Document Type: Full length research Paper

The role of super quantum discord in super dense coding

Forouzan Mirmasoudi*, Sodeif Ahadpour

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

Received: 16.1.2020 Final revised: 30.12.2022 Accepted: 06.02.2023

Doi link: 10.22055/jrmbs.2023.18124

Abstract

Quantum correlations have been comprehensively accepted as the main resource for different quantum information processing tasks. If we regard density coding as a process for transmitting information from source to receiver, it is important to understand how the properties of the quantum channel itself can be determined, and under what conditions the channel is suitable for density coding. This study considers super dense coding of a bipartite state via a quantum correlated channel. We find that the dynamic properties of SQD on our channel enable us to determine when and under what conditions the system is suitable for dense coding capacity. The results show that our proposals could lead to this scheme being efficient for quantum information processing.

Keywords: Quantum correlations, Super quantum discord, Density coding

نقش ابرناهمخوانی کوآنتومی در کدگذاری فوق چگال

فروزان میرمسعودی*، صدیف احدپور

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۶ ویرایش نهائی: ۱۴۰۱/۱۰/۰۹ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷

Doi link: 10.22055/jrmbs.2023.18124

چکیده

همبستگی‌های کوآنتومی به‌عنوان منبع اصلی برای کارهای مختلف پردازش اطلاعات کوآنتومی پذیرفته شده‌اند. اگر به کدگذاری چگال به‌عنوان یک فرایندی برای انتقال اطلاعات از منبع تا دریافت کنندهٔ اطلاعات نگاه کنیم. این مسئله که چگونه می‌توان از ویژگی‌های کانال کوآنتومی پی برد تحت چه شرایطی کانال برای کدگذاری چگال مناسب است، اهمیت می‌یابد. در این مقاله کدگذاری فوق چگال را با در نظر گرفتن یک مدل سادهٔ کانال کوآنتومی دو کیوبیتی بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که ابرناهمخوانی کوآنتومی می‌تواند نقش بسیار مؤثری در پیش‌بینی رفتار ظرفیت کدگذاری فوق چگال داشته باشد. این مسئله می‌تواند نقش مؤثر و مفیدی در فرآیند اطلاعات کوآنتومی داشته باشد.

کلیدواژگان: همبستگی‌های کوآنتومی، ابرناهمخوانی کوآنتومی، کدگذاری فوق چگال

مقدمه

پردازش اطلاعات کوآنتومی یکی از شاخه‌های مهم در نظریهٔ اطلاعات کوآنتومی محسوب می‌شود [۱]. پردازش کلاسیک اطلاعات در هر شکلی بر مبنای دیجیتال و محاسبات کلاسیکی انجام می‌گیرد، اما یک روش بهتر و کاربردی‌تر برای پردازش اطلاعات بر اساس مکانیک کوآنتومی است. این روش جدید با ویژگی‌هایی همراه است که آن را از محاسبات کلاسیکی بسیار متمایز می‌سازد. همبستگی کوآنتومی و درهم‌تنیدگی به‌عنوان کمیت‌هایی که یک خصلت کوآنتومی را بیان می‌کنند در سال‌های اخیر مورد پژوهش وسیعی قرار گرفته‌اند. این توجه هم ناشی از نقش درهم‌تنیدگی در مبانی مکانیک کوآنتومی است و هم به‌دلیل نقش بارزی است که در فرایندهای محاسبات و مبادلهٔ اطلاعات کوآنتومی ایفا می‌کند [۲–۷]. یکی از فرایندهای کوآنتومی که براساس درهم‌تنیدگی کوآنتومی عمل می‌کند، کد گذاری فوق چگال است. در فرایند موسوم به کد گذاری فوق چگال، دو بیت کلاسیکی از اطلاعات با ارسال تنها یک کیوبیت به گیرنده ارسال می‌شود. کدگذاری فوق چگال نه تنها به‌صورت نظری [۸–۹] بلکه به‌صورت تجربی [۱۰] نیز مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله سیستم‌های کوآنتومی که در کدگذاری چگال مورد توجه قرار گرفته است، می‌توان به زنجیره‌های اسپینی و الکترودینامیک کوآنتومی کاواک اشاره نمود [۷].

