_2^2 \mathcal{G} + v^2 \phi^2) u_2(r) = 0 \quad ۲۴$$

با تبدیل مختصاتی که در بخش ۲ به صورت

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{g(r)}$$

شرویدینگر گونه در می‌آیند:

$$r \in (2M, \infty) \rightarrow x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} - V_1(r) u_1 = 0 \quad ۸$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} - V_2(r) u_2 = 0 \quad ۹$$

و $(-v^2 \psi^2)$ در مقابل $\bar{\lambda}_1$ قابل صرف نظر کردن می‌باشند [۸]، بنابراین داریم:

$$\int_{2M}^{\infty} \sqrt{\frac{48 \bar{\lambda}_1^2 M^4}{r^6 (1 - \frac{2M}{r})}} dr = (n + 1 - \delta) \quad ۳۲$$

با محاسبه انتگرال در رابطه ۳۲ داریم:

$$\bar{\lambda}_{1n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi (n + 1 - \delta); n = 0, 1, 2, \dots \quad ۳۳$$

با توجه به تقارن معادلات حرکت ψ و ϕ می‌توانیم همین نتیجه را برای $\bar{\lambda}_2$ بگیریم:

$$\bar{\lambda}_{2n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi (n + 1 - \delta); n = 0, 1, 2, \dots \quad ۳۴$$

با توجه به ۳۳ و ۳۴ می‌توانیم نتیجه بگیریم که ضرایب جفت شدگی، چنین رابطه‌ی مجانبی‌ای دارند:

$$\Delta \bar{\lambda}_{1n} = \Delta \bar{\lambda}_{2n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \quad ۳۵$$

بنابر نتیجه‌ای که در رابطه ۳۵ به دست آوردیم، رفتار مجانبی ضرایب جفت شدگی میدان اسکالر و اسکالر گاوس-بونه در حالت هیبریدی و در حالت یک میدان اسکالر جفت شده به اسکالر گاوس-بونه، یکسان می‌باشد.

دقت می‌کنیم که تقریب‌های حدی به کار برده شده در این قسمت مختص به تحلیل دبلوی کی بی بود که اولین بار برای توجیه نتایج عددی قبلی ابداع شد [۸].

بررسی رابطه ناپایداری

با توجه به اینکه، معادلات حرکت میدان‌های اسکالر، نسبت به خودشان خطی هستند، به صورت اختلالی، معادلات حرکت به همان شکل باقی می‌مانند. ابتدا برای میدان‌های اسکالر، نرم تعریف می‌کنیم:

$$N_{\phi}^2 = \int_{2M}^{\infty} \phi^2 dr \quad \text{و} \quad N_{\psi}^2 = \int_{2M}^{\infty} \psi^2 dr$$

شرط کافی برای ناپایداری این چنین بود:

$$\int_{x_-}^{x_+} V_1(x) dx < 0$$

حال با توجه به رابطه بالا داریم:

که $V_1(r)$ و $V_2(r)$ برابرند با:

$$V_1(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \lambda_1^2 \frac{48M^2}{r^6} - v^2 \psi^2\right) \quad ۲۷$$

$$V_2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \lambda_2^2 \frac{48M^2}{r^6} - v^2 \phi^2\right) \quad ۲۸$$

ضرایب جفت شدگی

حال می‌خواهیم ضرایب جفت شدگی میدان‌های اسکالر به اسکالر گاوس-بونه در معادلات ۲۷ و ۲۸ را بررسی کنیم. با توجه به تقارن معادلات نسبت به ϕ و ψ یکی از این دو ضریب را بررسی می‌کنیم. مانند قسمت قبل، از روش دبلوی کی بی استفاده می‌کنیم:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{M}$$