* نویسنده مسئول: fmirmasoudi@uma.ac.ir

ناهمخوانی کوآنتومی یک خاصیت کوآنتومی است که اولین بار توسط اولیور و زورک در سال ۲۰۰۱ معرفی شد [۱۱]. ناهمخوانی، تفاضل بین دو عبارت اطلاعات متقابل کوآنتومی و کلاسیکی است، که در تعیین و کاربرد همبستگی‌های کوآنتومی در حالت مخلوط بسیار مفید است، زیرا حالت‌های مخلوط همبستگی‌هایی دارند که همبستگی‌های کلاسیکی‌شان نهان هستند [۱۲]. ناهمخوانی کوآنتومی، همبستگی کوآنتومی بین بخش‌های مختلف سیستم را اندازه‌گیری می‌کند. ناهمخوانی کوآنتومی یک منبع کلیدی در اندازه‌گیری همبستگی‌ها محسوب می‌شود. ناهمخوانی کوآنتومی بر اساس اندازه‌گیری‌های قوی (عملگرهای تصویری[۱]) بیان می‌شود. اندازه‌گیری یک حالت کوآنتومی دلخواه براساس عملگرهای تصویری منجر به از دست دادن همدوسی می‌شود [۱۳]. در حالی‌که اگر اندازه‌گیری به‌آرامی صورت گیرد همدوسی سیستم را حین اندازه‌گیری حفظ می‌کند. از این‌رو اندازه‌گیری ضعیف می‌تواند در حفظ همبستگی کوآنتومی بسیار مؤثر باشد. یک خاصیت کوآنتومی به نام اَبَرناهمخوانی[۲] براساس اندازه‌گیری ضعیف[۳] تعریف شد [۱۳].

اگر به کد گذاری چگال به‌عنوان یک فرایندی برای انتقال اطلاعات از منبع تا دریافت کننده اطلاعات نگاه کنیم، این مسئله که چگونه می‌توان از ویژگی‌های کانال کوآنتومی پی‌برد تحت چه شرایطی کانال برای کدگذاری فوق چگال مناسب است، اهمیت می‌یابد. برای درک فیزیکی سؤال فوق و کسب توانایی علمی جهت پاسخ گویی، در ادامه با در نظر گرفتن یک کانال کوآنتومی به بررسی کدگذاری فوق چگال می‌پردازیم. کدگذاری چگال به‌عنوان یک پروتکل مخابراتی در سال ۱۶۶۲ توسط Bennet و Wiesner ارائه شد و یکی از زمینه‌های قابل توجهی است که درهم‌تنیدگی نقش مهمی در آن ایفا می‌کند. حالت درهم‌تنیدگی اولیه که بین فرستنده و گیرنده به‌اشتراک گذاشته می‌شود با این ویژگی که می‌توان آن را توسط عملگر یکانی به‌حالت دیگر تبدیل کرد از اهمیت خاصی در این پروتکل مخابراتی برخوردار است. در این مقاله فرض می‌کنیم آلیس(فرستنده) یک حالت درهم‌تنیده دو کیوبیتی دارد و می‌خواهد آن را از طریق یک کانال کوآنتومی به‌باب(گیرنده) ارسال نماید. لازم به‌ذکراست که کانال کوآنتومی در این مقاله حالت ورنر[۴] است. ظرفیت کدگذاری فوق چگال و ابرناهمخوانی را برای یک کانال کوآنتومی محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم.

ناهمخوانی کوآنتومی

ناهمخوانی کوآنتومی، ارتباط بین بخش‌های مختلف یک سیستم را اندازه‌گیری می‌کند [۱۱]. با استفاده از ناهمخوانی کوآنتومی نشان داده شده برای حالت‌های مخلوط جداپذیر نیز، ارتباط کوآنتومی وجود دارد. ناهمخوانی کوآنتومی را به‌صورت اختلاف همبستگی‌های کلاسیکی و کوآنتومی تعریف می‌شود [۱۱-۱۴]:

[1] Positive operator
[2] Super discord
[3] Weak measurements.
[4] Werner state

$$QD = I(\rho) - C(\rho) \qquad ۱$$

حذف همبستگی‌های کلاسیکی توسط اعمال مخرب‌ترین اندازه گیری‌ها رو یک زیرسامانه صورت می‌گیرد. اطلاعات متقابل، سنجه‌ای برای اندازه‌گیری همبستگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^{A}) + S(\rho^{B}) - S(\rho^{AB}) \qquad ۲$$

که $S(\rho_A) = -Tr(\rho_A \; Ln(\rho_A))$ آنتروپی فون-نویمن و $S(\rho^{AB})$ آنتروپی توام A و B، آنتروپی کاهش یافته بخش A و B است. همبستگی کلاسیکی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\rho^{AB}) = S(\rho^{B}) - \min_{\{\hat{\Pi}_j^B\}} (\sum_J p_j \, S(\rho_{A|\hat{\Pi}_j^B})) \qquad ۳$$

پس:

$$QD = S(\rho^{B}) - S(\rho^{AB}) + \min_{\{\hat{\Pi}_j^B\}} (\sum_j p_j \, S(\rho_{A|\hat{\Pi}_j^B})) \qquad ۴$$

$\hat{\Pi}_j^B$ عملگرهای تصویری متعامد هستند. چنانچه j امین خروجی را داشته باشیم، حالت بعد از اندازه گیری روی زیر سامانه برابر

$$\rho_{A|\hat{\Pi}_j^B} = \frac{\hat{\Pi}_j^B \rho_{AB} \hat{\Pi}_j^B}{Tr(\hat{\Pi}_j^B \rho_{AB} \hat{\Pi}_j^B)}$$

می‌شود که این خروجی با احتمال $p_j = Tr_{AB}(\hat{\Pi}_j^B \rho_{AB})$ حاصل می‌شود.

ابرناهمخوانی کوآنتومی

یکی دیگر از همبستگی‌های کوآنتومی که برحسب اندازه‌گیری‌های ضعیف تعریف می‌شود، ابرناهمخوانی کوآنتومی نامیده می‌شود [۲]. عملگرهای اندازه‌گیری ضعیف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(\pm x) = \sqrt{\frac{1 \pm \tanh x}{2}} \hat{\Pi}_0 + \sqrt{\frac{1 \pm \tanh x}{2}} \hat{\Pi}_1 \qquad ۵$$

که x شدت اندازه‌گیری ضعیف است. $\hat{\Pi}_0$ و $\hat{\Pi}_1$ پایه‌های اورتونرمال و از قاعده $\hat{\Pi}_0 + \hat{\Pi}_1 = \hat{I}$ پیروی می‌کنند، $\lim_{x\to\infty} P(+x) = \hat{\Pi}_0$ و $\lim_{x\to\infty} P(-x) = \hat{\Pi}_1$ است. ابرناهمخوانی کوآنتومی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SQD = S(\rho^{B}) - S(\rho^{AB}) + \min_{\{\Pi_j^B\}} S_W(A|P^B(x)) \qquad ۶$$

که آنتروپی شرطی برحسب عملگرهای ضعیف تعریف می‌شود:

$$S_W(A|P^B(x)) = P(x) S(\rho_{A|P^B(x)}) + P(-x) S(\rho_{A|P^B(-x)})$$

در ادامه با استفاده روش‌های به‌کار رفته در[۱۸-۱۵] با در نظر گرفتن حالت دو کیوبیتی ورنر دو کیو بیتی به‌محاسبهٔ ابرناهمخوانی کوآنتومی می‌پردازیم.

کد گذاری فوق چگال

به‌منظور انجام کدگذاری فوق چگال با در نظر گرفتن یک سیستم دو کیوبیتی، ابتدا باید به‌ساخت مجموعه دو کیوبیتی متعامد بپردازیم [۲۰-۱۹]

$$\mathrm{U}_{00}\left|\mathrm{J}\right\rangle=\left|\mathrm{J}\right\rangle$$
$$\mathrm{U}_{01}\left|\mathrm{J}\right\rangle=\left|\mathrm{J}+1(\mathrm{mod}\,2)\right\rangle$$
$$U_{10}\left|J\right\rangle=e^{\sqrt{-1}(2\pi/2)j}\left|J\right\rangle$$
$$U_{11}\left|J\right\rangle=e^{\sqrt{-1}(2\pi/2)j}\left|J+1(\mathrm{mod}\,2)\right\rangle$$