ابتدا نقاط بازگشتی پتانسیل $V_1(r)$ را به دست می‌آوریم:

$$V_1(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \bar{\lambda}_1^2 \frac{48M^4}{r^6} - v^2 \psi^2\right) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0$$

$$\Rightarrow r_{min} = 2M \quad \text{و} \quad r_{max} \rightarrow \infty$$

حال با استفاده از روش دبلوی کی بی داریم:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{-V_1(r; \bar{\lambda}_1)} dx = (n + 1 - \delta) \pi; n = 0, 1, 2, \dots \quad ۲۹$$

$$\Rightarrow \int_{2M}^{\infty} \frac{\sqrt{-V_1(r; \bar{\lambda}_1)}}{g(r)} dr = (n + 1 - \delta) \pi \quad ۳۰$$

$$\Rightarrow \int_{2M}^{\infty} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \bar{\lambda}_1^2 \frac{48M^4}{r^6} - v^2 \psi^2\right)}}{g(r)} dr = (n + 1 - \delta) \pi \quad ۳۱$$

با توجه به اینکه می‌خواهیم رابطه‌ی مجانبی $\bar{\lambda}_1$ را بررسی کنیم که n به سمت بی‌نهایت می‌رود و با توجه به اینکه $\left(\frac{2M}{r^3}\right)$ و $(-v^2 \psi^2)$ مستقل از n هستند، $\bar{\lambda}_1$ به سمت بی‌نهایت می‌رود، بنابراین در رابطه ۳۱، $\left(\frac{2M}{r^3}\right)$

$$\int_{2M}^{\infty} \left(\frac{2M}{r^3} - \bar{\lambda}_2^2 \frac{48M^4}{r^6} - v^2 \phi^2 \right) dr = \quad ۴۳$$

$$\frac{1}{4M} - \frac{3\bar{\lambda}_2^2}{10M} - v^2 N_{\phi}^2 < 0$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{12}{10} \bar{\lambda}_2^2 + 4 v^2 M N_{\phi}^2 \quad ۴۴$$

با توجه به رابطه ۴۴، اگر اسکالرسازی خودبه‌خودی برای یکی از میدان‌ها رخ داده باشد، شرط کافی ناپایداری برای میدان دیگر تغییر پیدا می‌کند. اسکالرسازی میدان اول به شکل جمله $(4v^2 M N_{\phi}^2)$ بر روی شرط کافی ناپایداری میدان دیگر، تأثیر می‌گذارد.

نتیجه‌گیری

ما رابطه مجانبی برای ضرایب جفت شدگی مدل هیبریدی گاوس-بونه را به دست آوردیم. مقایسه رابطه مجانبی مدل هیبریدی و مدل تک میدان نشان می‌دهد که در هر دو مدل، رابطه مجانبی $\Delta\lambda_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi$ برقرار است. ما همچنین شرط کافی برای ناپایداری میدان‌های اسکالر را بررسی کردیم، در این قسمت، مدل‌ها دو تفاوت داشتند؛ تفاوت اول این بود که در مدل تک میدان، شرط ناپایداری تنها به جرم سیاه چاله و ضریب جفت شدگی میدان اسکالر و اسکالر گاوس-بونه بستگی داشت ولی در مدل هیبریدی علاوه بر این کمیت‌ها، ناپایداری به اندازه میدان‌ها و ضریب جفت شدگی میدان‌ها هم بستگی داشت. تفاوت دوم این بود که در مدل هیبریدی اگر برای یکی از میدان‌های اسکالر شرط ناپایداری برقرار باشد، با توجه به اینکه ناپایداری به معنای تبادل انرژی میدان اسکالر و سیاه چاله است و موجب تغییر جرم سیاه چاله و تغییر اندازه میدان می‌شود، می‌تواند در زمان‌های بعد باعث شود که برای میدان اسکالر دیگر نیز، شرط کافی ناپایداری برقرار شود.

$$\int_{2M}^{\infty} \frac{V_1(r)}{g(r)} dr < 0 \quad ۳۶$$

$$\int_{2M}^{\infty} \left(\frac{2M}{r^3} - \lambda_1^2 \frac{48M^2}{r^6} \right) dr = \quad ۱۰$$

$$\frac{1}{4M} - \frac{3\lambda_1^2}{10M^3} \Rightarrow 1 < \frac{12}{10} \bar{\lambda}_1^2 \quad ۱۱$$