که $\langle j|$ پایه محاسباتی تک کیوبیتی $(|j\rangle=\{|0\rangle,|1\rangle\})$ است. عملگری که آلیس روی کیوبیتش اعمال می‌کند به‌پیامی که می‌خواهد برای باب بفرستد بستگی دارد: اگر بخواهد "۰۰"را بفرستد، کیوبیت را دست نخورده می‌گذارد؛ اگر بخواهد "۰۱"را بفرستد، عملگر پاولی X را اعمال می‌کند؛ اگر بخواهد "۱۱"را بفرستد، عملگر Y و اگر بخواهد "۱۱"را ارسال کند عملگر Z را روی کیوبیتش اعمال می‌کند. پس از آن، آلیس کیوبیتش را از طریق یک کانال کوآنتومی برای باب میفرستد. حال ما فرض می‌کنیم $0\to00,\ 1\to01,\ 2\to10,\ 3\to11$ جایگزین شوند. فرستنده به‌منظور ارسال کیوبیت خود مجموعه‌ای از تبدیلات یکانی متعامد:

$$U_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad U_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$U_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad U_3=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$$

را انجام می‌دهد، توجه کنید که این چهار عملگر یکانی هستند و در نتیجه می‌توان آن را متناظر با یک تحول زمانی در نظر گرفت، پس آلیس می‌تواند هر یک از آنها را برای کیوبیت خود اثر دهد. اینکه فرستنده یک عملگر یکانی را روی کیوبیت خودش اثر می‌دهد معادل با یک تحول زمانی مانند $\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{I}_2$ روی کل سیستم است. لازم به‌ذکر است I_2 عملگر واحد برای فرستنده و U_i تبدیلات یکانی است. به‌این ترتیب، میانگین آنسامبلی از حالت‌های منفرد تولید شده توسط تبدیلات واحد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho^*=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}(\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{I}_2)\rho(\mathrm{U}^\dagger{}_i\otimes\mathrm{I}_2) \qquad ۷$$

که اندیس ۰ بیانگر عنصر ۰۰ ، ۱ برای ۰۱، ۲ برای ۱۰ ، ۳ برای ۱۱ و ρ ماتریس چگالی کانال کوآنتومی می‌باشد. اگر فرستنده مجموعه‌ای از تبدیلات یکانی متعامد را انجام دهد، بیشینه ظرفیت کدگذاری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\chi=\mathrm{S}(\rho^*)-\mathrm{S}(\rho) \qquad ۸$$

که $S(\rho^*)$ آنتروپی فون نویمن حالت متوسط انسامبلی از حالت‌های منفرد ρ^* است و $S(\rho)$ آنتروپی فون نویمن کانال کوآنتومی می‌باشد. به‌ازای $\chi>1$ کد گذاری معتبر بوده و بهینه کد گذاری کوآنتومی به‌ازای $\chi_{max}=2$ رخ می‌دهد. حالت کانال ρ را یک حالت ورنر دو کیو بیتی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\rho_{ch}=\lambda\left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|+(\frac{1-\lambda}{4})\mathrm{I} \qquad ۹$$

که $\left|\psi^-\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle-|10\rangle]$ یکی از حالت‌های بل و $0\le\lambda\le1$ است. حال با جای‌گذاری معادلهٔ۹ در معادلهٔ۷ ماتریس چگالی خروجی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho^*=(\frac{1-\lambda}{4})[|00\rangle\langle00|+|11\rangle\langle11|]+(\frac{1+\lambda}{4})[|01\rangle\langle10|+|10\rangle\langle10|] \qquad ۱۰$$

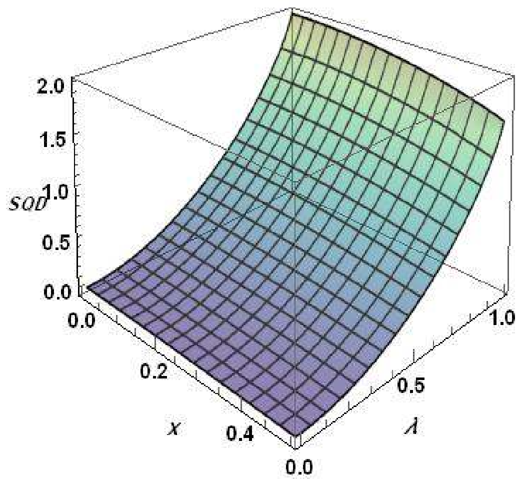
و سپس با استفاده از رابطهٔ۸ با محاسبهٔ ماتریس چگالی خروجی ظرفیت کدگذاری چگال به‌سادگی به‌دست می‌آید:

۱۱

$$\chi = \frac{3(1-\lambda)\mathrm{Ln}[1-\lambda] + (1+3\lambda)\mathrm{Ln}[1+3\lambda]}{4\mathrm{Ln}[2]}$$

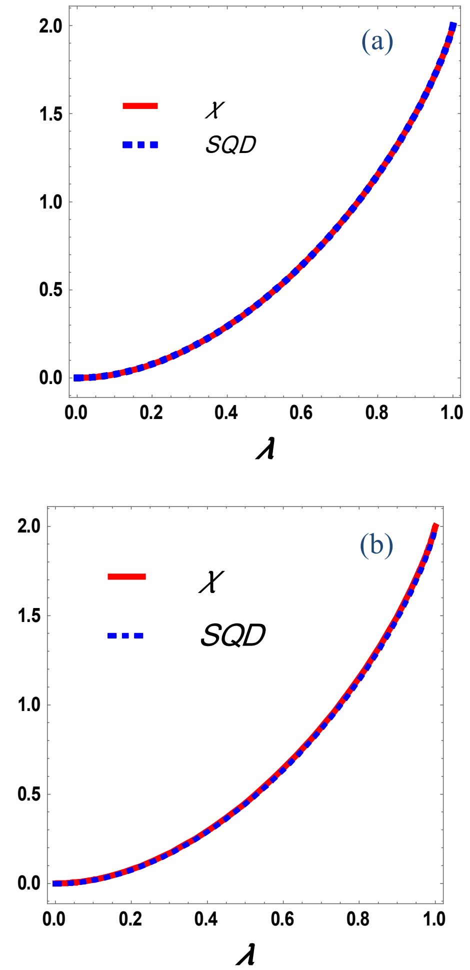
محاسبات و نتایج

در این بخش به‌محاسبهٔ رفتار ظرفیت کدگذاری فوق چگال و ابرناهمخوانی کوآنتومی به‌دست آمده در بخش پیشین برحسب λ می‌پردازیم. به‌جهت سنجش همبستگی کوآنتومی حالت ورنر (معادلهٔ۹) با در نظر گرفتن معادلهٔ۶ در شکل۱ تغییرات ابر ناهمخوانی کوآنتومی به‌ازای λ و xهای مختلف نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد، در یک λمعین با افزایش x ابرناهمخوانی کاهش می‌یابد. به‌طوری‌که بیشترین مقدار ابرناهمخوانی کوآنتومی در $\lambda=1$ و به‌ازای xهای کوچک رخ می‌دهد.

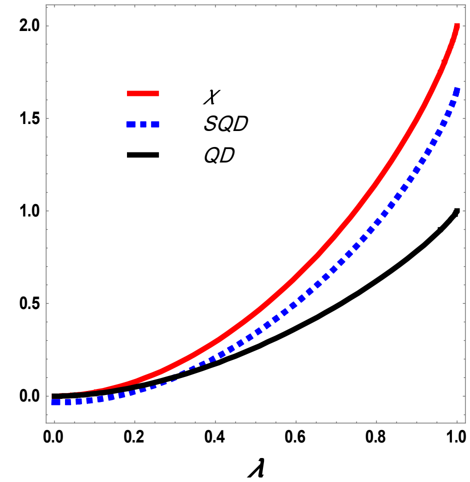


شکل۱. ابرناهمخوانی کوآنتومی حالت ورنر برحسب λ , x.