همین مسیر را برای به دست آوردن شرط کافی ناپایداری میدان اسکالر ψ ، طی می‌کنیم:

$$\int_{2M}^{\infty} \frac{V_2(r)}{g(r)} dr < 0 \quad ۱۲$$

$$\int_{2M}^{\infty} \left(\frac{2M}{r^3} - \lambda_2^2 \frac{48M^2}{r^6} \right) dr = \quad ۱۳$$

$$\frac{1}{4M} - \frac{3\lambda_2^2}{10M^3} \Rightarrow 1 < \frac{12}{10} \bar{\lambda}_2^2 \quad ۱۴$$

از شرط ۳۸ و ۴۱ نتیجه می‌گیریم اگر:

$$1 < \max \left\{ \frac{12}{10} \bar{\lambda}_1^2, \frac{12}{10} \bar{\lambda}_2^2 \right\} \quad ۴۲$$

برقرار باشد، شرط کافی ناپایداری برقرار است و پاسخ‌های ناپایدار برای میدان‌های اسکالر داریم. با مقایسه رابطه ۱۷ و ۴۲ نتیجه می‌گیریم شرط کافی برای ناپایداری برای هر دو مدل به یک شکل است با این تفاوت که در مدل هیبریدی شرط کافی ناپایداری برای یکی از میدان‌ها، برای اسکالرسازی خودبه‌خودی کافی است.

حال فرض می‌کنیم اسکالرسازی خودبه‌خودی برای یکی از میدان‌ها رخ داده است، می‌خواهیم تأثیر این ناپایداری را بر میدان اسکالر دیگر ببینیم. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم اسکالرسازی خودبه‌خودی برای میدان اسکالر ϕ رخ داده است. بنابراین برای میدان اسکالر ϕ مقادیر غیر صفر خواهیم داشت. بنابراین شرط کافی ناپایداری برای میدان اسکالر

ψ به این صورت است:

مرجع‌ها

- [9] D.D. Doneva, S.S. Yazadjiev, New Gauss-Bonnet black holes with curvature induced scalarization in the extended scalar-tensor theories, *Physical Review Letters* **120** 31103 (2018).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.131103>
- [10] H.O. Silva, J. Sakstein, L. Gualtieri, T.P. Sotiriou, E. Berti, Spontaneous scalarization of black holes and compact stars from a Gauss-Bonnet coupling, *Physical Review Letters* **120**, 131104 (2018).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.131104>
- [11] W. Buell, B. Shadwick, Potentials and bound states, *American Journal of Physics* **63**, 256 (1995).
<https://doi.org/10.1119/1.17935>
- [1] B.P. Abbott et al. (Virgo, LIGO Scientific), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Physical Review Letters* **116**, 061102 (2016).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- [2] B.P. Abbott et al. (Virgo, LIGO Scientific), GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence *Physical Review Letters* **116**, 241103 (2016).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.241103>
- [3] K.S. Stelle, Renormalization of higher derivative quantum gravity. *Physical Review D* **16**, 953 (1977).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.16.953>
- [4] M. Crisostomi, K. Koyama, G. Tasinato, Extended scalar-tensor theories of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016 (04) 044, (2016).
[10.1088/1475-7516/2016/04/044](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/04/044)
- [5] J.D. Bekenstein, Nonexistence of baryon number for black holes, *Physical Review D* **5**, 1239 (1972).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.5.1239>
- [6] A.E. Mayo, J.D. Bekenstein, No hair for spherical black holes: charged and non-minimally coupled scalar field with self-interaction, *Physical Review D* **54** 5059 (1996).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.5059>
- [7] S. Hod, Stationary scalar clouds around rotating black holes, *Physical Review D* **96** 124037 (2017).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.104026>
- [8] S. Hod, Spontaneous scalarization of Gauss-Bonnet black holes: Analytic treatment in the linearized regime, *Physical Review D* **100** 064039 (2019).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.064039>