حال برای پاسخ به سؤالی که پیشتر مطرح شد که آیا می‌توان از روی خود حالت‌های درهم‌تنیده که در فرایند کدگذاری فوق چگال استفاده می‌شود پی برد آیا این حالت‌ها قطعاً نقش مؤثری در این فرایند دارند یا نه؟ به بررسی تغییرات ابر ناهمخوانی کوآنتومی و ظرفیت کدگذاری به‌ازای xهای مختلف برحسب λ می‌پردازیم. شکل‌های۲ که نمودار ظرفیت کدگذاری برحسب λاست، نتیجهٔ این مطالعه را نشان می‌دهند. شکل۲ نشان می‌دهد که با افزایش λ ابرناهمخوانی کوآنتومی افزایش می‌یابد. یعنی هرچه حالت کانال به حالت بل نزدیکتر می‌شود، این کانال برای کدگذاری فوق چگال کارآمدتر است. از نمودارهای۲ مشهود است که ظرفیت کدگذاری فوق چگال و ابرناهمخوانی حالت ارسال شده در کدگذاری فوق چگال به‌ازای حالتی که حالت کانال بیشترین حالت درهم‌تنیدگی دارد به مقدار بیشینه می‌رسد. بنابراین با تنظیم مقدار مناسب برای λ می‌توان به مقدار بهینه ظرفیت کد گذاری فوق چگال دسترسی یافت. به‌طوری‌که به‌ازای تقریباً $\lambda \geq 0.8$ ظرفیت‌کدگذاری فوق چگال به‌مقدار مطلوب خود یعنی به χ=1 می‌رسد. ویژگی جالب دیگر که از مقایسه رفتار ظرفیت کدگذاری فوق چگال و ابرناهمخوانی کوآنتومی می‌توان دید این است که به‌ازای مقدار کوچکی از عملگر اندازه‌گیری ضعیف نحوهٔ رفتار ظرفیت کدگذاری چگال و ابرناهمخوانی کوآنتومی منطبق بر یکدیگرند.



شکل۲. ابرناهمخوانی (خط تیره-آبی) و ظرفیت کدگذاری فوق چگال (خط پر-قرمز) به‌ازای (a) $x = 0.02$ و (b) $x = 0.1$



شکل۳. ابرناهمخوانی (خط تیره-آبی)، ناهمخوانی کوآنتومی (خط پر-مشکی) و ظرفیت کدگذاری فوق چگال (خط پر-قرمز) به‌ازای‌های مختلف به‌ازای $x = 0.5$.

در شکل۳ نمودار ناهمخوانی کوآنتومی و ابرناهمخوانی کوآنتومی حالت خروجی و ظرفیت کدگذاری کوآنتومی برحسب به‌ازای رسم شده است. می‌توان از شکل۳ ملاحظه نمود که با افزایش شدت اندازه‌گیری ضعیف ابرناهمخوانی کوآنتومی و ظرفیت کدگذاری فوق چگال برهم منطبق نیستند، طبق انتظار در xهای بزرگتر همبستگی کوآنتومی سیستم به حد ناهمخوانی کوآنتومی نزدیک می‌شود. به‌علاوه در این مورد حالت بل(معادله ۹) مناسب برای کدگذاری فوق چگال است. به‌طور کلی، خواص دینامیک ابرناهمخوانی کوآنتومی گویای این است که به‌ازای مقدار بسیار کوچک از شدت پارامتر اندازه‌گیری ضعیف، کانال تحت چه شرایطی می‌تواند مناسب برای کدگذاری فوق چگال باشد. بنابراین با وجود اینکه ابرناهمخوانی کوآنتومی کانال کوآنتومی می‌تواند گویای کدگذاری فوق چگال بهینه باشد، این امر می‌تواند سبب کاهش قابل توجهی در هزینه سامانه‌های مخابرات کوآنتومی خواهد شد.

نتایج

در این مقاله کدگذاری فوق چگال کوآنتومی را تحت کانال با حالت ورنر دو کیوبیتی مورد بررسی قرار گرفت. طبق نتایج وقتی حالت کانال بل است، ظرفیت کدگذاری می‌تواند به مقدار بهینه خود برسد. به‌علاوه، نتایج نشان می‌دهند رفتار ظرفیت کدگذاری فوق چگال از رفتار ابرناهمخوانی کانال به‌ازای یک مقدار کوچکی از شدت پارامتر اندازه‌گیری ضعیف قابل پیش‌بینی است. بنابراین عملگرهای اندازه‌گیری

ضعیف نقش بسیار مهمی می‌توانند در انتقال اطلاعات کوآنتومی داشته باشند.

مرجع‌ها

[1] J. Lee, M.S. Kim, Entanglement teleportation via Werner states, *Physical Review Letters* ***84*** *18* (2000) 4236. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4236.

[2] M.A. Nielsen, I. Chuang, Quantum computation and quantum information, (2002) 558-559. https://doi.org/10.1119/1.1463744.

- [3] M.B. Plenio, V. Vedral, (1998). Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world. *Contemporary physics*, ***39*** 6, 431-446. https://doi.org/10.1080/001075198181766

[4] M.C. Arnesen, S. Bose, V. Vedral, Natural thermal and magnetic entanglement in the 1D Heisenberg model, *Physical Review Letters* ***87*** *1* (2001) 017901. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.017901

[5] S .Ghosh, et al., Entangled quantum state of magnetic dipoles, *Nature* ***425*** *6953* (2003) 48. https://doi.org/10.1038/nature01888

[6] S. Mirzaei, Entanglement and Fidelity of Quantum Teleportation in Heisenberg XXZ Model with Multiple Interactions, *Journal of Research on Many-body Systems* ***12*** *3* (2022) 39-49. https://doi.org/10.22055/jrmbs.2022.17867.

[7] F. Mirmasoudi, S. Ahadpour, Super quantum discord behaviors in two-qubit Heisenberg XYZ model with intrinsic decoherence, *Journal of Research on Many-body Systems* ***8*** *17* (2018) 181-189. https://doi.org/10.22055/JRMBS.2018.13898.

[8] F. Mirmasoudi, S. Ahadpour, Dynamics of super quantum discord and optimal dense coding in quantum channels, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* ***51*** *34* (2018) 345302. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aacd29.

[9] A. Barenco, K.E. Artur, Dense coding based on quantum entanglement, *Journal of Modern Optics* ***42*** *6* (1995) 1253-1259.

https://doi.org/10.1080/09500349514551091

[10] K. Mattle, et al. Dense coding in Experimental quantum communication, *Physical Review Letters* ***76*** *25* (1996) 4656. https://doi.org/10.1007/s00339-006-3783-x

[11] H. Ollivier, W.H. Zurek, Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations, *Physical Review Letters* ***88*** (2001) 017901. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.017901

[12] A.K. Maurya, M.K. Mishra, H. Prakash, Quantum discord and entanglement in quasi-Werner states based on bipartite superposed coherent states, arXiv preprint (2012) arXiv:1210.2212.

[13] Y.S. Kim, J.C. Lee, O. Kwon, Y.H. Kim, Protecting entanglement from decoherence using weak measurement and quantum measurement reversal, *Nature Physics* ***8*** (2012) 117. https://doi.org/10.1117/12.2024442

[14] C.H. Bennett, G. Brassard, Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing, *Proceedings of IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing*, Bangalore India, (1984) 175-179. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025

[15] M. Ali, A.R.P. Rau, G. Alber, Quantum discord for two-qubit X states,

Physical Review A ***81*** (2010) 042105. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.042105

[16] T. Li, T. Ma, Y. Wang, S. Fei, Z. Wang, Super Quantum Discord for X-type States *International Journal of Theoretical Physics* (2015) 54:680–688. https://doi.org/10.1007/s10773-014-2260-0

[17] Y.K. Wang, T. Ma, H. Fan, S.M. Fei, Z. Xi. Wang, Super quantum correlation and geometry for Bell-diagonal states with weak measurements, *Quantum Information Processing* ***13*** (2014) 283–297. https://doi.org/ 10.1007/s11128-013-0649-y.

[18] U. Singh, A.K. Pati, Quantum discord with weak measurements, *Annals of Physics* ***343*** (2014) 141–152. https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.02.004

[19] C.H. Bennett, J.W. Stephen, Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, *Physical review letters* ***69*** *20* (1992) 2881. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881

[20] T. Hiroshima, Optimal dense coding with mixed state entanglement, *Journal of Physics A: Mathematical and General* ***34*** *35* (2001). https://doi.org 10.1088/0305 4470/34/35/316